好玩的数学

张景中 主编

王树禾 著

数学聊斋

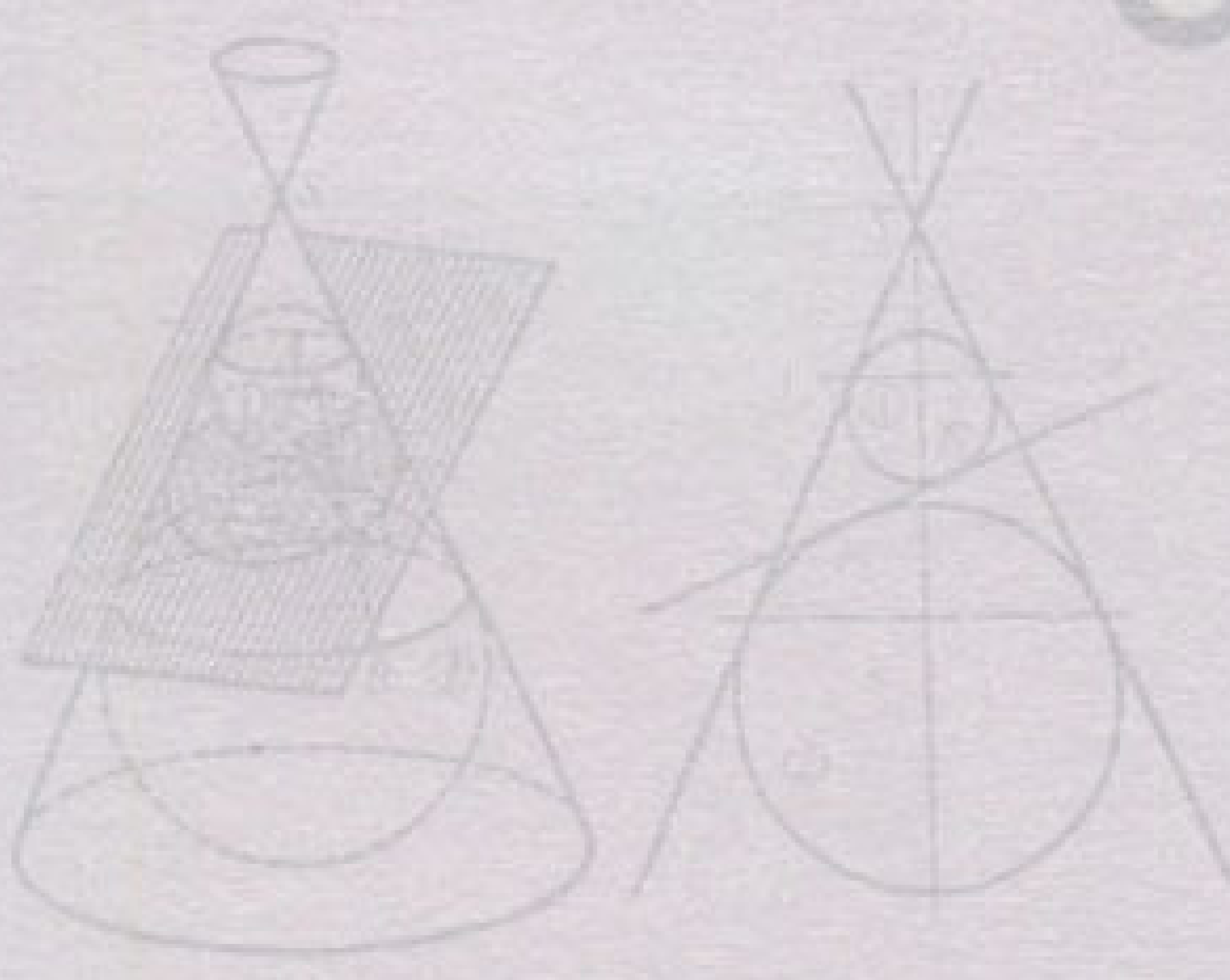
（第二版）

数学严密

数学巧妙

数学美丽

数学是年轻人的游戏



科学出版社
www.sciencep.com

总　　序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传”，不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说："道生一，一生二，二生三，三生万物。"古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力："庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。"

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是"好玩的数学"题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第2个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i，就是虚数单位，它的平方等于 -1。谁能想到，这3个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π》和《不可思议的 e》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回　三次方程闹剧获得公式解　神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳25年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自2002年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一

度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024-4=1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a，b，c，d，e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a=(x+4)/5$$

$$b=4(x+4)/25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64\ (x+4)/625$$

$$e=256\ (x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以（$x+4$）应是 3125 的倍数，所以

$$(x+4)=3125k\ (k\text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时，$x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《π 和 e》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi=3.1415926535897\cdots$，可得 $|355/113-\pi|<0.00000026677$，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，一定会有

$$|355/113-q/p|<2\times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p-113q|/113p<2\times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 355/113，所以 $|355p-113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p<2\times 0.00000026677$$

由此推出

$$p>1/(113\times 2\times 0.00000026677)>16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

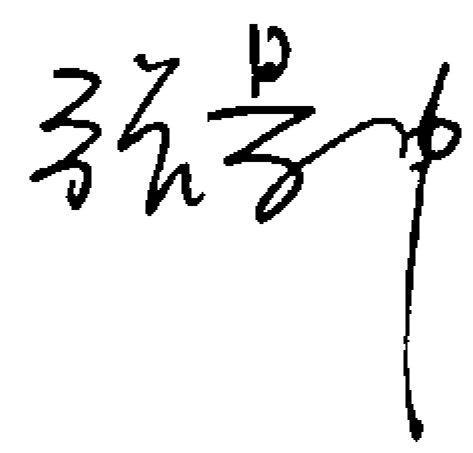
数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。

就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。



2004年9月9日

《好玩的数学》编委会

主　编　张景中

成　员　（按汉语拼音字母排序）

陈仁政　孙荣恒　谈祥柏　王树禾

吴鹤龄　易南轩　郁祖权

前　　言

别把数学想像得那么困难和艰涩，认为它排斥常识。数学仅仅是常识的一种微妙的形式。

——L. 凯尔文

清代文豪蒲松龄著奇书《聊斋志异》，借鬼狐故事伐恶扬善，名冠文学史，只可惜蒲留仙老先生的书用文言写成，今日一般读者颇为费解，《聊斋志异》已有不少版本的白话文译本发行，很受大众欢迎。

数学当中也有很多难理解、难证明、难计算的问题，犹如《聊斋志异》中众多的神奇故事，例如由正方形对角线的长引发的第一次数学危机，由理发师悖论（罗素悖论）引发的第三次数学危机，在简单确定的规律支配下却孕育出混沌的紊乱运动等；至于计算机数学的核心问题NPC，分明是从有限的情形之中挑选出一种合乎要求的情形，为什么用大型计算机去解尚需千万世纪才能解出呢？NPC中的问题为什么共生死？它们究竟存在不存在有效的解法？又如臭名昭著的 $3x+1$ 问题：x 为偶数，则取其半；x 为奇数，则取 $3x+1$ 之半；得出的结果再如上“取半”，实验与猜想最后会得出1，可惜（可怕）它是至今数学界无力解决的问题之一，现在无人证其真，亦无人证其

伪。美籍奥地利数学家哥德尔严格证明了确乎存在既不能证其真亦不能证其伪的命题！如果问：π 的小数部分会不会有 100 个 8 连贯出现，即

$$\pi = 3.14159265\cdots\underbrace{888\cdots888}_{100\text{个}8}\cdots?$$

如果有，有几处？在小数点后第几位上发生？这种“坏问题”数学中到处都有，要多少有多少。种种涉及数学与计算机数学的尖锐重大的问题，很值得我们关心。但是，在现代数学专著当中，设定了繁多的专用符号和艰涩的定义、定理，弄得连非本分支的数学家们都成了隔山之人，感到好似“两个黄鹂鸣翠柳”，不知所云。

能否拣一些现代的数学内容和生动有趣的经典数学内容，用“普通话”写一本貌似《聊斋志异》那般有思想哲理、活泼巧妙的数学科普著作，来宣传普及这些重要优雅的数学知识呢？本书对此做了尝试，在兼顾数学知识的趣味性和严肃性的前提下，最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”，亦使之“知其所以然”，力争通而不俗，美而不媚。

本书几乎完全用 $+ - \times \div$ 解决问题，lim 只用过不多几次，力争不沾微积分等现代数学中非初等运算的边，使得凡具中学文化的读者百分之百地可以读懂全书，当然，数学专业的师生也不至于认为太肤浅。如此使得各个层次的读者都可以在欢快轻松的阅读欣赏当中，学到新知识，见识新技巧，在幽默的智能娱乐之中，接受和进一步思考现代数学的本质和是非。

书中的标题是“摘要”式的，有的比较具体，写作时则借题发挥，多讲了一些与该标题相关的道理和要例。

但愿这本书能让你与数学结缘，如果你被书中那些诱人的问题和技巧迷住而流连忘返，从此更痴情数学，提升了数学的悟性和技能，那正是作者的初衷。

国际数学联盟（IMU）把2000年定为“世界数学年”，并且制订了如下宗旨：

“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解。”

本书按上述宗旨献给广大的数学爱好者和“数学不爱好者”。我相信，你读了这本书之后就会与别人争辩说，数学绝不像有些人传说的那样枯燥乏味。如果你原不是一位数学爱好者，当你看完这本书，数学的面具被你亲手揭掉之后，你已经由一个数学的疏远者变成了数学爱好者了。但愿本书是你永远的好朋友。

作者学识浅薄，文字工夫亦不深，不敢说写作愿望已经达到，盼请读者与同行批评。

本书第一次印刷发行告罄，今做修订增补出第二版，以应读者之需。根据读者与科学出版社编辑的意见，进行了全面修正、润色、精炼。在此对关心本书的诸位同志与众读者深表谢忱。

王树禾

2004年7月于

中国科学技术大学

目　录

总序

前言

1 算术篇………… 1

1.1 从 2+2=4 谈起………… 1

1.2 +－×÷工艺展品………… 4

1.3 算术的基因和基理………… 6

1.4 整数见闻………… 10

1.5 张丘建百钱买百鸡………… 15

1.6 清点太阳神的牛群………… 18

1.7 数学之神阿基米德………… 20

1.8 草地与母牛的牛顿公式………… 22

1.9 除法中的余数不可小看………… 25

1.10 韩信点兵,多多益善………… 28

1.11 素数的故事………… 32

1.12 生产全体素数………… 38

1.13 算术小魔术………… 40

1.14 自然数三角阵揭秘………… 44

1.15 一种加法密码………… 47

2 几何篇………… 50

2.1 无字数学论文………… 50

2.2 蜂巢颂………… 58

2.3 蝴蝶定理………… 61

2.4 拿破仑三角形………… 63

2.5 高斯墓碑上的正17边形………… 68

2.6 椭圆规和卡丹旋轮………… 71

2.7 阿尔哈达姆桌球………… 74

2.8 费尔巴哈九点圆………… 77

2.9 倍立方问题的丝线解法………… 78

2.10 现代数学方法的鼻祖笛卡儿………… 80

2.11 三等分角的阿基米德纸条………… 82

2.12 化圆为方的绝招………… 84

2.13 逆风行舟………… 87

2.14 天上人间怎么这么多的圆和球………… 89

2.15 平面几何定理为什么可以机器证明………… 92

2.16 勾三股四弦五精品展………… 98

2.17 雪花几何………… 103

2.18 最优观点与最大视角………… 106

2.19 切分蛋糕………… 108

2.20 人类首席数学家………… 110

2.21《几何原本》内容提要与点评………… 112

2.22 黄金矩形系列………… 116

2.23 捆绑立方体………… 118

2.24 立方装箱与正方装箱问题………… 120

2.25 巧测砖块对角线………… 122

2.26 糕点售货员的打包技术………… 123

2.27 三角形的内角和究竟多少度………… 125

2.28 罗巴切夫斯基的想像几何学………… 129

2.29 伟大的数学革新派罗巴切夫斯基………… 137

2.30 细胞几何学………… 139

2.31 蚂蚁的最佳行迹………… 142

3 图论篇………… 146

3.1 美丽图论………… 146

3.2 人们跑断腿,不如欧拉一张图………… 147

3.3 数学界的莎士比亚………… 150

3.4 图是什么………… 151

3.5 两个令人失望的猜想………… 153

3.6 握手言欢话奇偶………… 154

3.7 馋嘴老鼠哪里藏………… 156

3.8 一辆车跑遍村村寨寨………… 157

3.9 没有奇圈雌雄图………… 158

3.10 树的数学………… 160

3.11 一共生成几棵树………… 162

3.12 生成一棵最好的树………… 164

3.13 树上密码………… 165

3.14 追捕逃犯………… 168

3.15 乱点鸳鸯谱………… 170

3.16 错装了信笺………… 171

3.17 瓶颈理论和婚配定理………… 172

3.18 中国邮路………… 177

3.19 周游世界………… 182

3.20 贪官聚餐………… 186

3.21 正20面体上的剪纸艺术………… 188

3.22 国际象棋马的遍历………… 189

3.23 又是贪官聚餐………… 191

3.24 天敌纵队和王………… 193

3.25 图能摆平吗………… 195

3.26 多面体黄金公式………… 196

3.27 正多面体为何仅五种………… 197

3.28 非平面图的两个疙瘩………… 199

3.29 彩色图,不仅为了美………… 202

3.30 五色定理和肯普绝招儿………… 204

1 算术篇

数学是科学的女皇，而算术则是数学的女皇。

——高斯

1.1 从 2+2=4 谈起

一位聪明天真的小朋友问他的妈妈："为什么 2 加 2 等于 4?"妈妈答："傻孩子，连这么简单的算术都不懂!"于是这位母亲伸出左手的两个指头，又伸出右手的两个指头，左右的两个指头往一起一并，说："这就叫 2 加 2，你数一数，看是不是 4?"孩子勉强点头，接着又问："可是 4 是什么玩意儿呢?"妈妈欲言而无语。是呀，如果母亲说这些指头的数目就叫做 4，孩子再追问什么叫做 999999999，那可就不好用指头之类的东西来比划着解释了!

事实上，反思我们小时候对加法的学习，确实是非理性的，完全是老师和家长向我们的脑子里灌进去而记住了的七加八一十五，七加五一十二之类的指令而已;认真思考起来，究竟每个自然数是如何定义的，加法是什么，为什么 $2+2=4$，$4+4=8$，等等，确实是一个严肃的数学问题。

原始人已有自然数的原始概念，他们用小石头来记录捕捉的猎物的个数(或用"结绳记事"法)。有人捕来一只野兔，他们就在小坑

里放上一颗石子,又有人捕来一只野兔,他们就在小坑中又投放一颗石子,等等。事实上,这逐一地向小坑中投石子的过程恰是加法运算的真谛,投一颗石子就叫做加上 1,1 加 1 得到的数量就叫做 2,2 再加 1 得到的数量就叫做 3,等等。再后来,人们发现了加法的结合律,即 $1+1+1+1=(1+1)+(1+1)$,等等。公元 6 世纪,印度数学家引入零的符号"0",它是自然数的"排头"。到了 19 世纪,皮亚诺(G. Peano, 1858～1932)提出了五条算术公理,才从理论上彻底解决了什么是自然数,为什么 $2+2=4$ 等数学上的这些基本问题,他的三个概念与五个公理是:

0,后继和自然数,以及如下五条公理:

公理 1 0是自然数。

公理 2 任何自然数的后继是自然数。

公理 3 0不是任何数的后继。

公理 4 不同的自然数后继不同。

公理 5 对于某一性质,若 0 有此性质,而且若某自然数有此性质时,它的后继也有此性质,则一切自然数都有此性质。

具体地说,0 的后继中国人叫做一,美国人叫做 one,1 的后继中国人叫做二,美国人叫做 two,等等。第五公理谈的是数学归纳法。一个自然数生出它的后继的过程是加法,记成 $0+1=1, 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, n+1=(n+1)$,等等。

由皮氏的公理可以明确无误地回答什么是自然数的问题,例如 4 是什么? 答:4 是 3 的后继,或曰 4 是 3 之"子",3 呢? 3 是 2 的后继,2 呢? 2 是 1 的后继,1 呢? 1 是 0 的后继,0 呢? 0 是祖宗,它不是谁的后继,是自然数的发源点。

$2+2=4$ 证明如下:

因为 $1+1=2$,所以 $2+2=(1+1)+(1+1)$,由结合律得

$$2+2=(1+1)+(1+1)=(1+1+1)+1$$

又因 $1+1+1=(1+1)+1=2+1=3$
所以 $2+2=3+1$，而 $3+1=4$，故知 $2+2=4$ 是正确的。

证毕。

有了加法的概念，减法是加法的逆运算，乘法则是几个数连加的“简写”，除法是乘法的逆运算。可见，从皮氏公理出发已经把 $+$ $-$ $\times$ $\div$ 的概念弄得水落石出，不再是那种原始的直观感觉（例如结绳记事）或死记的九九表了。

查阅《现代汉语词典》上加法词目，词典称：“加法 jiāfǎ，数学中的一种运算方法，两个或两个以上的数合成一个数的方法。”这种解释实在科学，例如它只说“合成一个数”，并不说这个数（我们称其为和）是多少。事实上，现代数学对于 $1+1$ 的和未必总是算出 2 来的。遥想原始人怎样形成数量的概念，最初只是“有”与“无”两个概念，他们尚没有“多少”的概念和斤斤计较的坏习气。就是现代，有时也只需考虑有与无，是与否，而不必细说有多少，例如我们要写字，关心的是有笔还是没有笔，至于有笔时有几枝，那都是一回事，如果这时规定 0 代表无（或否），1 代表有（或是），则应有 $0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=1$。这个 $1+1=1$ 的算式有点不习惯，但对于此处的实际背景，如此定义加法是再合适不过了。这种 $1+1$ 不等于 2，而等于 1 的加法称为“逻辑和”，$1+1=1$，于是 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}1}=1$（$n$ 是自然数）。

再看电视机开关，你用指头捅一下，它就为你播放节目，再捅一下，它就关机了，如果把关机状态记成 0，把播放状态记成 1，则有加法法则：

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=0$$

1.2 + − × ÷工艺展品

(1)

$$
\begin{aligned}
1\times63 &= 63\\
121\times63 &= 7623\\
12321\times63 &= 776223\\
1234321\times63 &= 77762223\\
123454321\times63 &= 7777622223\\
12345654321\times63 &= 777776222223\\
1234567654321\times63 &= 77777762222223\\
123456787654321\times63 &= 7777777622222223\\
12345678987654321\times63 &= 777777776222222223
\end{aligned}
$$

道理:例如第五行的 7777622223 是这样得到的:

$$77777\times(100000-1)=7777700000-77777$$
$$=7777622223$$
$$77777\times99999=7\times9\times(11111\times11111)$$
$$=123454321\times63$$

其余各行道理相同。

(2) $(1+1+1)\times37=111$, $(5+5+5)\times37=555$,

$(2+2+2)\times37=222$, $(6+6+6)\times37=666$,

$(3+3+3)\times37=333$, $(7+7+7)\times37=777$,

$(4+4+4)\times37=444$, $(8+8+8)\times37=888$,

$(9+9+9)\times37=999$

道理:$111\div37=3$

(3) $7\times15873=111111$,　$35\times15873=555555$,

$14\times15873=222222$,　$42\times15873=666666$,

$21\times15873=333333$,　$49\times15873=777777$,

$28\times15873=444444$,　$56\times15873=888888$,

$63\times15873=999999$

道理：$111111\div7=15873$

(4) $(1+2+1)\times121=22\times22$,

$(1+2+3+2+1)\times12321=333\times333$,

$(1+2+3+4+3+2+1)\times1234321=4444\times4444$,

$(1+2+3+4+5+4+3+2+1)\times123454321$

$=55555\times55555$,

$(1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1)\times12345654321=$

666666×666666,

$(1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1)\times$

$1234567654321=7777777\times7777777$,

$(1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1)\times$

$123456787654321=88888888\times88888888$,

$(1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+$

$1)\times12345678987654321=999999999\times999999999$

道理：

$$[1+2+3+\cdots+(n-1)]+n+[(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1]$$

$$=\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}+n+\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$

$$=n^2$$

所以 $1+2+1=2^2$，$1+2+3+2+1=3^2$，…，$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1=9^2$，故(4)中各式等价于下面的(5)式。

(5) $121=11\times11$,

$12321=111\times111$,

$1234321=1111\times1111$,

$$123454321 = 11111 \times 11111,$$
$$12345654321 = 111111 \times 111111,$$
$$1234567654321 = 1111111 \times 1111111,$$
$$123456787654321 = 11111111 \times 11111111,$$
$$12345678987654321 = 111111111 \times 111111111$$

而(5)的道理是$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}} \times \underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$的竖式形如

$$\begin{array}{r}
11\cdots1 \\
\times)\ 11\cdots1 \\
\hline
11\cdots11 \\
111\cdots1 \\
\vdots\quad\ \vdots \\
1\ \cdots\ 1 \\
+)\ 11\cdots11 \\
\hline
12\ (n-1)\ n(n-1)\cdots2\ 1
\end{array}\quad 1 \leqslant n \leqslant 9$$

1.3 算术的基因和基理

算术四则运算，人人都有体会，那就是加减法简单，乘法也不太难，有个“九九歌”，背熟了去乘就是了。除法里“事儿”多，除得尽还好，除不尽还要考虑约分与余数，等等，花样不少。例如：100÷4 可以写成

$$\frac{100}{4} = \frac{2^2 \times 5^2}{2^2} = 5^2 = 25$$

我们看到，除法实质上是分子分母的约分，等到把分子分母的公共因子都约光了，剩下的就是既约分数，如果这时分母为 1，就除尽了。分子上的因子有两个 2，两个 5，这两个因子不能再变小，当然 4 和 25，或 20，也是 100 的因子，但它们还可以变小，那些不能再变小的因子，

即除了1与自身外，别的自然数除不尽的自然数，是最简单朴素的了，我们称这种数为素数(朴素的素)或质数(质朴的质)，1也是这类性质的数，但大家约定1不称为素数，因为如果让1取得素数资格，例如100则可以写成$100=1\times1\times1\times1\times1\times\cdots\times1\times2\times2\times5\times5$，前方爱写几个1就写几个1，这就很不妙，一个自然数写成素数之积的形式时，形状就不唯一了。经验表明，如果不让1参加，一个自然数若不是素数，例如100，4什么的，可以唯一地写成若干素数的积，这一结论也可以用数学归纳法证明，这就是著名的算术基本定理。

大于1的不是素数的自然数称为合数，即由若干素数相乘而成的数。

素数是合数的基因，任给大于1的自然数N，存在唯一的素数列$P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_n$，使得$N$唯一地写成$N=P_1P_2\cdots P_n$，此定理是算术的基本定理，算术中很多证明，尤其是涉及除法时，主要靠这条结论去说理。

如果N是合数，则$N=P_1{}^{\alpha_1}P_2{}^{\alpha_2}\cdots P_m{}^{\alpha_m}$，$m\geqslant1$，$P_1, P_2, \cdots, P_m$是互异素数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是正整数，其中$P_1<P_2<\cdots<P_m$，则显然$P_1\leqslant\sqrt{N}$。据此，我们可以用下面的所谓“筛法”筛出不超过$N$的一切素数。这种筛法是希腊的埃拉托色尼(Eratosthenes)发明的，以$N=30$为例，说明筛法的操作如下：

由于不超过N的合数的最小素因子不超过$\sqrt{N}$，因此欲求不超过N的一切素数，只需把$1, 2, \cdots, N$中不超过$\sqrt{N}$的素数的倍数划去(筛除)，剩下的就是素数。

1, 2(○), 3(□), ④, 5(△), ⑥, 7, ⑧, [9], ⑩, 11, ⑫, 13, ⑭, [15], ⑯,

17, ⑱, 19, ⑳, [21], ㉒, 23, ㉔, △25, ㉖, [27], ㉘, 29, ㉚

$\sqrt{30}<6$，所以只考虑划去2, 3, 5的倍数，剩的是不超过30的那些素数：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29。

显然,这种方法只能写出不超过 N 的自然数中素数的清单, N 后面的自然数中还有不少素数,例如30之后的31就是。欧几里得第一个证明,素数的个数是无穷的。

事实上,若所有素数为 $P_1, P_2, \cdots, P_k$,取 $N = P_1 P_2 \cdots P_k + 1$, $N > 1$,设 N 本身是素数, N 能除尽 $P_1 P_2 \cdots P_k + 1$(商为1),又 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 是所有素数,则 N 是某个 P_i, $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$,于是 N 能除尽 $P_1 P_2 \cdots P_k$, $P_1 P_2 \cdots P_k + 1$ 被 N 除余1,与 $N = P_1 P_2 \cdots P_k + 1$ 矛盾。若 N 是合数,则 N 有一个素数因子 P,于是 $P = P_i$, $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, P 能除尽 $P_1 P_2 \cdots P_k$,不能除尽 $P_1 P_2 \cdots P_k + 1$,即 P 不能除尽 N,与 P 是 N 之因子矛盾,可见全体素数不是有限个。

素数既然是算术中的基因,几乎所有的算术命题当中,都有素数参与其中,有关素数的命题集中了算术学科的难点。广为人知的难题很多,例如下面两个就是算术中难题的代表。

(1) 关于孪生素数的黎曼猜想:孪生素数有无穷个

所谓孪生素数,即相差为2的一对素数,例如(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),等等。

至今无人能证明或反驳这一猜想。

(2) 哥德巴赫猜想

1742年6月7日,圣彼得堡中学教师,德国人哥德巴赫(Goldbach)给瑞士数学家欧拉写信提出如下猜想:

每个大于或等于6的偶数都是两个素数之和;每个大于或等于9的奇数都是三个素数之和。

两素数之和当然是偶数,但是事情让哥德巴赫反过来一提,可就给数学界惹来了天大的麻烦。欧拉给哥德巴赫的回函中说:"我不能证明它,但是我相信这是一条正确的定理。"欧拉无能为力的问题,别人怕是很难解决了。在其后的150多年当中,多少专业的和业余的数论工作者,都兴趣盎然地冲击这一看似真实的命题,无奈人人不

得正果。1900 年，数学界的领袖人物希尔伯特（Hilbert）在巴黎召开的世界数学家大会上向 20 世纪的数学家提出 23 个待解决的名题，其中哥德巴赫猜想列为第八问题。可惜 20 世纪的百年奋斗仍然辜负了希尔伯特的期望。

奉劝阅历尚浅、热情十足的年轻朋友，不可受某些不懂数学的记者们的误导，随便立志以攻克哥德巴赫猜想为己任，而应当从实际出发，打好坚实的数学理论基础，培养数学研究的能力，再来考虑攀登高峰的问题。

这里面对的是一个数学问题，不能沿用物理学家诉诸反复若干次实验来证实的办法，例如有人对不超过 33×10^6 的偶数逐一验证，哥德巴赫猜想都是成立的，但那仍然不能解决问题。

下面是近百年来关于哥德巴赫猜想的大事记。

1912 年，数学家朗道提出相近的弱猜想：

存在一个自然数 M，使得每个不小于 2 的自然数皆可表成不超过 M 个素数之和。

此猜想于 1930 年证明为真；如果 $M\leqslant3$ 就好多了。

1937 年，苏联数学家维诺格拉多夫证明了哥德巴赫猜想的后半句为真，即大于或等于 9 的奇数是三个素数之和，这是关于哥德巴赫问题的重大突破，引起了不小的轰动。但前半句至 2000 年基本上未被解决。

我们约定：命题“大于等于 6 的偶数可表成 α 个素数之积加上 β 个素数之积”记成 $(\alpha+\beta)$，则哥德巴赫问题是：证明或反驳 $(1+1)$。

1920 年，朗道证明了 $(9+9)$。

1924 年，拉德马哈尔证明了 $(7+7)$。

1932 年，依斯特曼证明了 $(6+6)$。

1938 年，布赫塔布证明了 $(5+5)$。

1938 年，华罗庚证明了几乎所有的偶数都成立 $(1+1)$。

1940 年，布赫塔布等证明了(4 + 4)。

1947 年，雷尼证明了(1 + α)。

1955 年，王元证明了(3 + 4)。

1957 年，小维诺格拉多夫证明了(3 + 3)。

1957 年，王元证明了(2 + 3)。

1962 年，潘承洞证明了(1 + 5)。

1962 年，潘承洞、王元证明了(1 + 4)。

1965 年，布赫塔布、小维诺格拉多夫、邦比尼证明了(1 + 3)。

1966 年，陈景润证明了(1 + 2)，于 1973 年发表。

尽管(1 + 2)离(1 + 1)只“一步之遥”，但一步登天的事谈何容易！从陈景润搞出(1 + 2)至今已有 30 多年，一直没有人在这个阵地上前进半步，我国的陈景润仍然是此项世界纪录的保持者。

培养出如陈景润这样杰出的数学家，不但具有广深扎实的数学素质，而且具有全身心奉献科学事业的品质，乃是我们教育工作者的一项重要责任。

1.4 整数见闻

(1) 完全数

6 这个数人人喜欢，它代表吉祥如意，神话上说至高无上的宇宙之神在六天之内创造万物，第七天休息，从此有一周七天，星期日休息的作息制。从数学上看，6 有三个数能除尽它：1, 2, 3, 1 + 2 + 3 恰为 6。称一个自然数为完全数，如果它的全体因数(含 1 不含该数本身)之和恰等于这个数。例如

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

28 是第二个完全数。完全数和完美无缺的人一样是十分罕见的。从欧几里得开始起，几千年的研究仍然没有搞清楚有没有奇数完全数。到 1996

年,人们具体写出了 34 个完全数, 例如 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128 等。后面的完全数都非常之大。例如,1936 年美国联合通讯社播发了一条令外行人瞠目结舌的新闻,《纽约先驱论坛报》报道说:"S. I·克利格(Kireger)博士发现了一个 155 位的完全数 $2^{256}(2^{257}-1)$,该数是:2681561585988519419914804999641169225495873164118478675544712288744352806014697816151451128013838328439505502846511883172284212505985368230885938488252825б。这位博士说,为了证明它确为完全数,足足奋斗了五年之久。"这位博士也真够孤陋寡闻和盲目行事的了。实际上两千多年前,欧几里得已经告诉大家 $2^{n-1}(2^n-1)$是完全数,其中 n 是正整数,后经欧拉严格证明,欧几里得公式是正确的。数学家应当当心,自己发现的可能是块"旧大陆",并非什么新成就。

(2) 亲和数

220 的约数是

$$1,2,5,11,4,10,22,20,44,55,110$$

284 的约数是

$$1,2,71,4,142$$

220 的约数之和为

$$1+2+5+11+4+10+22+20+44+55+110=284$$

284 的约数之和为

$$1+2+71+4+142=220$$

这里甲数约数之和等于乙数,乙数约数之和等于甲数,这样的甲乙两数称为亲和数,这两个数虽不是完全数,但交替后则两全其美,正如毕达哥拉斯所言:"朋友即另一自我,犹如 220 与 284 一样。"

在 A.H·贝勒著,谈祥柏译的《数论妙趣》一书中给出了一个 28 节的亲和圈

$$v_1 v_2 v_3 \cdots v_{27} v_{28} v_1$$

其中

$v_1=14316$, $v_2=19116$, $v_3=31704$, $v_4=47616$,

$v_5=83328$, $v_6=177792$, $v_7=295488$, $v_8=629072$,

$v_9=589786$, $v_{10}=294896$, $v_{11}=358336$, $v_{12}=418904$,

$v_{13}=366556$, $v_{14}=274924$, $v_{15}=275444$, $v_{16}=243760$,

$v_{17}=376736$, $v_{18}=381028$, $v_{19}=285778$, $v_{20}=152990$,

$v_{21}=122410$, $v_{22}=97946$, $v_{23}=48976$, $v_{24}=45946$,

$v_{25}=22976$, $v_{26}=22744$, $v_{27}=19916$, $v_{28}=17716$

我们仍约定，自然数的因数中含 1 不含该自然数本身，则 v_1 因数之和等于 v_2，v_2 因数之和等于 v_3，…，v_{28}因数之和等于 v_1，这是一种周期为 28 的一个循环亲和圈，28 也是一个好数，它是第二个完全数。

(3) 勾股数

我国数学名著《周髀算经》中载有名句："句(勾的古写)广三，股修四，径隅五。"说的是勾三股四弦五，即 3, 4, 5 是一个直角三角形三边之长，它们满足方程 $x^2+y^2=z^2$，称满足此方程的三个正整数为勾股数。公元 263 年，刘徽给出四组勾股数 $\{5, 12, 13\}$，$\{8, 15, 17\}$，$\{7, 24, 25\}$，$\{20, 21, 29\}$。

$$x=k(m^2-n^2),\quad y=2kmn,\quad z=k(m^2+n^2)$$

是勾股数，其中 k, m, n 是正整数，$m>n$。事实上，$x^2=k^2(m^4+n^4-2m^2n^2)$，$y^2=4k^2m^2n^2$，则有

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= k^2[m^4+n^4-2m^2n^2+4m^2n^2] \\ &= k^2[m^4+n^4+2m^2n^2] \\ &= k^2(m^2+n^2)^2=z^2 \end{aligned}$$

所以 $\{x, y, z\}$ 是勾股数。

容易证明，每组勾股数皆可表成这种形式。

勾三股四弦五提示我们想到这样的问题：直角三角形的三条边长是连续整数的除了{3, 4, 5}之外还有吗？直角边是连续整数的情形有哪些？

若 $x=m^2-n^2, y=x+1=2mn, z=x+2=m^2+n^2$
是勾股弦，则求得 $m^2=x+1, n^2=1$，于是 $2mn=m^2, 2n=m=2$，因此 $x=3, y=4, z=5$，可见勾股数是连续整数的情况唯有{3, 4, 5}。

但是，勾股数$\{x, y, z\}$中，$|x-y|=1$ 的情形则有无穷多种，例如

{3, 4, 5}, {20, 21, 29}, {119, 120, 169}, {696, 697, 985}, {4059, 4060, 5741}, {23660, 23661, 33461}, {137903, 137904, 195025}, {803760, 803761, 1113689}, {4684659, 4684660, 6625109}, {27304196, 27304197, 38613965}, 等等。

按三角形最短直角边大小排序第 100 个$|x-y|=1$ 的勾股数为$\{x, y, z\}$

{21669693148613788330547979729286307164015202768699465346081691992338845992696, $x+1$, 30645573943232956180057972969833245887630954508753693529117371074705767728665}

x 与 y 如此之大，仅仅相差 1，其比值几乎是 1，可见相应的直角三角形和等腰直角三角形已经十分相似了。

上面考虑的是方程 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数解。这使我们自然想到 $x^n+y^n=z^n$ 的正整数解，其中 $n>2$. 1673 年法国数学家费马提出如下猜想：

当 $n>2$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 无正整数解。费马(P. Fermat, 1601～1665)在古希腊数学家丢番图(Diophatus, 公元前 1～3 世纪人)《算术》一书的空白处写道：“把任何高于 2 次的幂分成两个同次幂是不可能的，对此，我已找到一个巧妙的证明，但此处纸边太窄，无法写

出。"后人称此猜想为费马大定理。费马去世后，后人整理他的遗稿时，只找到了 $n=4$ 情形的证明。人们对费马在《算术》上写的话是否是谎言，莫衷一是。

后来，欧拉对 $n=3$ 证明了费马猜想。19 世纪，法国科学院悬赏征解费马大定理，大数学家勒让德(Legendre)和狄利克雷(Dirichlet)证明了 $n=5$ 的情形，费马大定理成立；雷蒙(Lame)和狄利克雷又证明了 $n=7$ 的情形，费马大定理成立；到 20 世纪 70 年代，已经把使费马大定理成立的指数 n 证明到 10 万以上。在冲击费马大定理的历史上，有两个大数学家在它面前跌过跤，出过丑，一个是为微积分的严格化建功立业的数学家柯西(Cauchy)，他向法国科学院提交了证明费马大定理的论文，几周后他自己觉得证明不成功又要回了自己的文章；一个是日本数学家功岗，他在 20 世纪 70 年代宣称证明了费马大定理，世界各大通讯社都正式报道了这一消息，日本乃至全世界都为之轰动。但他的论文的归宿与柯西的何其相似，也是几周之后，功岗自己收回了那篇错误的证明文章。

1993 年 6 月，在英国剑桥牛顿数学研究所的一个讨论班上，美国普林斯顿大学的怀尔斯(A. Wiles)做了三场演讲，他最后宣布证明了费马大定理，而且还进一步证明 $x^n+y^n=z^n(n\geqslant3)$没有非零有理数解。第二天，《纽约时报》头版头条报道了这一轰动全球科学界的消息，配发了费马的照片，怀尔斯与克林顿、戴安娜一起列入 1993 年最令人敬仰的人物之一。戏剧性的情节又发生了，6 个月之后，怀尔斯发出电子邮件，承认了自己的证明中有漏洞。值得庆幸的是，这一次怀尔斯没有像柯西和功岗那样栽跟斗。1994 年 10 月 25 日，INT 网上传出喜讯，怀尔斯的关于费马大定理的证明文章已修正定稿，该定理被彻底证明，它是 20 世纪最出色的科学成就之一。

怀尔斯的文章长达 200 多页，是他单枪匹马进行了 7 年艰苦研究的结晶。怀尔斯是一个"为数学而数学"的忠实信仰者，他声称：

“我肯定不希望看见数学沦为应用的仆人，因为这甚至不符合应用自身的利益；费马大定理本身不可能有什么用途。”《科学》(中文版，1994，第2期)豪根(Horgan)著文问道：“费马大定理的证明是不是一种正在消逝的文化的最后挣扎呢？”怀尔斯“是一位杰出的遗老吗？”他说：“怀尔斯避开了计算机和应用及其他种种令他讨厌的东西，但是，将来怀尔斯式的人物会越来越少。”看起来，对纯数学中的古典疑难问题的研究以及为之处心积虑手写超长证明已经厌倦的数学家确实大有人在。数学家瑟斯顿(Thurston)说得更难听：“把数学在原则上简化为形式证明是20世纪所特有的一个不可靠的念头，高度形式化的证明比那些借助更直观的证明更有可能出毛病，”“集论是建立在有礼貌的谎言的基础之上的。我们赞同这些谎言，即使我们知道它不是真的。数学的基础在某些方面有点不现实的味道。”贝尔实验室的科学家格拉哈姆(R. L. Graham)说：“背离传统的证明的潮流或许是不可避免的。单靠人的思维无法证明的东西是一片汪洋大海，与这片大海比起来，你能够证明的东西，或许只是些孤零零的小岛，一些例外情况而已。”本书作者对豪根，瑟斯顿和格拉哈姆的观点并非抱完全否定的态度。

1.5 张丘建百钱买百鸡

中国古代数学家张丘建在名著《张丘建算经》中提出下面的百鸡问题：

“鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一。百钱买百鸡。问鸡翁、鸡母、鸡雏各几何？”

张丘建生卒年代已不可考，唯知《张丘建算经》为我国古代十大算经之一，在隋朝该书已广为流传(与之齐名的另外九部算经是：《周髀算经》、《九章算术》、《数术记遗》、《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算

径》、《五曹算经》、《五经算术》和《缉古算经》，统称《算经十书》），是我国隋唐时代颁布的"算学"教科书，亦是当时世界最高水平的数学经典。它记载着我国古代数学的辉煌成就，是唐代数学教育家李淳风，算学博士梁述和太学助教王真儒奉皇命审定注释成册的，完成于656年。

百鸡问题的数学模型如下：设 x, y, z 分别为鸡翁、鸡母和鸡雏的数目，则 x, y, z 应满足方程组

$$\begin{cases} 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \\ x+y+z=100 \end{cases}$$

其中 x, y, z 是非负整数。

消去未知数 z，x 与 y 应满足方程

$$7x+4y=100 \tag{1.1}$$

考虑(1.1)相应的齐次方程

$$7x+4y=0 \tag{1.2}$$

的整数通解，显然 $x=-4t, y=7t$，t 是整数。由观察得知(1.1)有整数特解 $x_0=-100, y_0=200$。于是(1.1)的整数通解为

$$\begin{cases} x=-4t+x_0=-4t-100 & (1.3) \\ y=7t+y_0=7t+200 & (1.4) \end{cases}$$

我们从(1.1)的全体整数解（通解）中挑选非负整数解，欲 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$，则应有

$$\begin{cases} -4t-100 \geqslant 0 \\ 7t+200 \geqslant 0 \end{cases}$$

解此不等式组得

$$-\frac{200}{7} \leqslant t \leqslant -25$$

t 应取 $-28, -27, -26, -25$ 四个值。

由 $x+y+z=100$ 得 $z=100-x-y$，把 $t=-28, -27, -26,$

-25 代入(1.3)(1.4)得四组解(x,y,z)为

$$(12,4,84),\ (8,11,81),\ (4,18,78),\ (0,25,75)$$

一般地,在整数范围内考虑方程

$$ax+by=c \tag{1.5}$$

a,b 非零,若能看出(1.5)的一个特解 $x=x_0,y=y_0$,相应的齐次方程 $ax+by=0$ 的通解为 $x=-b_1t,y=a_1t$,其中 a_1,b_1 无公因数,且 $a_1b=b_1a$,则(1.5)的通解为

$$x=x_0-b_1t,\ y=y_0+a_1t$$

$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$

京津唐一带民间流传一道趣题如下:

一百匹马,一百块瓦,大马驮仨,中马驮俩,小马驹子俩驮一块,问大马、中马和马驹各几匹?

这一问题的数学模型如下:

设 x,y,z 分别是大马、中马和马驹数,则

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+2y+\dfrac{1}{2}z=100 \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 x,y,z 是非负整数。

消去未知数 z 得

$$5x+3y=100 \tag{1.7}$$

(1.7) 有特解 $x_0=14,y_0=10.5x+3y=0$ 有通解

$$x=-3t,\quad y=5t$$

于是(1.6)的通解是

$$x=-3t+14,\quad y=5t+10$$

由 $x\geqslant0,y\geqslant0$ 得

$$-3t+14\geqslant0,5t+10\geqslant0,$$

$$-2\leqslant t\leqslant\frac{14}{3}$$

t 可以取值为 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$，相应的解 (x, y, z) 为

$(20,0,80)$，$(17,5,78)$，$(14,10,76)$，$(11,15,74)$，

$(8,20,72)$，$(5,25,70)$，$(2,30,68)$

我们看到的 $x^2+y^2=z^2$ 和 $ax+by=c$ 在正整数或非负整数范围内的解不唯一，这种解不唯一的方程称为不定方程或丢番图方程。

1.6 清点太阳神的牛群

1773 年，有人发现了一册宝贵的古希腊文献的手抄本，上面记载了所谓"阿基米德分牛问题"，阿基米德曾把这一问题送给古希腊亚力山大城的天文学家厄拉多塞尼，向这位亚力山大的名人挑战。

分牛问题转述如下：

西西里岛的草地上，太阳神的牛群中有公牛也有母牛，公牛母牛都是白、黑、花、棕四种毛色；白色公牛多于棕色公牛，多出的头数是黑色公牛的 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$；黑色公牛多于棕色公牛，多出的头数是花公牛的 $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$；花公牛多于棕色公牛，多出的头数是白色公牛的 $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$；白色母牛是黑牛的 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$；黑色母牛是花牛的 $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$；花母牛是棕色牛的 $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$；棕色母牛是白色牛的 $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$。

朋友，如果你自恃还有几分聪明，请准确无误地清点太阳神的牛群，看各色公牛与母牛各是几头？

上述分牛问题的数学模型如下：

设 x_1, y_1, z_1, t_1 分别是白、黑、花、棕四色公牛的头数，x_2, y_2, z_2, t_2 分别是白、黑、花、棕四色母牛的头数。则这八个未知数应满足

不定方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - t_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) y_1 & (1.8) \\
y_1 - t_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) z_1 & (1.9) \\
z_1 - t_1 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) x_1 & (1.10) \\
x_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(y_1 + y_2) & (1.11) \\
y_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(z_1 + z_2) & (1.12) \\
z_2 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(t_1 + t_2) & (1.13) \\
t_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(x_1 + x_2) & (1.14)
\end{cases}
$$

(1.8),(1.9),(1.10)是关于 x_1, y_1, z_1, t_1 的不定方程组,之中无 x_2, y_2, z_2, t_2 参与,可以独立求解;之后,再把 x_1, y_1, z_1, t_1 代入(1.11),(1.12),(1.13),(1.14)。由(1.8),(1.9),(1.10)得

$$x_1 = \frac{742}{297} t_1, \quad y_1 = \frac{178}{99} t_1, \quad z_1 = \frac{1580}{891} t_1$$

由于 $\frac{742}{297}$, $\frac{178}{99}$, $\frac{1580}{891}$ 都是既约分数,所以 t_1 能被 99, 297 和 891 除尽,故应取 $t_1 = 891t$, t 是正整数,这时

$$x_1 = 2226t, \quad y_1 = 1602t, \quad z_1 = 1580t, \quad t_1 = 891t \qquad (1.15)$$

把(1.15)代入(1.11),(1.12),(1.13),(1.14)得

$$
\begin{cases}
12x_2 - 7y_2 = 11214t & (1.16) \\
20y_2 - 9z_2 = 14220t & (1.17) \\
30z_2 - 11t_2 = 9801t & (1.18) \\
42t_2 - 13x_2 = 28938t & (1.19)
\end{cases}
$$

由(1.16),(1.17),(1.18),(1.19)解得

$$x_2=\frac{7206360}{4657}t,\quad y_2=\frac{4893246}{4657}t$$

$$z_2=\frac{3515820}{4657}t,\quad t_2=\frac{5439213}{4657}t$$

由于$\frac{7206360}{4657}$是既约分数，所以可令 $t=4657\tau$，其中 τ 是正整数。于是得各种牛的数目为

$x_1=10366482\tau$, $y_1=7460514\tau$, $z_1=7358060\tau$, $t_1=4149387\tau$;

$x_2=7206360\tau$, $y_2=4893246\tau$, $z_2=3515820\tau$,

$t_2=5439213\tau$; $\tau=1,2,3,\cdots$

即使 $\tau=1$，太阳神的牛最少也有 50389082 头，小小西西里岛岂能容得下 5000 多万头牛，显然这是天才的阿基米德为了戏弄厄拉多塞尼等人而杜撰的数学游艺题；从题文也可看出破绽，其已知数据为$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，实际问题哪会有这么凑巧的已知数据。在本题的假设之下，各种牛的最少头数为：

白公牛：10366482，白母牛：7206360，
黑公牛：7460514，　黑母牛：4893246，
花公牛：7358060，　花母牛：3515820，
棕公牛：4149387，　棕母牛：5439213。

1.7 数学之神阿基米德

阿基米德(Archimedes，公元前 287～前 212)出生在西西里岛的叙拉古地区一个科学世家，父亲是当时有名的数学家和天文学家，阿基米德就读于亚历山大大学，是欧几里得学生的学生。他的许多学术成果是通过与亚历山大学者们的通信保存下来的。他的贡献涉及数学、力学和天文学等领域，传世的科学著作不少于 10 种，其中含有

众多创造性的发现。例如《论球与圆柱》、《论螺线》、《论劈锥曲面体与球体》、《抛物线求积》、《论浮体》、《论杠杆》、《论重心》、《论平板的平衡》等等，其中有不少内容是永远闪光的精彩作品，例如《论球与圆柱》中有下列定理：

①球面积等于大圆面积的4倍。

②以球的大圆为底，球直径为高的圆柱体积等于球体积的$\frac{3}{2}$，其表面积是球面积的$\frac{3}{2}$。

阿基米德十分欣赏他得到的这个双$\frac{3}{2}$的和谐优美的定理，留有遗嘱要后人在他的墓碑上刻上圆柱的内切球，后人果真遵嘱实现了他的遗言。

在《论螺线》中，阿基米德定义了一种漂亮的螺线，这种阿基米德螺线的表达式为

$$\rho = a\theta$$

其中 $a>0$，θ 是转角(弧度制)，ρ 是动点向径，则从原点出发逆时针旋转一周后动点到达 A 点，见图1-1，阿基米德证明图中阴影区面积 S 是以 OA 为半径的圆面积的$\frac{1}{3}$，即

$$S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 = \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

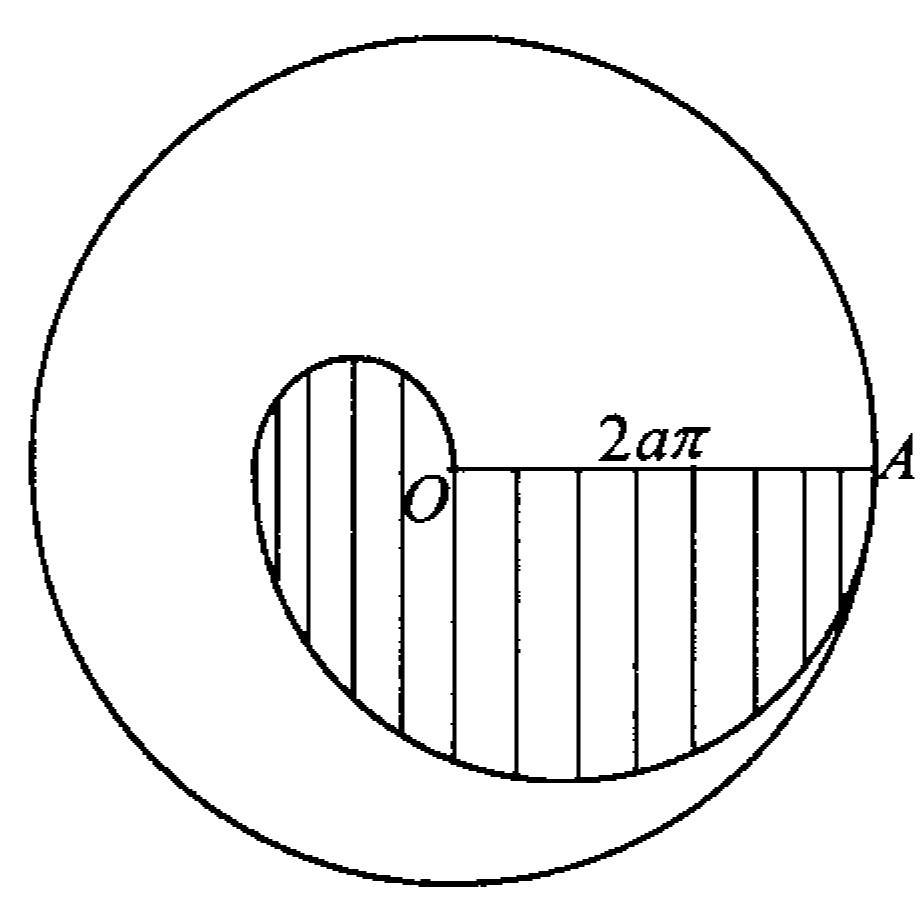


图 1-1

在《论杠杆》中，阿基米德风趣地比喻说："给我一个立足点，我可以移动这个地球。"以此来向人们阐明杠杆的省力原理。

他的著作当中，熟练的计算技巧与严格的证明融为一体，是古代数学当中精确性与严格性相统一的典范，是古代精确科学所达到的

顶峰。

叙拉古的国王亥洛是阿基米德的好朋友，据传国王亥洛令人制作了一顶王冠，他怀疑王冠不是纯金的，匠人掺了假，有一些银子熔在里边。国王无法找到真凭实据，只好请教多才善算的阿基米德来解决这一难题。阿基米德也是首次遇到如此棘手的问题，他反复思考多日，一天，阿基米德洗浴，突获灵感，赤身跑出浴池大呼“我找到(办法)了，我找到了。”他用阿基米德浮力原理解决了王冠问题。

阿基米德在《论砂粒》一文中涉及相当于 10^{68} 和 $2^{10^{17}}$ 这样巨大的数，他已经明确指出没有最大的数，他说，无论多大的数都可以表示出来，他已经有了极限的思想。

阿基米德不仅是理论家，而且是实验科学家和技术专家。例如，他制造的大型透镜曾聚焦焚毁了罗马入侵者的战船，创造的投掷机把攻城敌兵打得落荒而逃，还发明过提水灌田的水泵等机械。

阿基米德是一位超凡的学者，17 岁就成了有名的科学家，他专心致志，乐以忘忧。第二次布匿战争中，罗马士兵攻占了叙拉古，冲进他家的院子，当时他正聚精会神在沙盘上研究几何图形，当罗马士兵逼近他时，他忙站起来要求来者不要干扰他的思路，而这个罗马士兵竟举刀砍杀了这位科学巨人的头颅!

数学史家普列尼在《自然史》中称阿基米德是“数学之神”，他与牛顿、欧拉、高斯并称“数坛四杰”。

1.8 草地与母牛的牛顿公式

1707 年，牛顿提出如下草地与母牛问题：

假设每头母牛每天食草量不变，每两头母牛每天食草量相等；每块草地每天长草量不变，每两块草地每天长草量相等，每块草地最初的草量一致。而且已知：

a_1 头母牛在 c_1 天之内把 b_1 块草地上的草吃光了;

a_2 头母牛在 c_2 天之内把 b_2 块草地上的草吃光了;

a_3 头母牛在 c_3 天之内把 b_3 块草地上的草吃光了。

问 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 有何关系。

令每块草地最初的草量为 M,每块草地每日长草量为 m,每头牛每日食草量为 q。

第 c_1 天晚上 b_1 块草地上的草被 a_1 头牛吃光,这一事实可以表成

$$b_1M + c_1b_1m - c_1a_1q = 0 \tag{1.20}$$

同理可得

$$b_2M + c_2b_2m - c_2a_2q = 0 \tag{1.21}$$

$$b_3M + c_3b_3m - c_3a_3q = 0 \tag{1.22}$$

从(1.20),(1.21)解得

$$M = \frac{c_1c_2(a_1b_2 - b_1a_2)}{b_1b_2(c_2 - c_1)}q, \quad m = \frac{b_1c_2a_2 - b_2c_1a_1}{b_1b_2(c_2 - c_1)}q$$

代入(1.22)得

$$\frac{c_1c_2(a_1b_2 - b_1a_2)}{b_1b_2(c_2 - c_1)}qb_3 + \frac{b_1c_2a_2 - b_2c_1a_1}{b_1b_2(c_2 - c_1)}qc_3b_3 - c_3a_3q = 0$$

$$b_3c_1c_2(a_1b_2 - b_1a_2) + c_3b_3(b_1c_2a_2 - b_2c_1a_1) - c_3a_3b_1b_2(c_2 - c_1) = 0$$

$$\begin{aligned} &a_1b_2b_3c_1c_2 - a_2b_1b_3c_1c_2 + a_2b_1b_3c_2c_3 \\ &- a_1b_2b_3c_1c_3 + a_3b_1b_2c_1c_3 - a_3b_1b_2c_2c_3 = 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

(1.23)可以用下面的格式表示,见图 1-2。

把(1.20),(1.21),(1.22)的系数排成三行,构成一个 3×3 的行列方块,实线串起来的三个数(右下走向)相乘,虚线串起来的三个数相乘加负号,再把此六个积相加即得关系式(1.23)的左端。图 1-2 中的行列方块叫做三阶行列式,(1.23)式是此行列式的值。

牛顿的"草地母牛公式"为三阶行列式

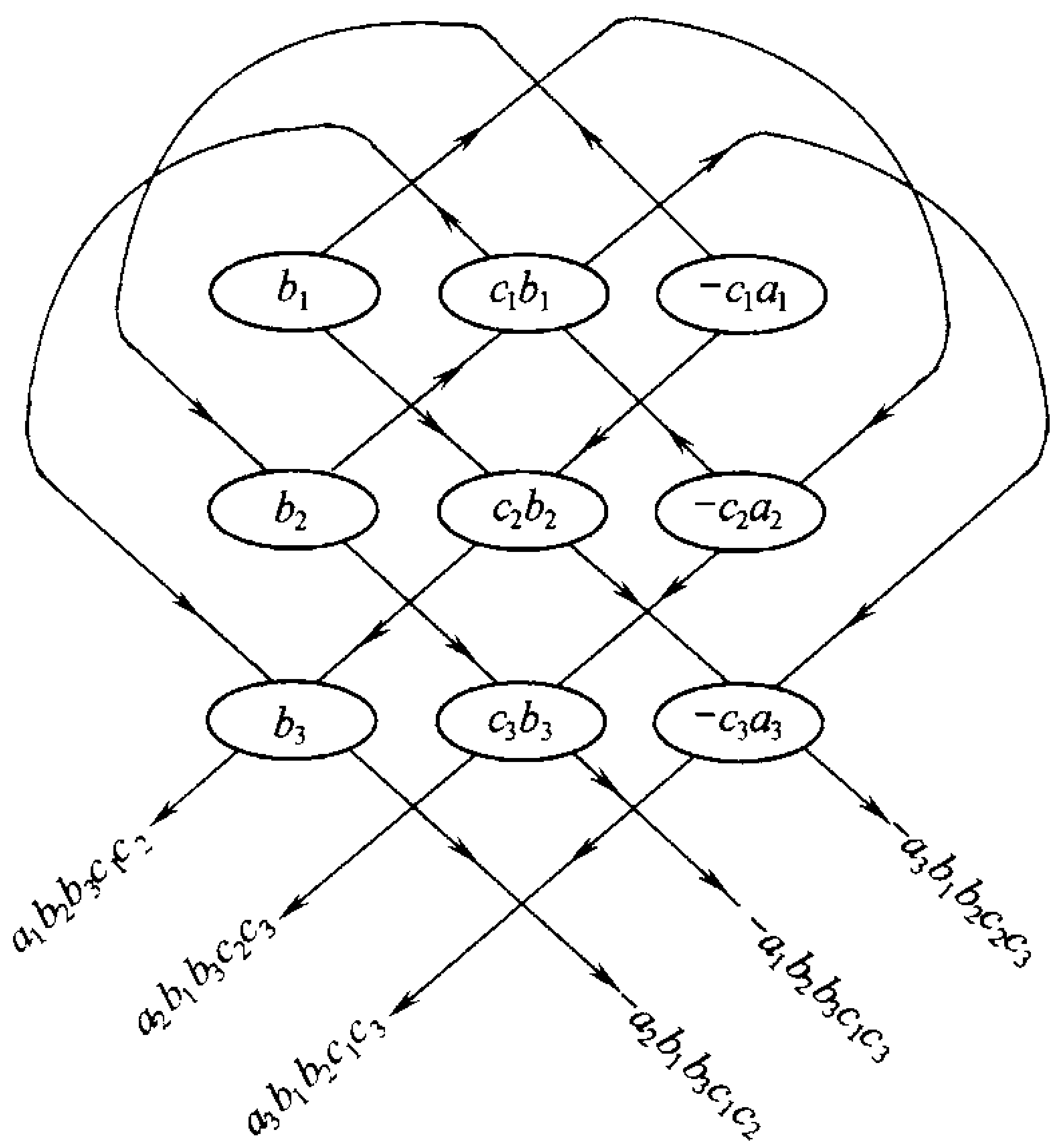


图 1-2

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1c_1 & -a_1c_1 \\ b_2 & b_2c_2 & -a_2c_2 \\ b_3 & b_3c_3 & -a_3c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.24}$$

或写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1c_1 & c_1a_1 \\ b_2 & b_2c_2 & c_2a_2 \\ b_3 & b_3c_3 & c_3a_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.25}$$

如果把(1.20),(1.21),(1.22)中的 M, m, q 视为未知数,由于 M, m, q 是正数,即(1.20),(1.21),(1.22)存在非零解;一般而言

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是系数的三阶行式为零,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

这一结论还可以推广到未知数更多的方程组。

1.9 除法中的余数不可小看

今天是星期一,是本学期的第一天,第 100 天是星期几?现在是零点,100 小时之后是几点钟,等等,对这样的一些问题我们应该有兴趣,也有实用价值和理论推广价值。$100\div 7$,商 14 余 2,余 2 就是星期二;$100\div 24$,商 4 余 4,余 4 就是 4 点钟,推而广之,若 $m\div 7$ 与 $n\div 7$ 都余 r,今天是星期一,第 m 天和第 n 天都是星期 r,$1\leqslant r\leqslant 6$,如果 $r=0$,即除尽的情形,则第 m 天与第 n 天都是星期日。可见同样的余数代表某种相同的性质。

两个整数 m, n 同被正整数 p 来除,若余数相同,则称 m 与 n 对"模" p 是同余的,记成 $m\equiv n\pmod p$。如果 $m\equiv 0\pmod p$,就是说 m 能被 p 整除。

(1) 正整数 n 能否被 3 除尽

设 $n=a_m a_{m-1}\cdots a_0$,a 是各个数位上的数码,则仅当 $a_0+a_1+\cdots+a_m$ 能被 3 除尽时,n 才能被 3 除尽。

事实上,$n=a_m 10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_1 10+a_0$,因为 10 被 3 除余 1,或写成 $10\equiv 1\pmod 3$;100 被 3 除余 1,写成 $100\equiv 1\pmod 3$,$\cdots$,$10^m\equiv 1\pmod 3$,所以 $n\equiv a_0+a_1+\cdots+a_m\pmod 3$,故若 $a_0+a_1+\cdots+a_m$ 能被 3 除尽,即 $a_0+a_1+\cdots+a_m\equiv 0\pmod 3$,则 $n\equiv 0\pmod 3$,即 n 能被 3 除尽。如果 $a_0+a_1+\cdots+a_m$ 不能被 3 除尽,则 n 不能被 3 除尽。

(2) 正整数能被 9 除尽的充要条件是其各数字之和可被 9 除尽

(3) 正整数 n 写成“千进位”形式

$n=a_m1000^m+a_{m-1}1000^{m-1}+\cdots+a_11000+a_0$，其中 $0\leqslant a_i<1000$，则 n 被 7(或 11 或 13)除尽的充要条件是

$$(a_0+a_2+a_4\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots)$$

能被 7(或 11 或 13)除尽。

事实上，由于 1000^2 被 7 除余 1，1000 被 7 除余 -1，则 1000^{2k} 被 7 除皆余 1，1000^{2k+1} 被 7 除皆余 -1(余 -1 就是余 6)。所以

$$n\equiv(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)\pmod 7$$

即仅当 $(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$ 被 7 除尽时，n 才能被 7 除尽。

同理可证，仅当 $(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$ 被 11 或 13 除尽时，n 才能被 11 或 13 除尽。

例如，123456789，由于数字和为

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

45 的数字和是 9，所以 123456789 可被 3 与 9 除尽。

而 1234567891011，由于数字和为

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+1+1=48$$

48 的数字之和为 12，12 的数字之和为 3，所以 1234567891011 能被 3 除尽，但不能被 9 除尽。

又例如 $123456=123\times1000+456$，$a_0=456$，$a_1=123$，$a_0-a_1=456-123=333$，333 不能被 7，11，13 除尽，所以 123456 也不能被 7，11，13 除尽。

同余方法还可以检验出多位数乘法的错误。

$$a=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_110+a_0$$

$$b=b_m10^m+b_{m-1}10^{m-1}+\cdots+b_110+b_0$$

$$a\cdot b=c=c_l10^l+c_{l-1}10^{l-1}+\cdots+c_110+c_0$$

则应有

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)$$
$$\equiv(c_0+c_1+\cdots c_l)(\text{mod } 9)$$

事实上

$$a\equiv(a_0+a_1+\cdots+a_n)(\text{mod } 9)$$
$$b\equiv(b_0+b_1+\cdots+b_m)(\text{mod } 9)$$
$$c\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\text{mod } 9)$$

于是

$$a\equiv 9q_1+r_1,(a_0+a_1+\cdots+a_n)=9q_2+r_1$$
$$b\equiv 9q_3+r_2,(b_0+b_1+\cdots+b_m)=9q_4+r_2$$
$$c\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l(\text{mod } 9))$$

由于 $ab=c$，则

$$(9q_1+r_1)(9q_3+r_2)\equiv c\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\text{mod } 9)$$

即

$$r_1r_2\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\text{mod } 9)$$

而

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)=(9q_1+r_1)(9q_4+r_2)$$

所以

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)\equiv r_1r_2(\text{mod } 9),$$

最后得

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)(b_0+b_1+\cdots+b_m)$$
$$\equiv(c_0+c_1+\cdots+c_l)(\text{mod } 9) \tag{1.26}$$

注意，(1.26)是 $ab=c$ 的必要条件，(1.26)不满足时，$ab=c$ 一定是错的，但(1.26)满足，未必 $ab=c$。

例如，$a=1234$，$b=5678$，问 $ab=12345678$ 是否正确？

由于 $1+2+3+4=10$，$5+6+7+8=26$，$1+2+3+4+5+6+7+8$

$=36$, $10\times26=260\not\equiv36 \pmod 9$，事实上 260 被 9 除余 8，而 36 可被 9 除尽，(1.26)式不满足，所以 $ab=12345678$ 不正确。

又问：$1234\times5678=5678432$ 是否正确？

由于 $5+6+7+8+4+3+2=35$，35 被 9 除也余 8，所以这时(1.26)式成立，但 $1234\times5678=7006652$ 是真的，所以 $1234\times5678=5678432$ 是错的。

1.10 韩信点兵，多多益善

《孙子算经》成书于公元 3 世纪前后，魏晋时期著名数学家刘徽曾为《孙子算经》作注，原始作者已不可考，书中有两则“妇孺皆知而乐道之”的名题，一题称为“物不知其数”，一题则是“韩信乱点兵”。“物不知其数”的解决总结出在世界数学史上影响深远的“中国剩余定理”或称“孙子定理”，比内容相同的“高斯定理”早问世 1500 年左右。

南宋大数学家秦九韶(约公元 1202～1261)在他的巨著《数书九章》中又提出一个脍炙人口的“余米推数”问题，并总结出“大衍求一术”。

秦九韶字道古，四川安岳人，曾在川、皖等地为官，1260 年贬至广东梅州，次年卒于任所。他博学多才，史称秦九韶“性极机巧，星象、音律、算术以至营建等事，无不精究。”“戏、球、马、弓、剑莫不能知”，尤其是在南宋兵荒马乱的年代，潜心研究数学，实为难能可贵。20 多万字的《数书九章》是他 1244～1247 年为母亲守孝期间写成的，该书立论新颖，构思风趣，是我国乃至世界的数学瑰宝。美国数学史家萨顿(G. Sarton, 1884～1956)说，秦九韶是“他的民族，他的时代，以致一切时期最伟大的数学家之一。”

(1) 物不知其数与中国剩余定理

题曰:“今有物不知其数,三三数之余二,五五数之余三,七七数之余二,问物几何?”

宋朝时有歌谣口诀称:

三岁孩儿七十稀,
五留廿一事尤奇,
七度上元重相会,
寒食清明便可知。

其中的上元指正月十五元宵节,寒食至清明105天。

明朝程大位的歌诀则唱道:

三人同行七十稀,
五树梅花廿一枝,
七子团圆正月半,
除百零五便得知。

这两首歌谣给出的一个有效算法为:

用70乘三三数的余数,用21乘五五数之的余数,用15乘七七数之的余数,再把三个积相加,减去105的若干倍,即可得所求的数的最小值

具体计算过程是

$$2\times70+3\times21+2\times15=233$$

$$233-105=128,\ 128-105=23$$

23即所求的物件的数目(的最小值)。

事实上,23加上105的任一倍数,亦为所求,105是3,5,7的最小公倍数,$105=3\times5\times7$,如果已求出一数M,满足被3除余2,被5除余3,被7除余2,则$M-105k$仍然有上述余数,所以有第四句“除百零五便得知”,这里的“除”字是删除,即减去的意思。

在$2\times70+3\times21+2\times15$式中,$3\times21$中的$21=3\times7$,$2\times15$中的$15=3\times5$,所以$3\times21+2\times15$可被3除尽,$2\times70$中的$70=2\times(5$

$\times 7$),被 3 除恰余 2,所以 $2\times70+3\times21+2\times15$ 被 3 除余 2,相似地可以看出此式被 5 除余 3,被 7 除余 2。所以 $2\times70+3\times21+2\times15$ 是所求之数。用同余的记号写,即

$$70\equiv1(\bmod 3),\ 21\equiv1(\bmod 5),\ 15\equiv1(\bmod 7)$$

此实例总结成如下的孙子定理:

设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是两两互素的正整数,$m=m_1m_2\cdots m_k$,$m=m_iM_i$,$i=1,2,\cdots,k$,则满足下列方程

$x\equiv b_1(\bmod m_1)$,$x\equiv b_2(\bmod m_2)$,$\cdots$,$x\equiv b_k(\bmod m_k)$的解为

$$x\equiv M'_1M_1b_1+M'_2M_2b_2+\cdots+M'_kM_kb_k(\bmod m)$$

其中 $M'_iM_i\equiv1(\bmod m_i)$,$i=1,2,\cdots,k$。

在"物不知其数"一题中,$m_1=3$,$m_2=5$,$m_3=7$,$k=3$,m_1,m_2,m_3两两互素,即每两个都没有不为 1 的公因数。$m=m_1m_2m_3=3\times5\times7=105$,$105=m_1M_1$,故 $M_1=35$,$105=m_2M_2$,故 $M_2=21$,$105=m_3M_3$,故 $M_3=15$。又要求 $M'_iM_i\equiv1(\bmod m_i)$;$35M'_1\equiv1(\bmod 3)$,故 $M_1'=2$,$21M'_2\equiv1(\bmod 5)$,则 $M'_2=1$,$15M'_3=1(\bmod 7)$,故 $M'_3=1$,于是

$$x\equiv2\times35\times2+1\times21\times3+1\times15\times2\equiv233\equiv23(\bmod 105)$$

用《孙子算经》的这种算法,还可解决韩信点兵问题。

(2) 韩信乱点兵

据司马迁《史记》:"淮阴侯列传第三十二"与"韩信卢绾列传第三十三"载,"韩信者,淮阴人也,始为布衣时,贫无行,不得推择为吏,又不能治生商贾,常从人寄食饮,人多厌之。"足见其贫贱之身世,被人欺凌,受过"胯下之辱",后发奋习武,熟读兵书,成为统率刘邦全军的元帅,助佐刘邦得天下,可恨刘邦过河拆桥,欲车裂韩信,韩信留下"狡兔死,走狗烹;高鸟尽,良弓藏,敌国破,谋臣亡"的千古哀怨!帝王之中,有几个不是无赖?!假设韩信自幼立志于数学,也许会对人类做出更大的贡献。下面是《孙子算经》上所载"韩信乱点兵"的名

题：

韩信有兵一队，若列为五行纵队，则末行一人，成六行纵队，则末行五人，成七行纵队，则末行四人，成十一行纵队，则末行十人，求兵数。

军师答曰："两千一百一十一人或加若干倍的两千三百一十人。"韩信答曰："多多益善！"

韩信点兵的数学模型是求下列方程的解

$x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 5 \pmod 6$, $x \equiv 4 \pmod 7$, $x \equiv 10 \pmod{11}$

按孙子定理的记号，$m_1=5$, $m_2=6$, $m_3=7$, $m_4=11$, m_1, m_2, m_3, m_4 两两互素，$m=5\times6\times7\times11=2310$, $M_1=6\times7\times11=462$, $M_2=5\times7\times11=385$, $M_3=5\times6\times11=330$, $M_4=5\times6\times7=210$, 又要求 $M'_iM_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, $i=1,2,3,4$, 得 $M'_2=M'_3=M'_4=1$, $M'_1=3$, $b_1=1$, $b_2=5$, $b_3=4$, $b_4=10$, 于是

$$\begin{aligned} x &\equiv M'_1M_1\times1+M'_2M_2\times5+M'_3M_3\times4+M'_4M_4\times10 \\ &\equiv 462\times3\times1+1\times385\times5+1\times330\times4+1\times210\times10 \\ &\equiv 1386+1925+1320+2100 \\ &\equiv 6731 \equiv 2111 \pmod{2310} \end{aligned}$$

即韩信的兵有 $2111+k2310$, k 是非负整数。

(3) 余米推数

题曰："米铺被盗，去米一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中壁箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼系甲乙丙三人，甲称当夜摸得马杓，在左壁箩舀入布袋；乙称踢着木履，在中壁箩舀入袋；丙称摸得漆碗，在右壁箩舀入袋，将归食用，日久不知数。索到三器，马杓容满一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合，欲知所失米数，计赃结断，三盗各几何？"

"合"读 gě(同音葛)，十勺为一合，十合为一升；量米器具，由竹木制成，方形或筒形，装满粮食恰为一合。

用现代汉语来讲，题文为："一米店被盗，米店原有三个装满米的箩，三个箩容量相等，被偷后，左边箩里剩下一合米，中间箩里剩下一升四合米，右边箩里剩下一合米。后把甲乙丙三个小偷抓获，甲供认当夜摸到一只马杓，从左边箩里把米舀入他的布袋；乙供认踢着了一只木鞋，就用木鞋从中间箩里把米舀入他的布袋；丙供认他摸到一只漆碗，用此碗把右边箩里的米舀入他的布袋。三个小偷把盗得的米背回各自的家中食用，他们也糊里糊涂，不知当初偷来了多少米。后经判官索验物证，查明那只马杓可容一升九合，木鞋可容一升七合，漆碗可容一升二合，于是按每个小偷盗去的米的数量给予应得之惩处。问三人各偷去多少米？"

此题的数学模型是：设 x 是箩的容量，以合为单位，欲求的是下面方程的解

$$x \equiv 1 \pmod{19},\ x \equiv 14 \pmod{17},\ x \equiv 1 \pmod{12}$$

引用孙子定理的记号，$m_1 = 19$, $m_2 = 17$, $m_3 = 12$, m_1, m_2, m_3 两两互素；$m = m_1 m_2 m_3 = 3876$, $M_1 = 204$, $M_2 = 228$, $M_3 = 323$, $M_1' = 15$, $M_2' = 5$, $M_3' = 11$, $b_1 = 1$, $b_2 = 14$, $b_3 = 1$。于是

$$\begin{aligned} x &\equiv M_1 M_1' \times 1 + M_2 M_2' \times 14 + M_3 M_3' \times 1 \\ &= 3060 + 15960 + 3553 \equiv 22573 \equiv 3193 \pmod{3876} \end{aligned}$$

即每箩至少装米 3193 合，甲盗走的米为 3193 − 1 = 3192 合，乙盗走的米为 3193 − 14 = 3179 合，丙盗走的米为 3192 合。三个小偷盗走的米都不少，也差不太多，应各打四十大板，并处相当于 3000 多合米的罚金。

1.11 素数的故事

(1) 名不符实的冠名

素数并不素，它的定义和名称似乎给人一种印象，认为素数是质

朴简单的一种最基本的数，其实算术中麻烦事大都是由它惹起的。例如，我们知道的哥德巴赫猜想和孪生素数的黎曼猜想；1989 年，Amdabl Six 小组在美国加利福尼亚圣克拉大学用 Amdabl 1200 超级计算机捕捉到一对孪生素数

$$1706595 \times 2^{11235} \pm 1$$

可见素数名不符实。

还有一个在数学史上贻笑大方的名不符实的故事是关于威尔逊定理的事。有一个关于素数的定理，用英国法官威尔逊(J. Wilson, 1741～1793)冠名。

威尔逊定理：若 p 为素数，则 p 可整除 $(p-1)!\ +1$；若 p 为合数，则 p 不能整除 $(p-1)!\ +1$。

事实上，这条定理是莱布尼茨首先发现，后经拉格朗日证明的；威尔逊的一位擅长拍马屁的朋友沃润(E. Waring)于 1770 年出版的一本书中却吹虚说是威尔逊发现的这一定理，而且还宣称这个定理永远不会被证明，因为人类没有好的符号来处理素数，这种话传到高斯的耳朵里，当时高斯也不知道拉格朗日证明了这一定理，高斯在黑板前站着想了 5 分钟，就向告诉他这一消息的人证明了这一定理，高斯批评威尔逊说："他缺乏的不是符号而是概念。"

两百多年来，全世界的数论教科书上都照样把这一定理称为威尔逊定理，看来还历史以本来面貌，更换本定理的冠名已无必要，也不易纠正这么多年来文献与教材上的称呼了。

威尔逊定理应用很广，例如对较大的素数 p，我们虽然无力算出 $(p-1)!$ 的值，但却知道 $(p-1)!$ 被 p 除的余数是 -1 或 $p-1$。事实上，由于 $(p-1)!\ +1$ 可被 p 整除，则存在自然数 n，使得 $(p-1)!\ +1=np$，$(p-1)!\ =np-1=(n-1)p+(p-1)$，所以 $(p-1)!$ 被 p 除的余数是 -1 或 $p-1$。

由于威尔逊定理戏剧性的冠名以及它的内容的重要性，难怪有

人戏称:"如果一个人不知道威尔逊定理,那他就白学了算术。"

下面介绍威尔逊定理的一种证明:

设 p 是素数, $p=2$ 时,定理成立不足道。对于奇素数,令 $a\in A=\{2,3,\cdots,p-2\}$,则 $B=\{a,2a,3a,\cdots,(p-1)a\}$中不会有对于除数 p 同余的两个数;事实上,若 $\alpha a,\beta a\in B$, $\alpha a\equiv\beta a\pmod p$,则 $a|\alpha-\beta|$可被 p 除尽,而$|\alpha-\beta|a\in B$,但 B 中数不可能被 p 除尽。于是 B 中数被 p 除得到的余数形成的集合 $C=\{1,2,\cdots,p-1\}$。

设 B 中被 p 除余 1 的数是 γa:

①若 $\gamma=1$,则 $\gamma a=a$, γa 被 p 除余 a,又 $a\geqslant 2$,与 $\gamma a\equiv 1\pmod p$矛盾,故 $\gamma\neq 1$。

②若 $\gamma=p-1$,则 $\gamma a=pa-a$,它被 p 除余 a,所以 $\gamma\neq p-1$。

③若 $\gamma=a$,则 $\gamma a=a^2$,由于 $a^2\equiv 1\pmod p$,故应有 $a^2-1=(a+1)(a-1)\equiv 0\pmod p$,这只能是 $a=1$ 或 $a=p-1$,此与 $a\in A$ 矛盾,故 $\gamma\neq a$。

由①,②,③知 $\gamma\neq a$,且 $\gamma\in A$。

a 不同时, γ 亦相异;若 $a_1\neq a_2$, a_1, $a_2\in A$,且 $\gamma a_1\equiv\gamma a_2\equiv 1\pmod p$,因 γa_1, $\gamma a_2\in B$,而 B 中数关于 mod p 不同余,可见 $a_1\neq a_2$,则 $\gamma_1\neq\gamma_2$。

依次取 a 为 $2,3,\cdots,\frac{p-1}{2}$;使 $\gamma a\equiv 1\pmod p$的数 γ 分别为 $\frac{p-1}{2}+1,\frac{p-1}{2}+2,\cdots,p-2$,即

$$2\times\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\equiv 3\times\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\equiv\cdots\equiv\frac{p-1}{2}(p-2)$$
$$\equiv 1\pmod p$$

从而

$$\left[2\times\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\right]\left[3\times\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\right]\cdots\left[\frac{p-1}{2}(p-2)\right]$$
$$\equiv 1\pmod p$$

$$2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(p-2)\equiv 1(\bmod\ p)$$

又 $p-1\equiv -1(\bmod\ p)$，则

$$(p-1)!\ =1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(p-2)(p-1)\equiv -1(\bmod\ p)$$

从而 $(p-1)!\ +1$ 可被 p 除尽。

若 p 是合数，p 有因数 q，$1<q\leqslant p-1$，从而 $(p-1)!$ 可被 q 整除；$(p-1)!\ +1$ 不能被 q 整除，亦不能被 p 整除。

(2) 不能实施的素数判别法

威尔逊定理给出了一个判别法：

整数 $p\geqslant 2$ 是素数当且仅当 $(p-1)!\ +1$ 可被 p 整除。

从字面上看，这个定理已经明白无误地给出了一个简洁的 + − × ÷ 算法，可以判断任何一个正整数是不是素数。可惜 $(p-1)!$ 太无情了，使得我们没有那么多时间和抄写空间（纸张或计算机内存）来弄清 $(p-1)!$ 是几！例如 1876 年，法国数学家卢卡斯(A. Lucas)用手和笔发现了一个 39 位的素数

$$\begin{aligned} p &= 2^{127}-1 \\ &= 170141183460469231731687303715884105727 \end{aligned}$$

即使有朝一日某国某人算出了 $[(2^{127}-1)-1]!$，以每页书可排 2000 个阿拉伯数字计算，$[(2^{127}-1)-1]!$ 可以印成 500 页的书至少 2×10^{33} 本，比全世界的总藏书量还多得多！何况，还有比 $2^{127}-1$ 更大的素数待判定呢！

可见，威尔逊定理只有理论的价值，是一个无实施价值的判别法，或者说，它是一个无效的坏算法。

我们渴望设计出有效算法来判别任给的正整数是否是素数。这种迫切性从费马数和哥德巴赫猜想等问题上，可以感觉到。

所谓费马数，是指形如

$$F_n=2^{2^n}+1$$

的数，其中 $n=0,1,2,\cdots$

$$F_0=3,\ F_1=5,\ F_2=17,\ F_3=257,\ F_4=65537,$$
$$F_5=4294967297$$

F_0 到 F_4 容易判定它们都是素数，F_5 是 42 亿多的大数，费马当年无力判断 F_5 是否素数，他只是大胆猜想 F_n 每个都是素数。1732 年，欧拉算出 $F_5=641\times6700417$，从而否定了费马关于费马数素性的猜想。

1880 年，法国数学家卢卡斯算出

$$F_6=274177\times67280421310721$$

1971 年，有人对 F_7 得出素因子分解，1981 年，有人得出 F_8 的素因子分解。

1980 年，有人得出 F_{9448}的一个因子是

$$19\times2^{9450}+1$$

1984 年，有人得出 F_{23471}的一个因子是

$$5\times2^{23473}+1$$

1986 年，有人用超级计算机连续运算十天得知 F_{20}是合数。

至今知道的素费马数还只是 F_0, F_1, F_2, F_3, F_4。

这个问题不能彻底解决的要害是今日没有搞出判别素数的有效算法，也有一种潜在的厄运，那就是判定一个数是否是素数和移动河内塔上的盘子一样，本质上就不存在有效算法。

(3) 素数病毒越来越多

把 π 的小数点删去，π 就改写成了一个阿拉伯数字的无穷序列，问：长几的前缀是素数？

例如，3 与 31 是素数；314159 是第三个素前缀；1979 年美国数学家贝利(R. Baillie)等人发现 π 上的第四个素前缀

$$31415926535897932384626433832795028841$$

敢问：π 还有第五个素前缀吗？第六个，第七个…… 呢？

把 π 换成 e，换成 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3} \cdots$ lg2, lg3…再问同类问题，又该怎么解答呢？

即使是温和一些的问题，例如下面问题仍然是悬案

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1 = \frac{1}{9}(10^n - 1)$$

当 n 为素数时，例如 $\frac{1}{9}(10^{47} - 1)$，$\frac{1}{9}(10^{59} - 1)$，$\frac{1}{9}(10^{71} - 1)$，$\frac{1}{9}(10^{73} - 1)$，$\frac{1}{9}(10^{83} - 1)$，$\frac{1}{9}(10^{97} - 1)$ 等等，是否是素数？或更一般地，问 $\underbrace{11\cdots11}_{n\text{个}1}$ 是否是素数？

其中 n 为任意指定的自然数。

真是心血来潮，随便一问就会难倒人！这样提出问题会使人对素数产生一种反感。在形形色色应接不暇的问题当中，似应首选那些具有重要应用背景或理论背景，又有能力解决的问题去研究。

(4) 重要的问题是落实算术基本定理

算术基本定理告知，任一大于 1 的整数都可以唯一地表成某些素数的乘积，即 $n = p_1 p_2 \cdots p_m$，其中 n 是任意给定的大于 1 的整数，$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是被 n 唯一确定的素数。

问题是，如何由 n 具体地求出 $p_1, p_2, \cdots, p_m$？

这是一个有重要实用背景和计算机计算的时间复杂度理论背景的大问题。是数论的中心课题之一，也是计算机科学的主攻方向之一。

假设某年某人设计出了一个有效算法，能在多项式时间内求得 $n = p_1 p_2 \cdots p_m$ 中的 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的值，那么当 n 是素数时，n 就是 p_1，即此算法可以有效地判定素数，从而可以在多项式时间内解决前面提出的诸多问题，例如费马数 F_n 是否素数（n 是任意给定的自然数），以

及无理数(例如 π)的前缀是否素数等问题。这里说的"多项式时间"是指对一个问题，存在一个多项式 $p(n)$，n 是要判定的整数的输入长，即它的位数的一个倍数。

在实用上，例如在保密通讯与密码破译当中，需要对大合数进行素因子分解，一般这种大合数有百位之大，所以目前各军事大国都集大量人力物力，研究这种合数素分解问题，但至今并未听说有明显进展。

素数判定和合数素分解，可能类似与求拉姆赛数那样，一个数一个搞法，不能形成普遍的有效算法，这就太不好办了。

如果真搞出素分解算法，则对任给定的大偶数，可以在多项式时间内表成两个素数之和或发现哥德巴赫猜想的反例。事实上，对于任意的 $2k$，表成 $1+(2k-1)$，$2+(2k-2)$，$3+(2k-3)$，……，对这些和中的每对数加以判定，若都是素数，则可把 $2k$ 表成两素数之和，否则就反驳了哥德巴赫。

我们期望的这种素分解的有效算法能解决这么多非常之难的问题，可见设计出它的难度是诸多数论难题难度之集大成，即使这种算法存在，也是十分之难以设计出来，我们甚至还应想到它根本就不存在，以避免望梅止渴，水中索月。

1.12 生产全体素数

随便拿出一个自然数，问我们是不是素数，一般是无言以对的，但却有一个公式，以自然数对为双亲，从理论上说，能生育出所有的素数：

$$f(m,n)=\frac{n-1}{2}\left(\left|[m(n+1)-(n!+1)]^2-1\right|-\left\{[m(n+1)-(n!+1)]^2-1\right\}\right)+2$$

是素数，其中 m，n 是自然数，且 $f(m,n)$的值域是全体素数。

这个公式的证明很容易。事实上，若$[m(n+1)-(n!+1)]^2\geqslant 1$，

则 $f(m,n)=2$，得到素数。若$[m(n+1)-(n!+1)]^2=0$，则 $f(m,n)=n+1$，又 $m(n+1)-(n!+1)=0$，$m(n+1)=n!+1$。即 $n+1$ 可整除 $n!+1$，由威尔逊定理，$n+1$ 是素数，即 $f(m,n)$也算出素数，至此知 $f(m,n)$只能是素数。

下证 $f(m,n)$的值域是全体素数集合。

任取定一素数 p，由威尔逊定理，$(p-1)!+1$ 被 p 整除，取

$$n=p-1,\ m=\frac{1}{p}[(p-1)!+1]$$

则

$$mp=(p-1)!+1,\ n+1=p$$

$$m(n+1)=mp=(p-1)!+1=n!+1$$

于是 $m(n+1)-(n!+1)=0$，$f(m,n)=n+1=p$，由 p 的任意性知 $f(m,n)$的值域是全体素数的集合。

还可以证明，每个奇素数，$f(m,n)$恰取到一次。

事实上

$$f(m,n)=\begin{cases}2, & [m(n+1)-(n!+1)]^2\geqslant 1\\ n+1, & m(n+1)=n!+1\end{cases}$$

$f(m,n)$取到的奇素数中形如 $p=n+1$，在使 $f(m,n)=n+1$ 的数组(m,n)中，只有 $n=p-1$，这时 $m(n+1)=n!+1$，$m=\frac{n!+1}{n+1}$，于是 $(m,n)=\left(\frac{n!+1}{n+1},n\right)=\left(\frac{(p-1)!+1}{p},p-1\right)$是唯一的使 $f(m,n)=p=n+1$ 的一对自然数 m,n。

公式 $f(m,n)$给出了产生全体素数的一个算法，只可惜它其实是个坏算法，为计算出奇素数 p，要计算$(p-1)!$，p 很大时，$(p-1)!$ 实际上是算不出来的，空间和时间都不够用；而且这个公式还有一个讨厌的地方，就是大多数情形，算出的都是 2 这个最小素数。

看起来，如何产生素数，如何鉴别素数，仍然是困扰数学家的严重课题。

1.13 算术小魔术

(1) 立方和等于和平方

法国著名数学家刘维尔(J. Liouville, 1809～1882)说:4 的因数有 1,2,4,这些因数的因数个数分别是 1,2,3,再看 $1^3+2^3+3^3=1+8+27=36=(1+2+3)^2$,这恰为公式

$$(1+2+3+\cdots+n)^2=1^3+2^3+\cdots+n^3$$

的特例。一般而言,任取一自然数 N,它的因数有 $1, n_1, n_2, \cdots, n_k, N$,这些因数的因数个数分别为 $1, m_1, m_2, \cdots, m_k, k+2$,是否公式

$$1^3+m_1^3+m_2^3+\cdots+m_k^3+(k+2)^3$$
$$=(1+m_1+m_2+\cdots+m_k+k+2)^2$$

成立!

下面把上述"戏法"表演如下:

1:因数为 1;因数的因数个数为 1

$$1^3=1^2$$

2:因数为 1,2;因数的因数个数分别为 1,2

$$1^3+2^3=9=(1+2)^2$$

3:因数为 1,3;因数的因数个数分别为 1,2

$$1^3+2^3=(1+2)^2=9$$

5:因数为 1,5;因数的因数个数分别为 1,2

$$1^3+2^3=(1+2)^2=9$$

6:因数为 1,2,3,6;因数的因数个数分别为 1,2,2,4,

$$1^3+2^3+2^3+4^3=81=(1+2+2+4)^2$$

我们发现,上述规律对素数 p 是永远成立的,事实上,素数 p 的因数为 1 与 p,因数的因数个数分别为 1,2,$1^3+2^3=(1+2)^2=9$。

下面只对合数来验证。

8： 因数为 1,2,4,8;因数的因数个数分别为 1,2,3,4

$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2=100$$

100： 因数为 1,2,4,5,10,20,25,50,100;因数的因数个数分别为 1,2,3,2,4,6,3,6,9

$$1^3+2^3+3^3+2^3+4^3+6^3+3^3+6^3+9^3$$

$$=1+8+27+8+64+216+27+216+729=1296$$

$$(1+2+3+2+4+6+3+6+9)^2=1296$$

(2) 6174 号陷阱

任取一个四位数 $A_1A_2A_3A_4$, A_1, A_2, A_3, A_4 不全相等, 用 A_1, A_2, A_3, A_4 这 4 个数字排出一个最大四位数, 再排出一个最小自然数, 对两者之差再重复这种操作, 结果如何?

1234： 用 1,2,3,4 组成的最大的数为 4321, 最小的数为 1234, 差为

$$4321-1234=3087$$

3087： 重复上述操作得

$$8730-378=8352$$

8352： 重复上述操作得

$$8532-2358=6174$$

6174： 重复上述操作得

$$7641-1467=6174$$

再重复进行上述操作, 永远得出 6174, 至此已落入"6174 号陷阱"! 6174 成了"不动点"。

再看 9990

9990： 9990 − 999 = 8991

8991： 9981 − 1899 = 8082

8028： 8820 − 288 = 8532

8532： 8532 − 2358 = 6174

经上述四步即掉入 6174 号陷阱。

最后再看一个实例 8964：

8964：　9864 − 4689 = 5175

5175：　7551 − 1557 = 5994

5994：　9954 − 4599 = 5355

5355：　5553 − 3555 = 1998

1998：　9981 − 1899 = 8082

8082：　8820 − 288 = 8532

8532：　8532 − 2358 = 6174

经七步终于掉入 6174 号陷阱。

可以证明最多经过七步，运算结果必掉入 6174 号陷阱，即任意四位数，只要其数字不全相等，则“由这四个数字组成的最大数与最小数之差”的反复操作，在七步之内必得出 6174，之后再执行上述运算，则永远得出 6174。上述实例 8964 已是最复杂的陷阱了(要经过七步才陷入)。

(3) 数字的平方和非 1 则 4

任取定一个自然数，求其数字平方和，再求所得结果的数字平方和，反复执行，最终结果是几？

1：　$1^2=1$

2：　$2^2=4, 4^2=16, 1^2+6^2=37, 3^2+7^2=58, 5^2+8^2=89,$

$8^2+9^2=145, 1^2+4^2+5^2=42, 4^2+2^2=20, 2^2+0^2=4$

可见从 2 开始，会反复(周期地)出现结果 4 和 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20 的循环。

3：　$3^2=9, 9^2=81, 1^2+8^2=65, 6^2+5^2=61,$

$1^2+6^2=37$

从此进入从 2 开始的运算，可见从 3 开始，会进入 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20 的循环。

看一个较大数 12345678：

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=1+4+9+16+25+36+49+64=204$$

$2^2+4^2=20$, 从此进入从 2 开始的过程, 变成 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20 的循环。

可以证明最终结果对任何自然数不是 1 就是 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20 的循环。

结果为 1 的实例也不少, 例如非零数字是一个 6 与一个 8 的自然数或非零数字是四个 5 的自然数。

(4) 外接正方形四个顶点皆为零

作一个正方形的外接正方形, 使两者的边呈 45° 角, 再如此依次作外接正方形, 如图 1-3。我们首先在原始正方形的四个顶点任意写上四个自然数, 在其外接正方形的每个顶点上写出它与其内接正方形相邻的顶上数字之差的绝对值, 如此递推, 有限次之后, 则会出现外接正方形四个顶上皆为零的结果。

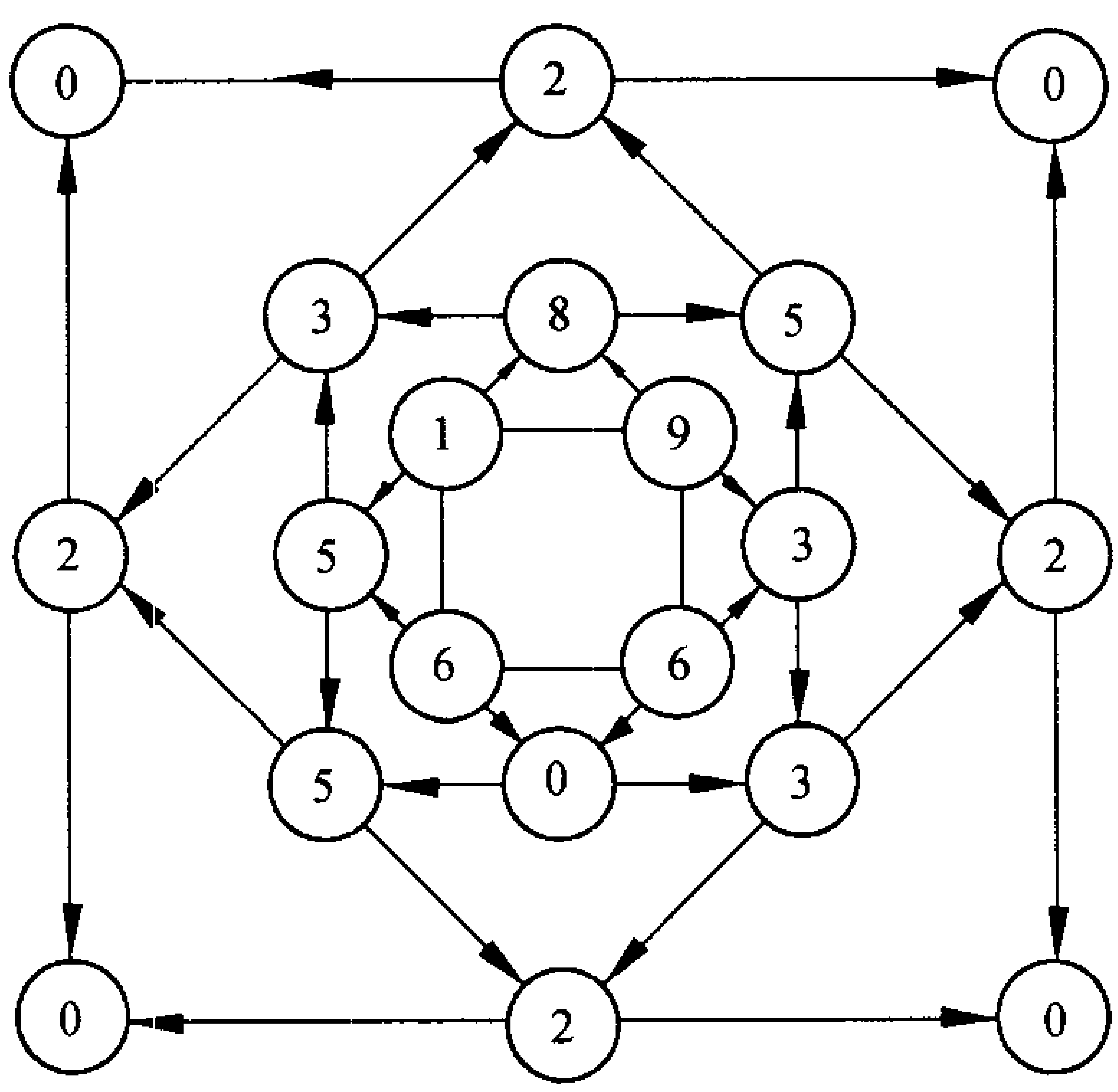


图 1-3

例如原始正方形四顶上写的是1966，经过四轮演化，最后四顶处皆变成零！ 见图1-3。

不信，你在原始正方形的四角顶任意写别的自然数，例如1，9，8，9试试看，也会是零结果。

以上四个小魔术的证明不是很难，动点脑筋，+，-，×算一算而已，有时间的读者可以自己写出证明。

1.14 自然数三角阵揭秘

把自然数集合排列成如下的三角阵，排列

										⋰
									82	…
								65	83	…
							50	66	84	…
						37	51	67	85	…
					26	38	52	68	86	…
				17	27	39	53	69	87	…
			10	18	28	40	54	70	88	…
		5	11	19	29	41	55	71	89	…
	2	6	12	20	30	42	56	72	90	…
1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	…
	4	8	14	22	32	44	58	74	92	…
		9	15	23	33	45	59	75	93	…
			16	24	34	46	60	76	94	…
				25	35	47	61	77	95	…
					36	48	62	78	96	…
						49	63	79	97	…
							64	80	98	…
								81	99	…
									100	…
										⋱

方式很简单:第 1 列为 1;第 2 列为 2,3,4;第 3 列为 5,6,7,8,9,每列比前一列多排两个数,一列接一列地读下去,恰读出自然数序列,形成一个三角阵,“1 当头的行”是此三角阵的对称轴。

这个三角阵里的故事很多,我们仔细观察,就会发现它们:

①每一行和每一斜行相邻两数的差可排成公差是 2 的等差数列。

例如横行 1,3,7,13,21,31,……相邻两数的差的数列是

$$2,4,6,8,10,\cdots \tag{1.27}$$

斜行 3,6,11,18,27,38,51,66,……相邻两数的差的数列是

$$3,5,7,9,11,13,15,\cdots \tag{1.28}$$

式(1.27),(1.28)都是公差是 2 的等差数列。

②每横行开头是奇数时,全行皆奇数;开头是偶数时,全行皆偶数。

③相邻两列每对左右相邻的数之差是常数。例如 17 开头和 26 开头的两列,17 与 27,18 与 28,19 与 29,20 与 30,……都相差 10。

④相邻的两横行上下相邻的两数之差是常数。

⑤斜下方边界上的一行是自然数的平方组成的数列,1,4,9,16,25,…

事实上,它的第 n 个数是这个数所在的一个三角形中最大的数,而这个三角形可以改排成 $n\times n$ 的正方形,所以这个数是 n^2。

⑥1 开头的横行中的数皆形如 n^2-n+1,n 是该数的项号码。

例如 $1=1^2-1+1$,$3=2^2-2+1$,$7=3^2-3+1$,$13=4^2-4+1$,等等。

事实上,由①,第 n 项为

$1+2+4+6+\cdots+(n-1)2=n^2-n+1$

⑦1 开头的横行中,若视 7 为第一项,则第 $3k$ 项皆 3 的倍数,$k=1,2,\cdots$

事实上，这种项为 $3k+2$ 号位置，即 $n=3k+2$，n 是此行的项号。由⑥知这种项的值是

$$(3k+2)^2-(3k+2)+1=9k^2+9k+3$$

所以是 3 的倍数。

⑧在 1 开头的横行中，若视 13 为第一项，则第 $7k$ 项皆 7 的倍数，$k=1,2,\cdots$

⑨在 1 开头的横行中，若视 21 为第一项，则第 $13k$ 项皆 13 的倍数，$k=1,2,\cdots$

一般而言，设 m 是 1 开头的横行中的一个数，它在此行中的项号为 n，视原第 $n+1$ 项为($k=1$)第一项，则第 mk 项皆 m 的倍数，$k=1,2,\cdots$

事实上，新编号码的第 mk 项，相当于原号码的第 $mk+n$ 项，此项的值为

$$\begin{aligned}&(mk+n)^2-(mk+n)+1\\=&m^2k^2+2nmk+n^2-mk-n+1\\=&(m^2k^2+2nmk-mk)+(n^2-n+1)\\=&m^2k^2+2nmk-mk+m\end{aligned}$$

此数是 m 的倍数。

即由 1 开头的横行中，每个数的倍数周期性地出现，周期恰为该数本身。

⑩由 1 开头的这一横行中任相邻两数之积仍在此行中，此积在行中的项号是两因数中较小者所在的列的底部的平方数加 1。

例如 $3\times7=21$，在此行中，3 的底部是 4，$4+1=5$，即 21 在第 5 项。

事实上，第 n 位的数是 n^2-n+1，第 $n+1$ 位的数是 $(n+1)^2-(n+1)+1$，它们的积为

$$[n^2-n+1][(n+1)^2-(n+1)+1]$$
$$=(n^2-n+1)(n^2+n+1)=(n^2+1)^2-n^2$$
$$=(n^2+1)^2-(n^2+1)+1$$

即此积在第 n^2+1 项，是两个乘数中较小数 n^2-n+1 的底部平方数 n^2 加 1。

对其他的横行也可讨论相应的规律。

这个三角阵写起来倒是容易，它身上却包藏了如此之丰富的规律性；再回想我们随手写出的一个高次代数方程，写起来当然只是举手之劳，但讨论它是否有实根等问题时，却不是等闲之事了；还有，我们随便写一个函数值，例如 $\sin\alpha$，$\lg A$，α，A 是给定正数，怎样判定它是无理数还是有理数呢？

貌似平凡简单的事物当中往往含有深刻复杂的数学内容，数学家不愁无事可干。

1.15 一种加法密码

我军司令部收到我特工人员从敌军阵地发回的信号抄收如下：

0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1
1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0
1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0
1 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0
0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1
0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1
1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0
1 1

我司令部收报员立刻向首长报告了电文的中译内容：

柳暗花明又一村

司令员明白这是特工人员克服了重重困难已按领导部署完成了任务。

那么这份密电的发收人员是凭什么收发的呢？原来他们手中都握有一份绝密的密码簿，一般密码簿都十分烦琐，是一本书状的本子，而这种密码簿仅仅是如 53 页的一张卡片。

我们把上面密码卡上竖列的 5 个数从上向下为序记成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$，则此列的号码恰为

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 8\alpha_4 + 16\alpha_5 \tag{1.29}$$

例如第十列为 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1, \alpha_5 = 0$，所以(1.29)式算出 $2+8=10$，恰为该列号码 10。对于(1.29)式，我们改写成

$$\begin{aligned}&\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 8\alpha_4 + 16\alpha_5\\&=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)\cdot(1,2,4,8,16)\end{aligned} \tag{1.30}$$

下面用公式(1.30)来算抄得的信号，5 个码为一段，得出

$$(0,0,1,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=4+8=12=L$$
$$(1,0,0,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1+8=9=I$$
$$(1,0,1,0,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+4+16=21=U$$
$$(1,0,1,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+4+8+16=29=\text{-}$$
$$(1,0,0,0,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1=A$$
$$(0,1,1,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=2+4+8=14=N$$
$$(0,1,1,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=2+4+8+16=30=\text{`}$$
$$(0,0,0,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=8=H$$
$$(1,0,1,0,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+4+16=21=U$$
$$(1,0,0,0,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1=A$$
$$(1,1,0,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+2+8+16=27=-$$
$$(1,0,1,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1+4+8=13=M$$
$$(1,0,0,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1+8=9=I$$
$$(0,1,1,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=2+4+8=14=N$$
$$(1,1,1,0,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1+2+4=7=G$$

$(0,0,1,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=4+8+16=28=$ ´

$(1,0,0,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+8+16=25=Y$

$(1,1,1,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1+2+4+8=15=O$

$(1,0,1,0,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+4+16=21=U$

$(0,1,1,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=2+4+8+16=30=$ `

$(1,0,0,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+8+16=25=Y$

$(1,0,0,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1+8=9=I$

$(0,1,1,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=2+4+8+16=30=$ `

$(1,1,0,0,0)\cdot(1,2,4,8,16)=1+2=3=C$

$(1,0,1,0,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+4+16=21=U$

$(0,1,1,1,0)\cdot(1,2,4,8,16)=2+4+8=14=N$

$(1,1,0,1,1)\cdot(1,2,4,8,16)=1+2+8+16=27=$ ¯

故此密码译成

Liǔ àn huā míng yòu yì cūn。

汉语译文即为“柳暗花明又一村”。

2 几何篇

埃及王问道："几何之法，更有捷径否?"欧几里得对曰："夫几何一途，若大道然，王安得独辟另途也?"

——李善兰 《几何原本》中译本序

2.1 无字数学论文

(1) 勾股定理的证明(图 2-1)

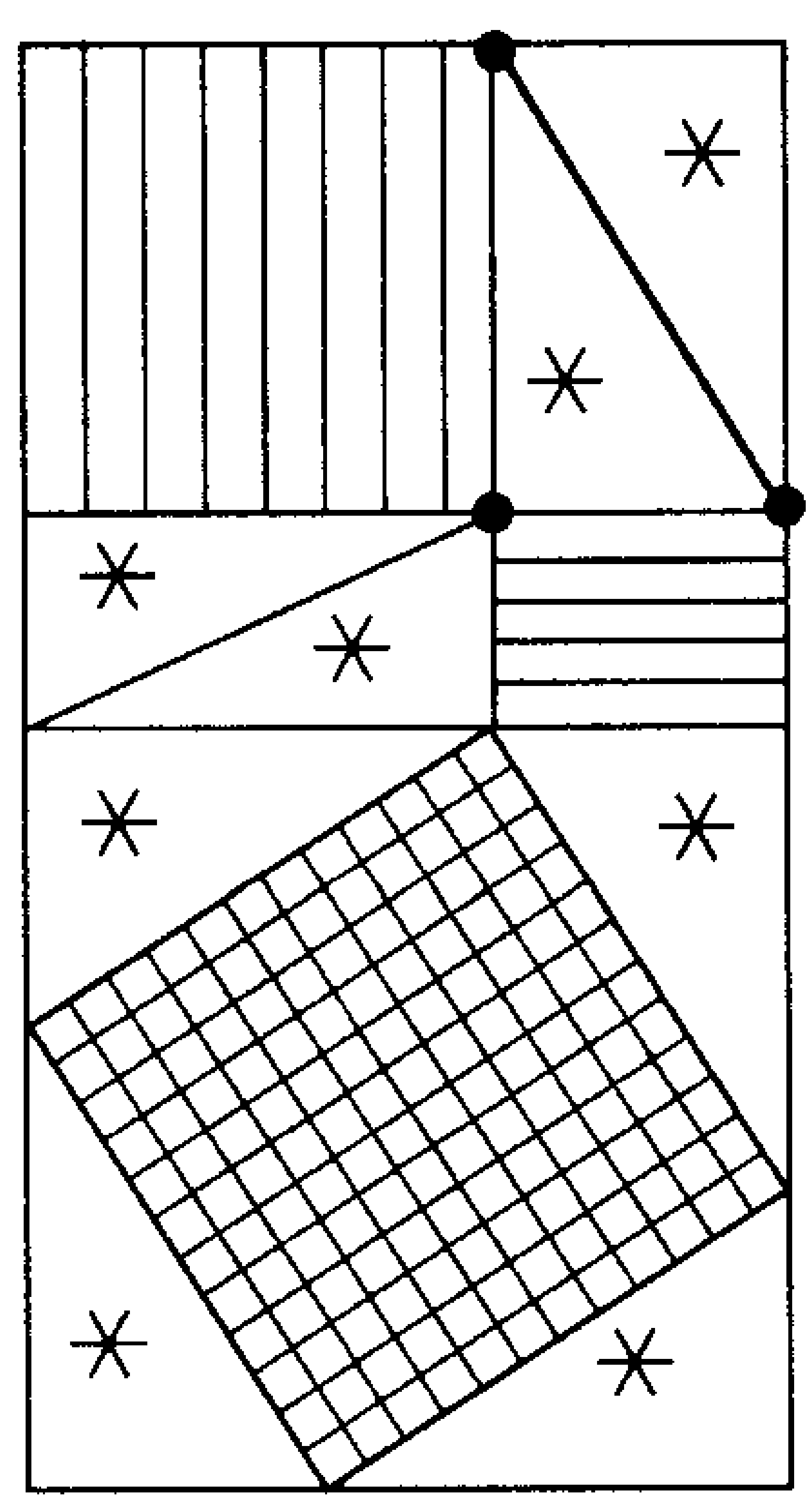


图 2-1

(2) 椭圆的定义(图 2-2)

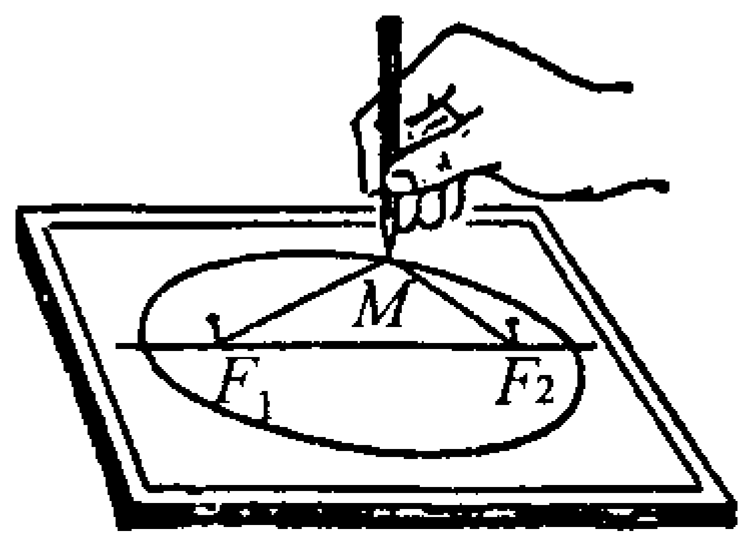


图 2-2

(3) 角的三等分器原理(图 2-3)

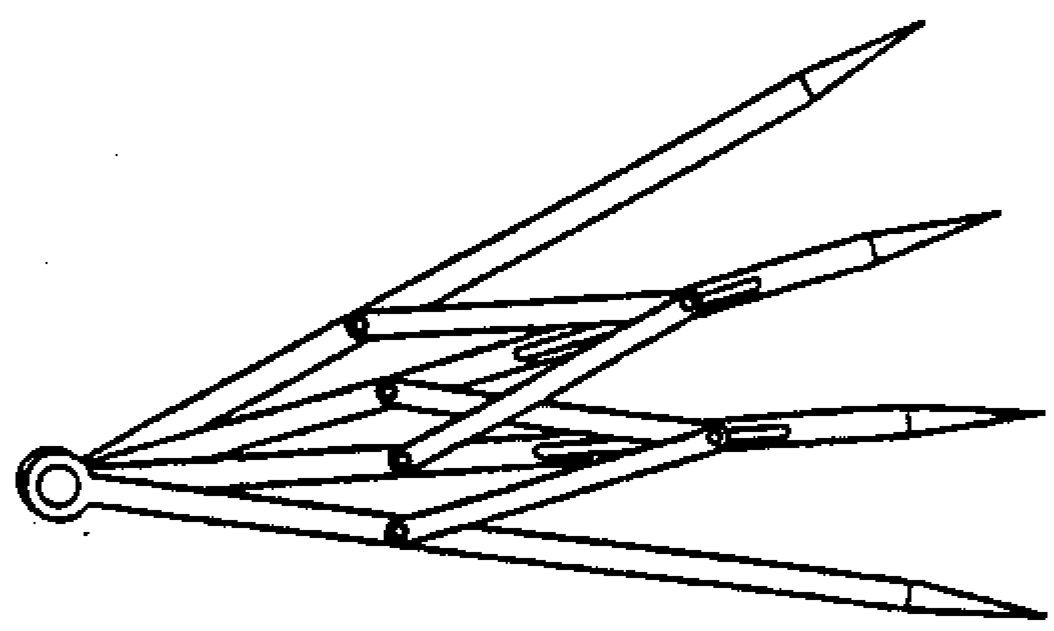


图 2-3

(4) 用双边直尺平分角(图 2-4)

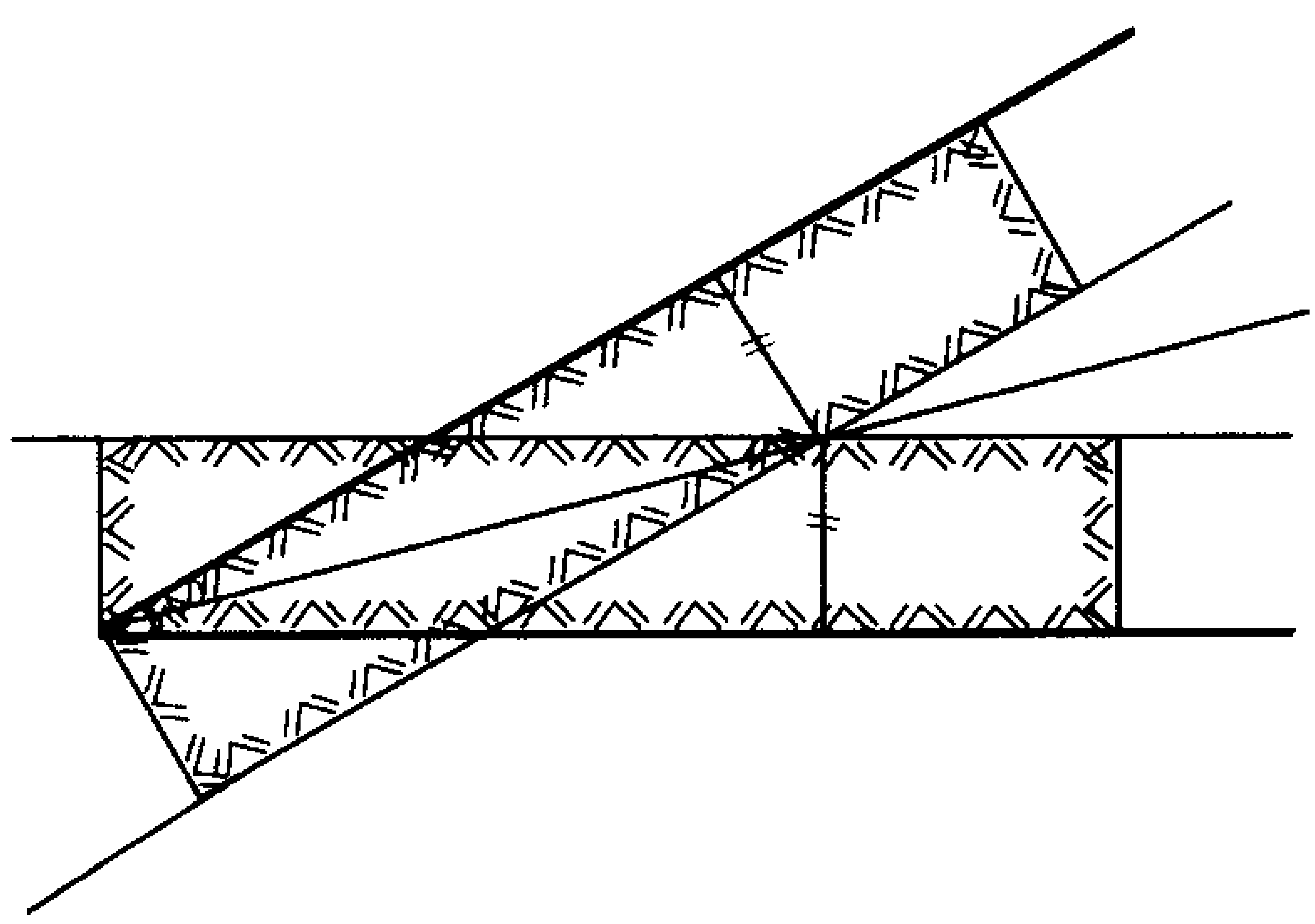


图 2-4

(5) 用双边直尺过直线上一点作直线的垂线(图 2-5)

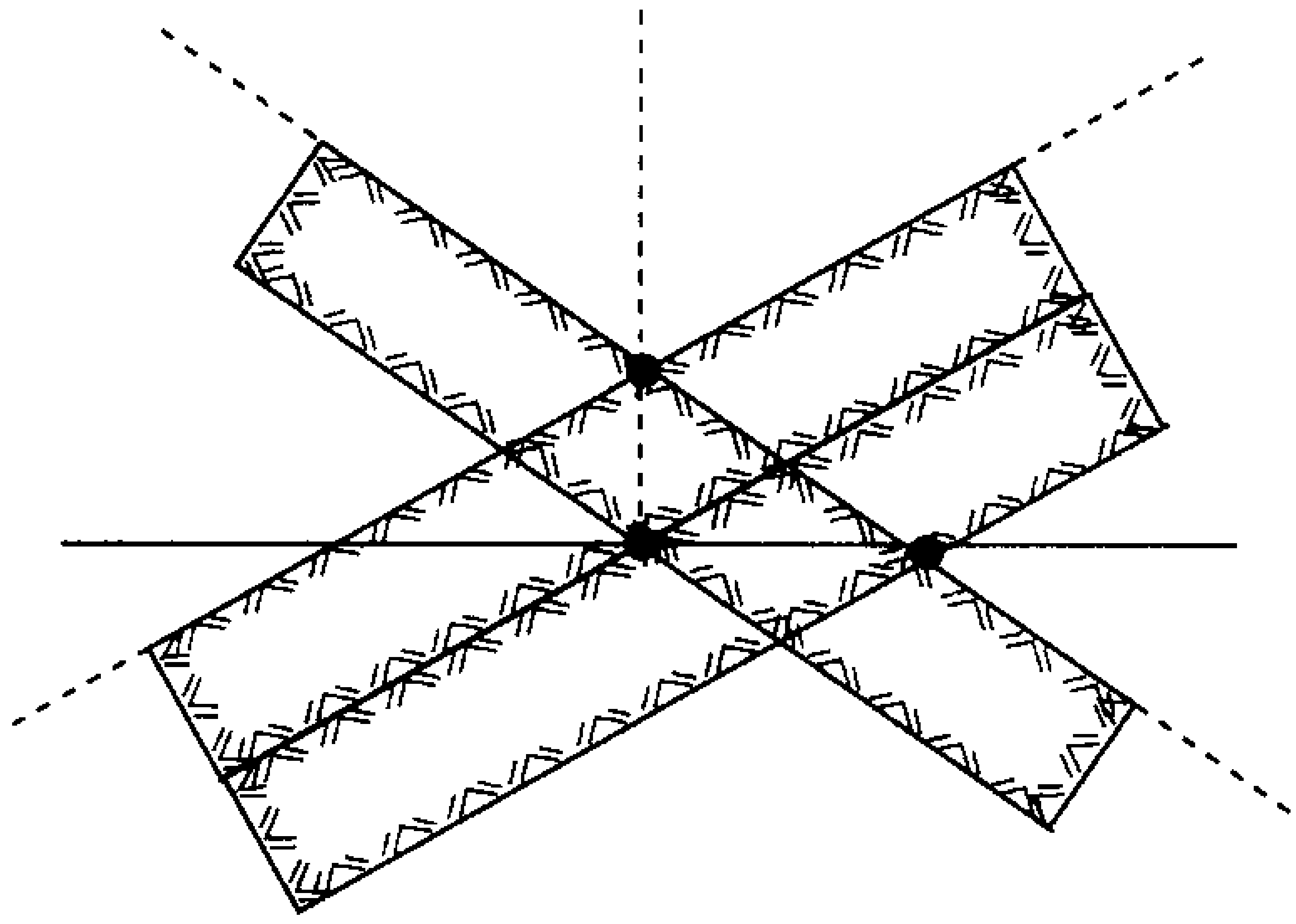


图 2-5

(6) 用双边直尺作已知角的二倍角(图 2-6)

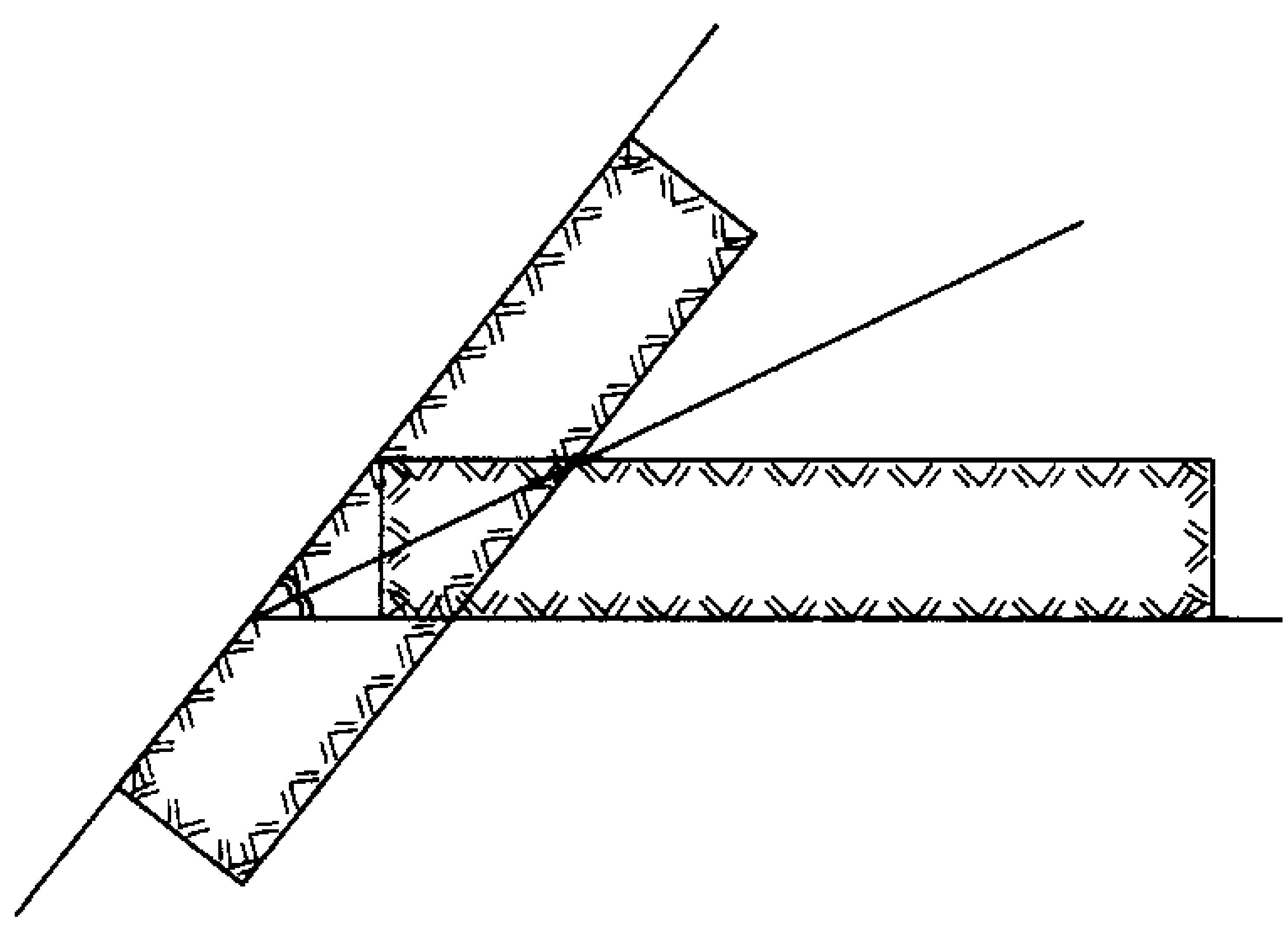


图 2-6

(7) 用双边直尺把已知线段平分(图 2-7)
(8) 用双边直尺过直线外一点作直线的平行线(图 2-8)
(9) 用一只圆规把已知线段延长 n 倍($n=8$ 的情形)(图2-9)

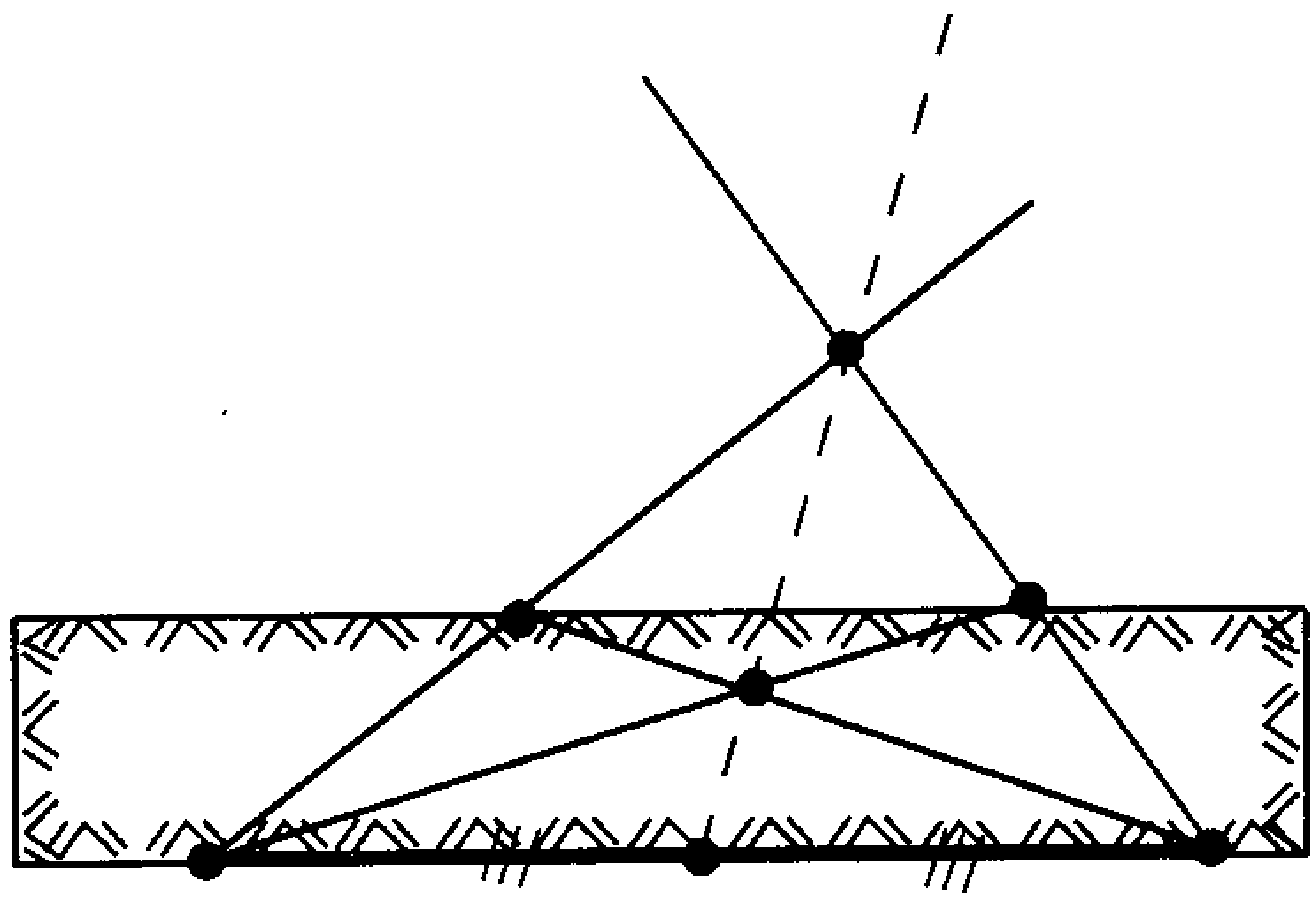


图 2-7

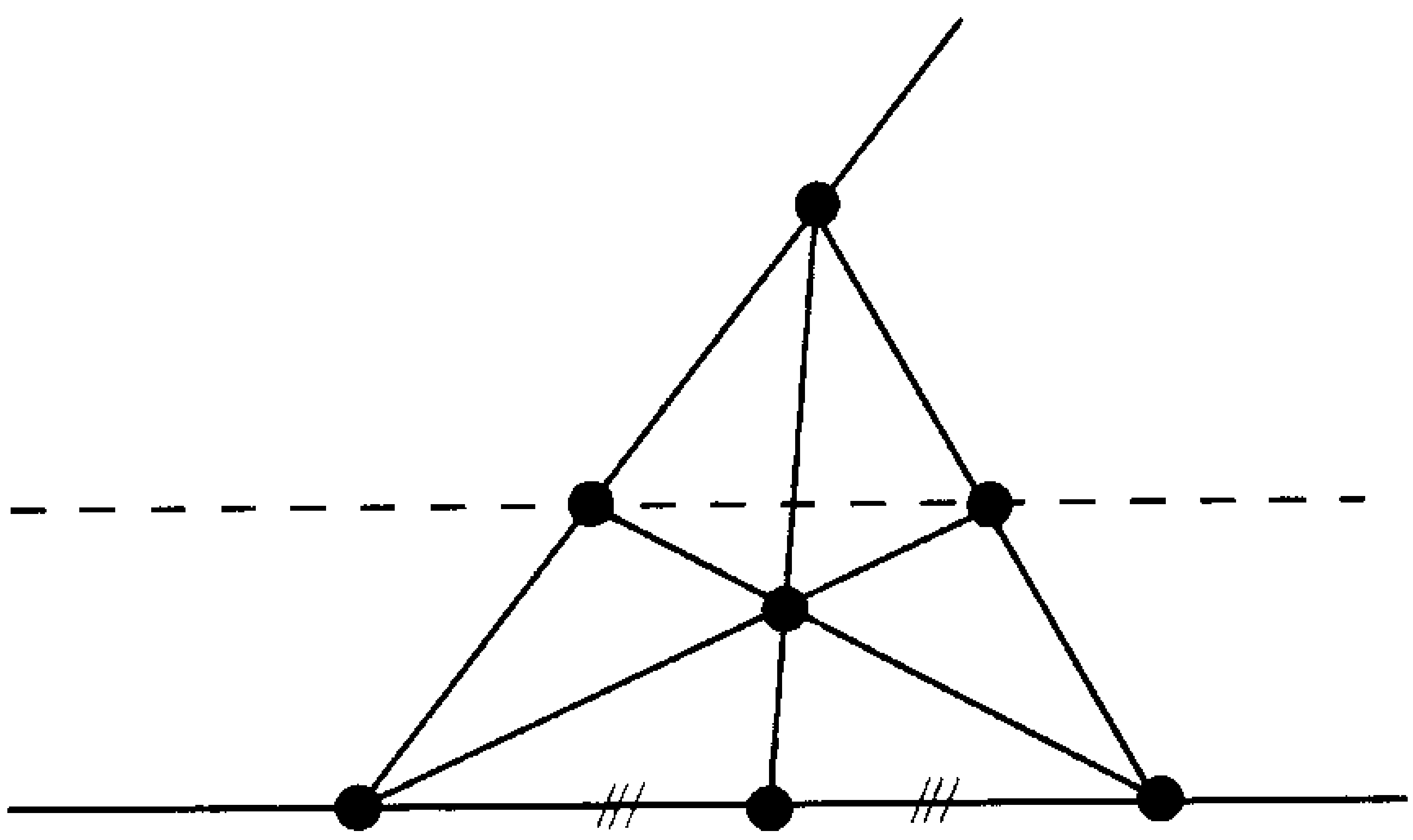


图 2-8

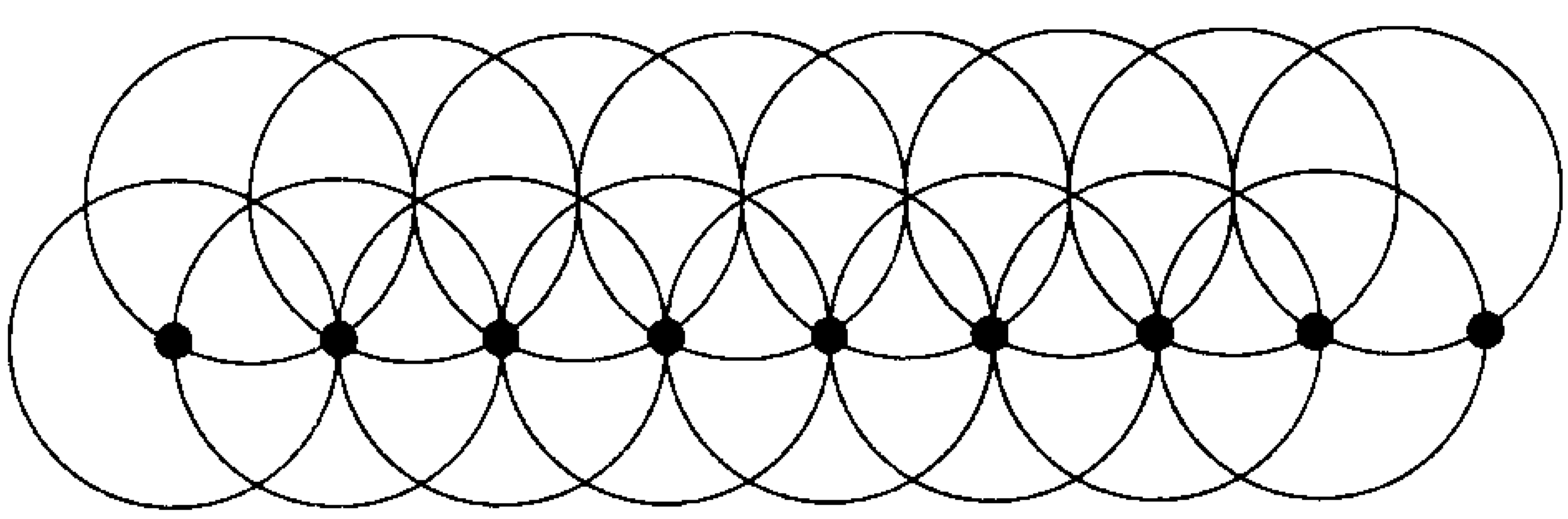


图 2-9

(10) 用一只圆规把已知线段 n 等分($n=3$ 的情形)(图2-10)

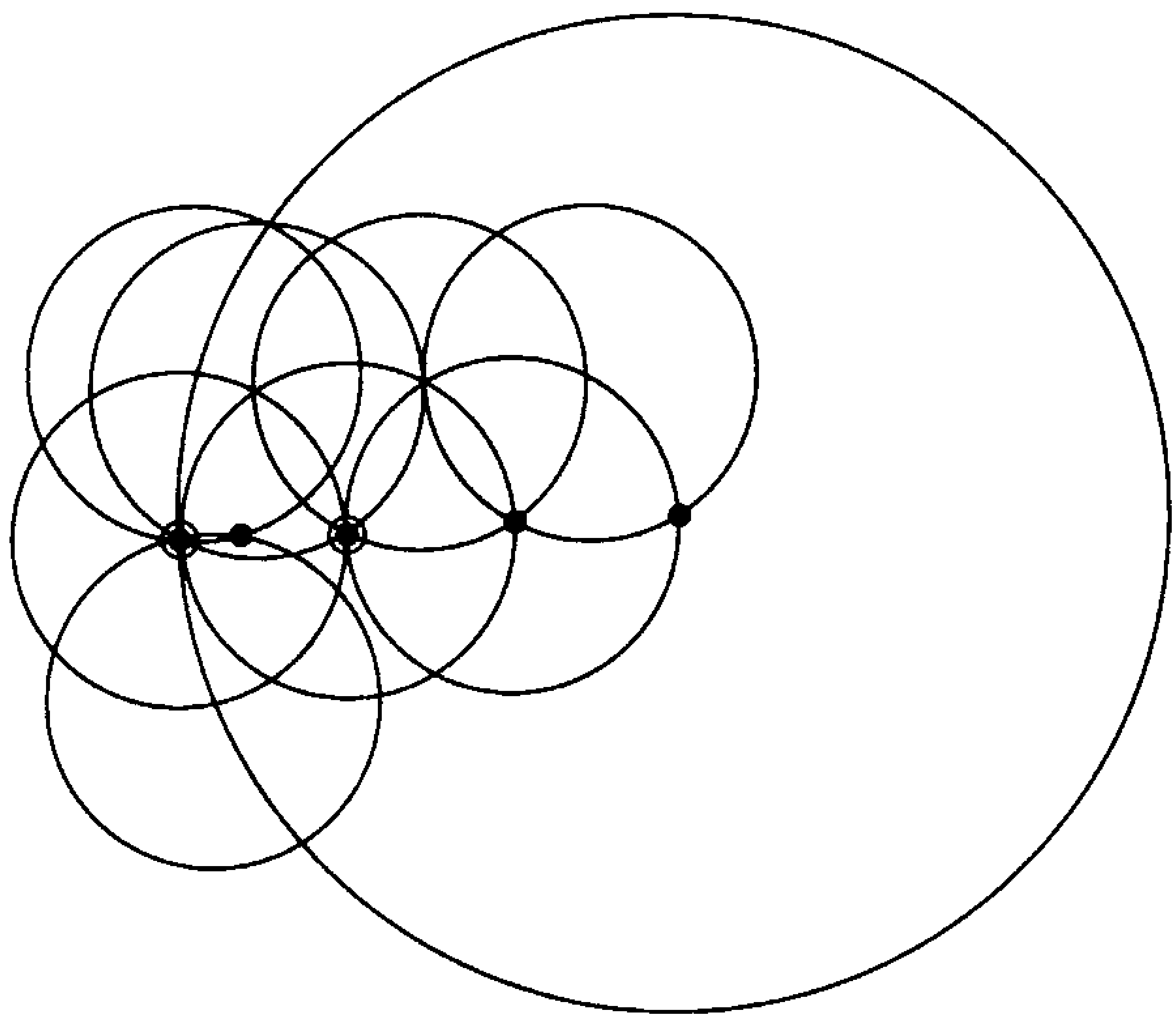


图 2-10

(11) 斜切香肠为什么切出椭圆(图 2-11)

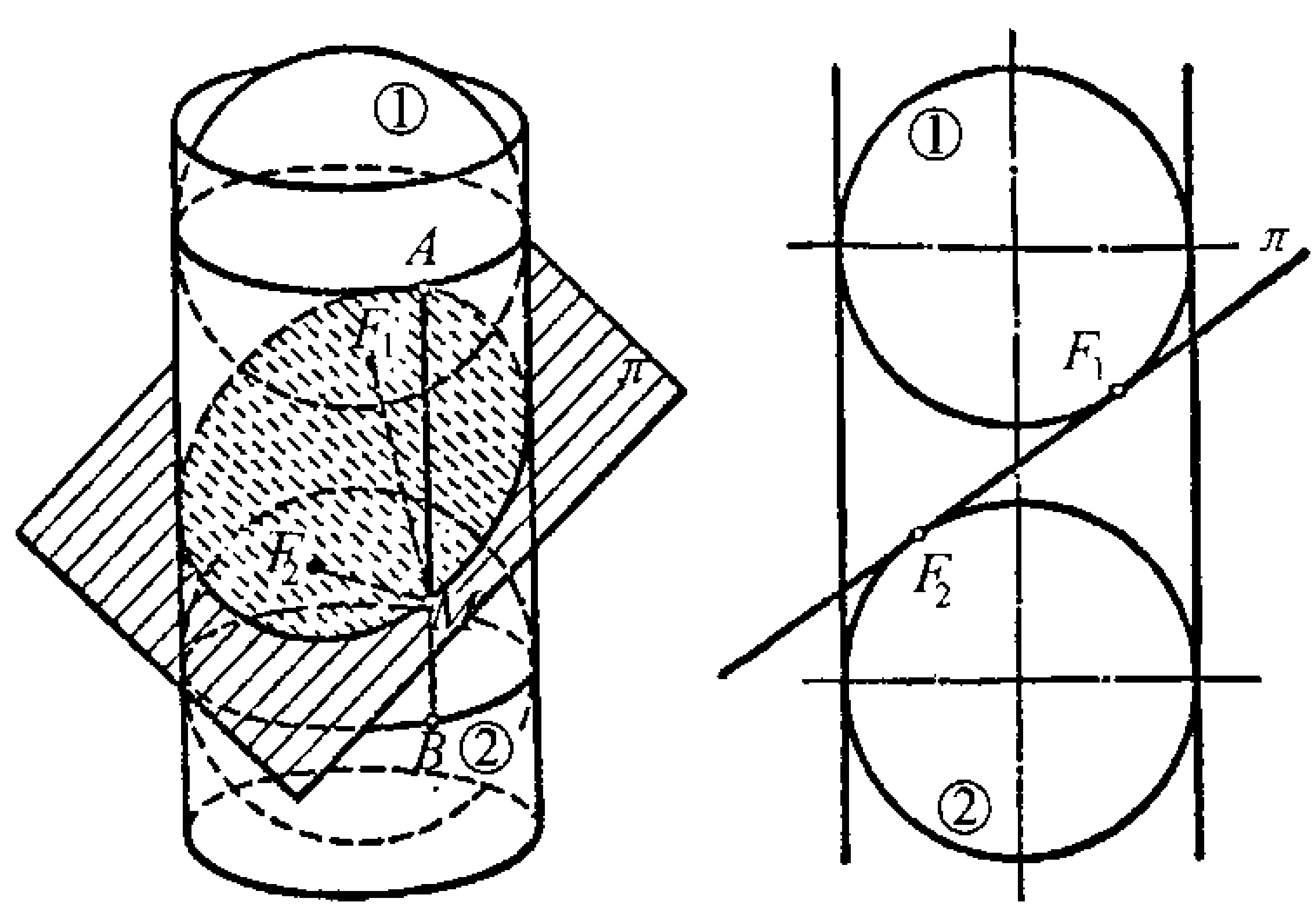


图 2-11

(12) 斜切胡萝卜为什么切出椭圆(图 2-12)

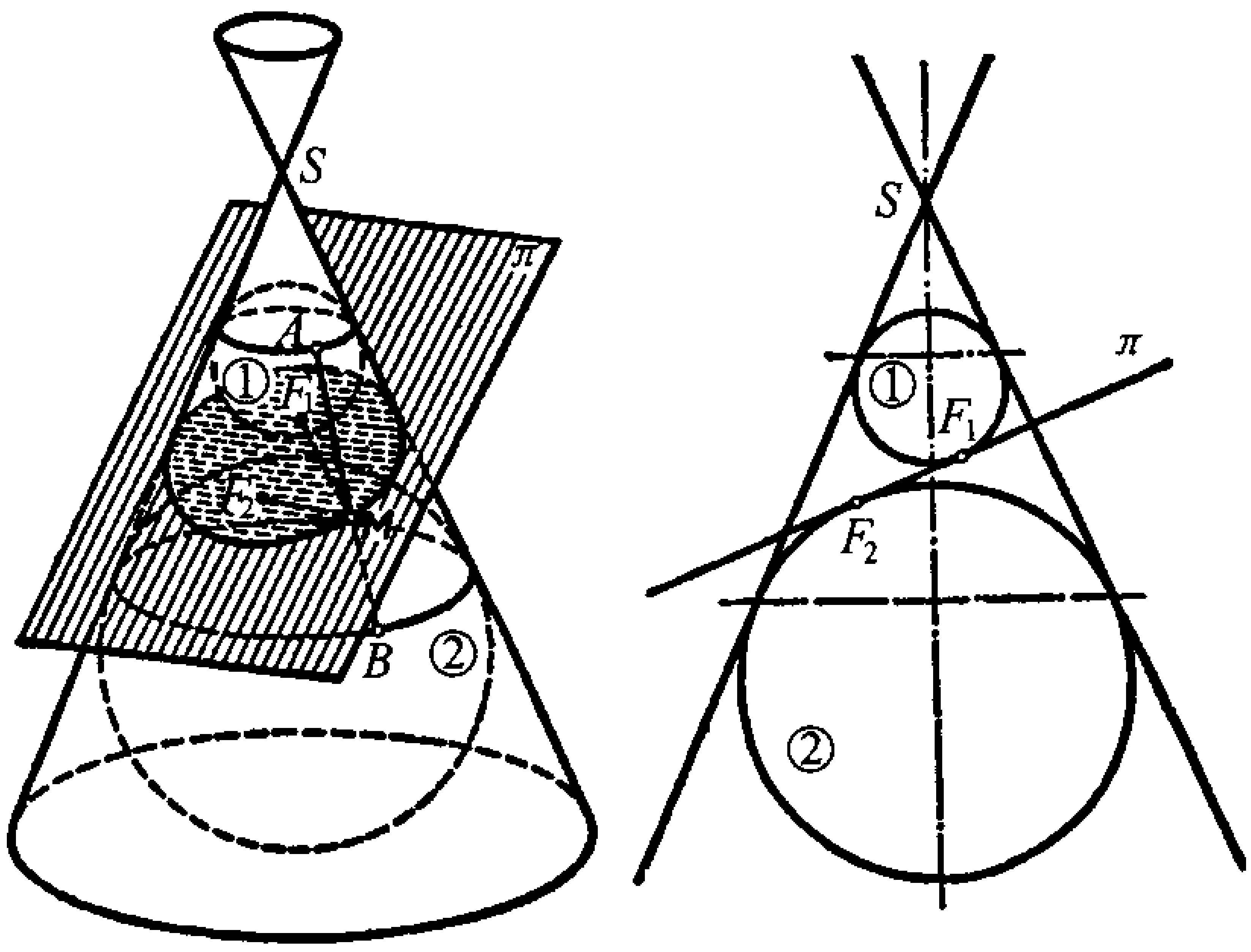


图 2-12

(13) 求立方体表面上从一顶点到对角顶点的最短路径(图 2-13)

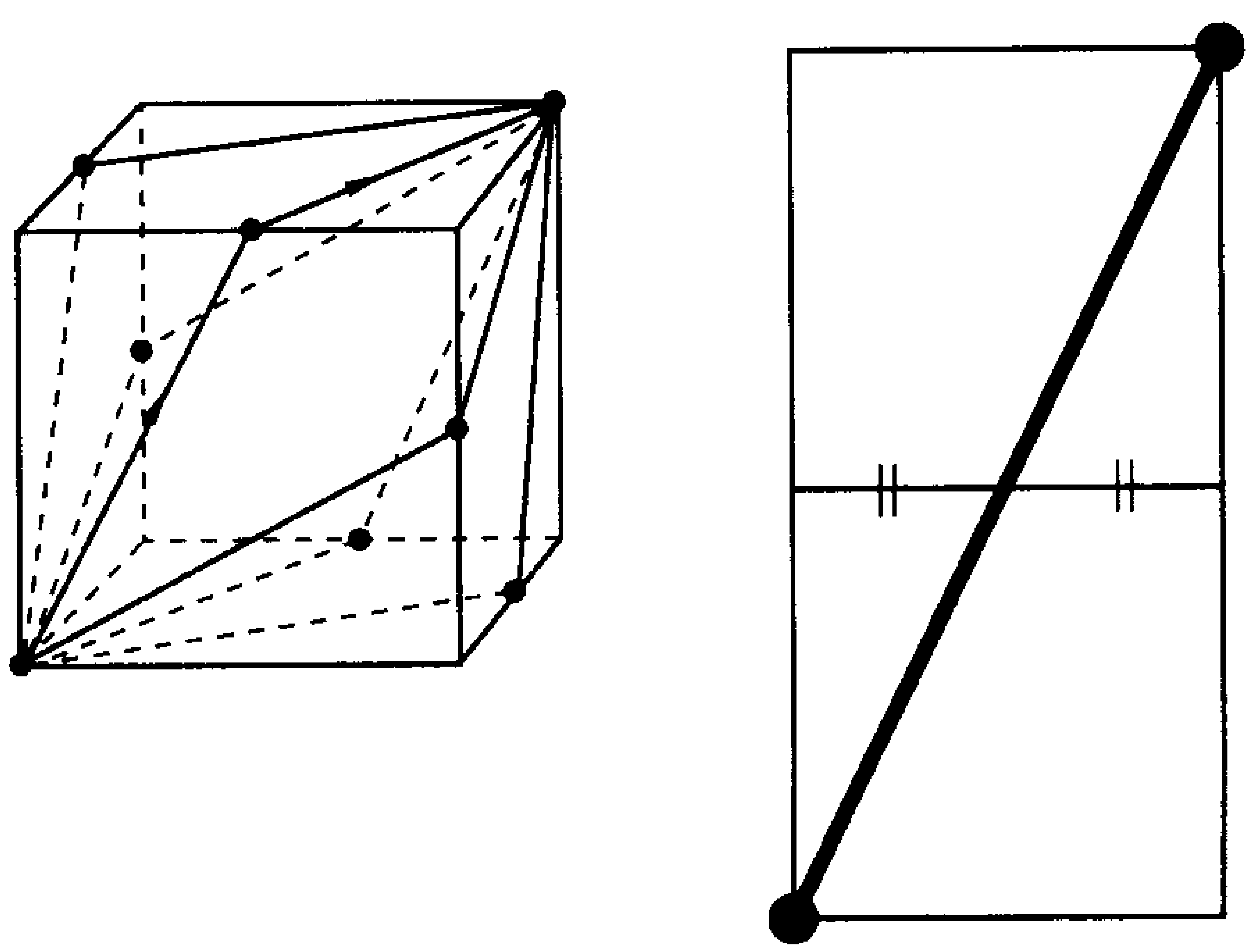


图 2-13

(14) 证明：$AH=\frac{1}{2}BC$，其中$\triangle ABC$ 是直角三角形，$ACFG$，$ABDE$ 是正方形(图 2-14)

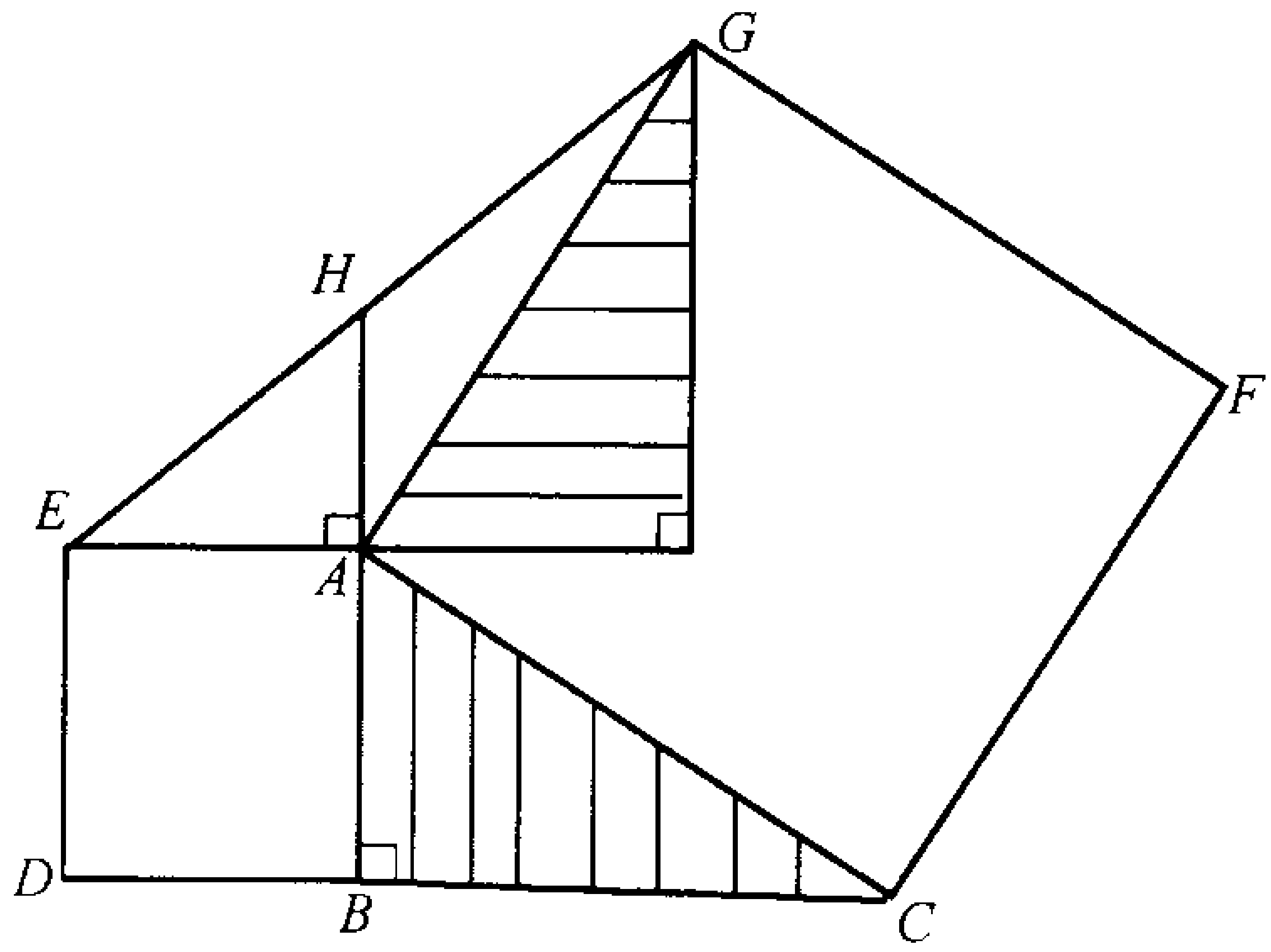


图 2-14

(15) 拓扑学家为什么不能区别实心油炸面圈和咖啡杯(图 2-15)

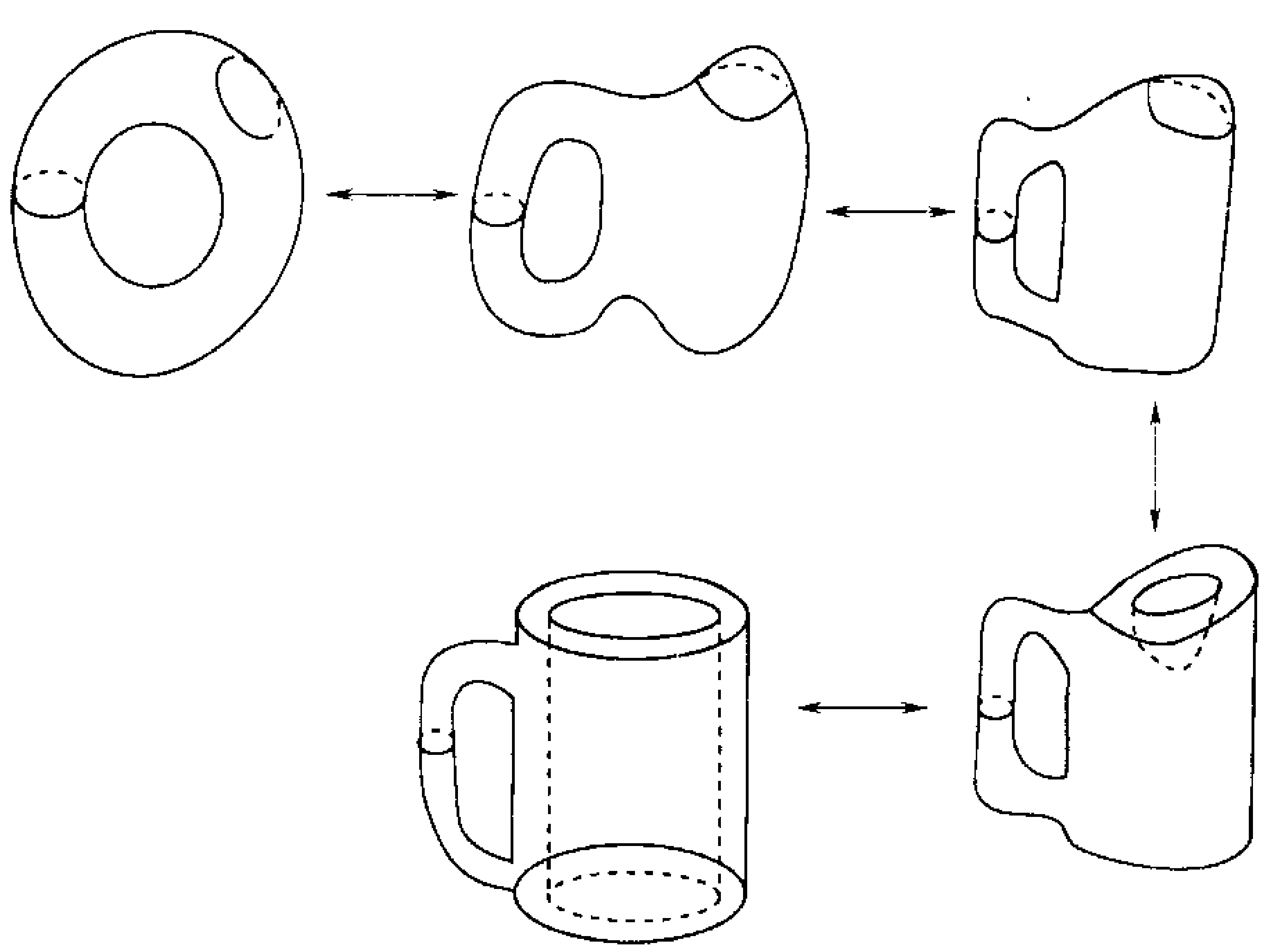


图 2-15

(16) 切一刀，把两张煎饼都平分，其中一张煎饼是正六边形，另一张是正八边形(图 2-16)

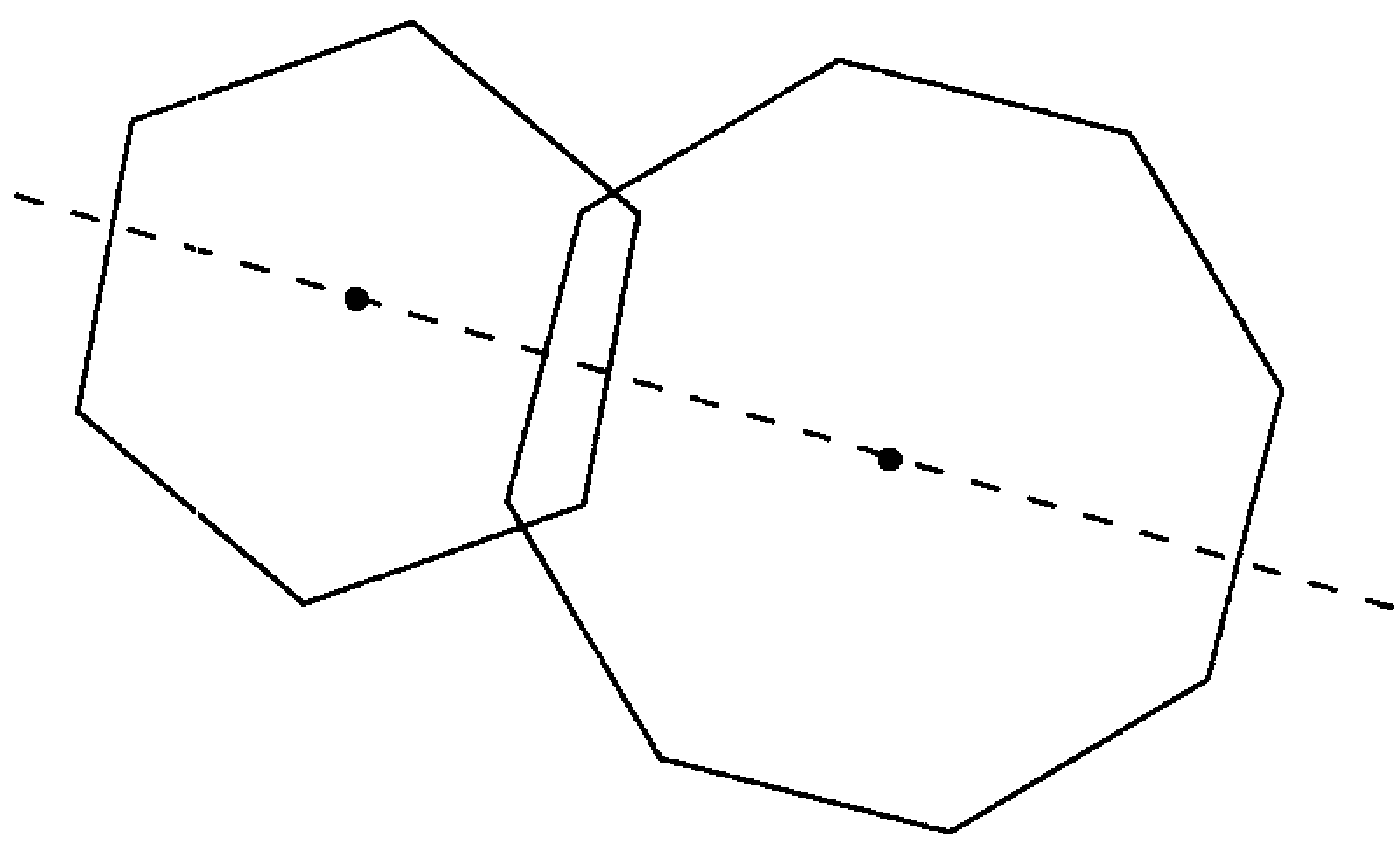


图 2-16

(17) 切一刀，把三块点心都平分，其中一个是球形的，一个是立方体，另一个是圆柱体(图 2-17)

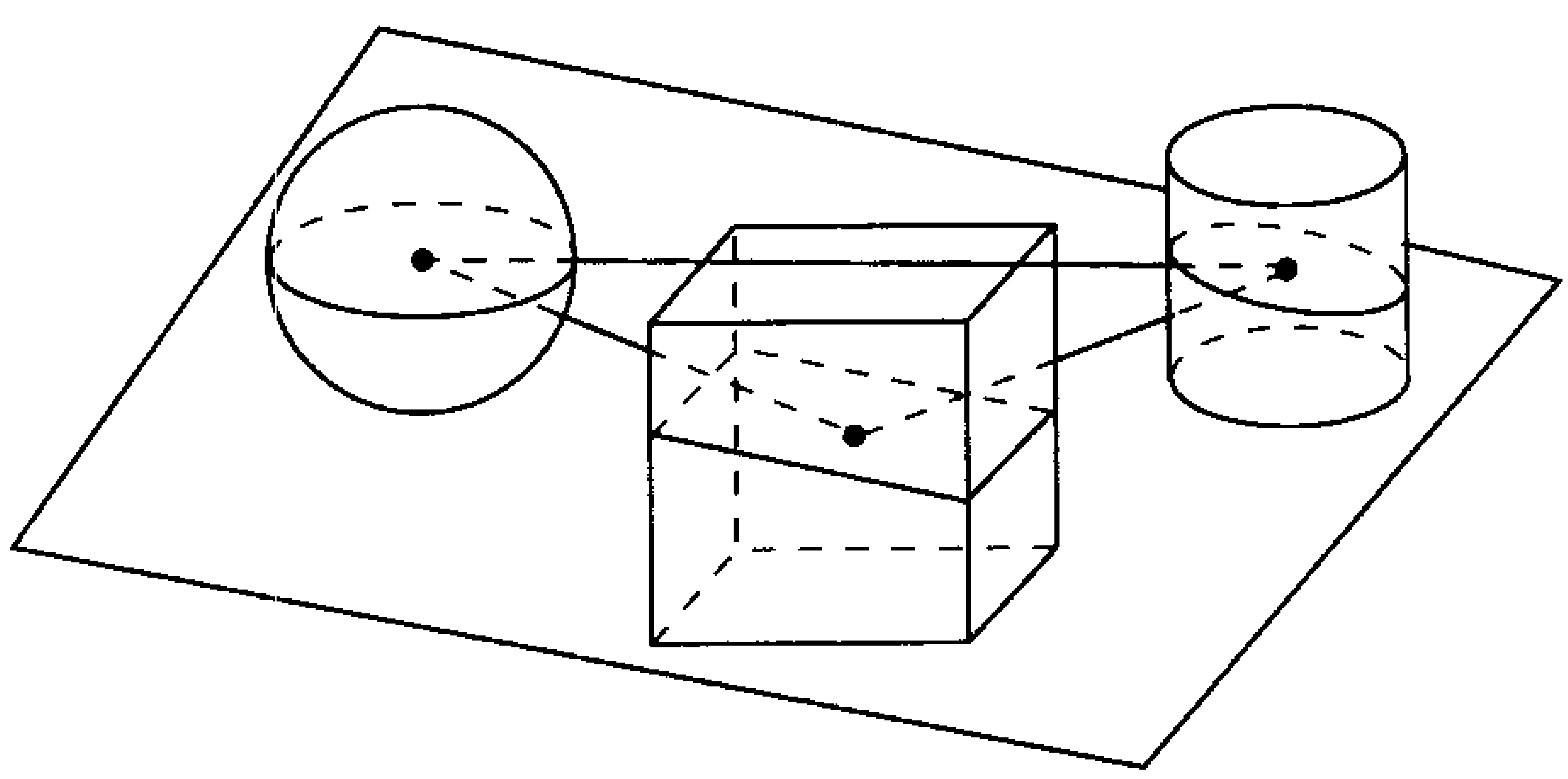


图 2-17

(18) 切两刀，把一块正六边形的煎饼切成四等份(图 2-18)

(19) 蚂蚁不必绕过边界就可爬遍纸带的表面(图 2-19)

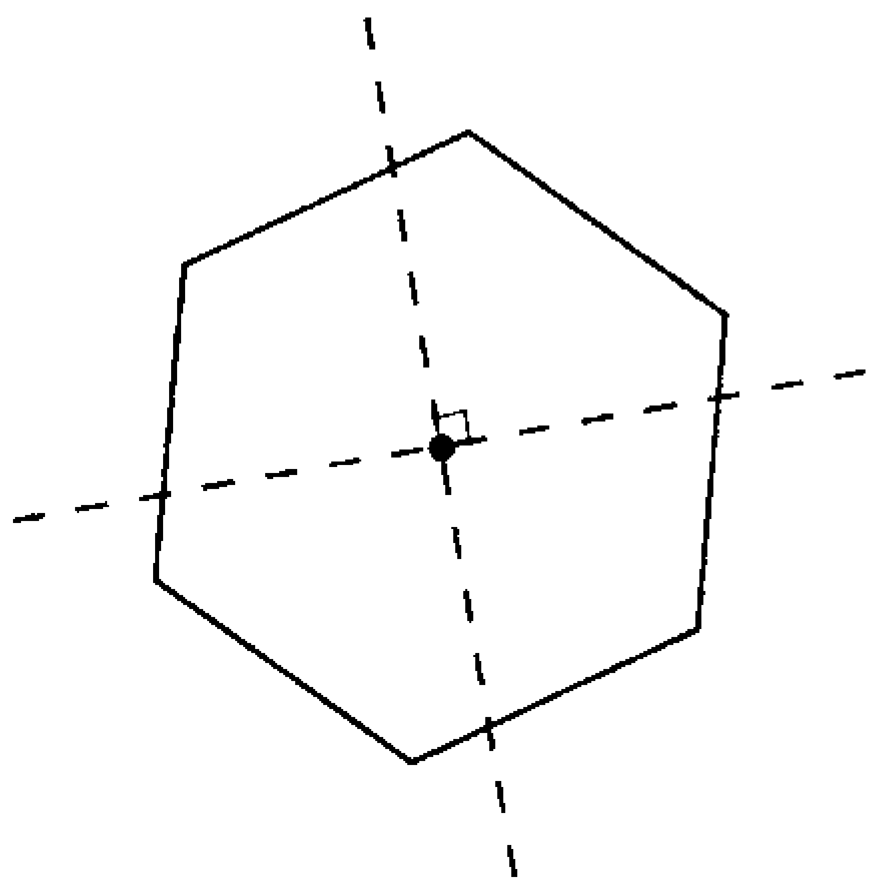


图 2-18

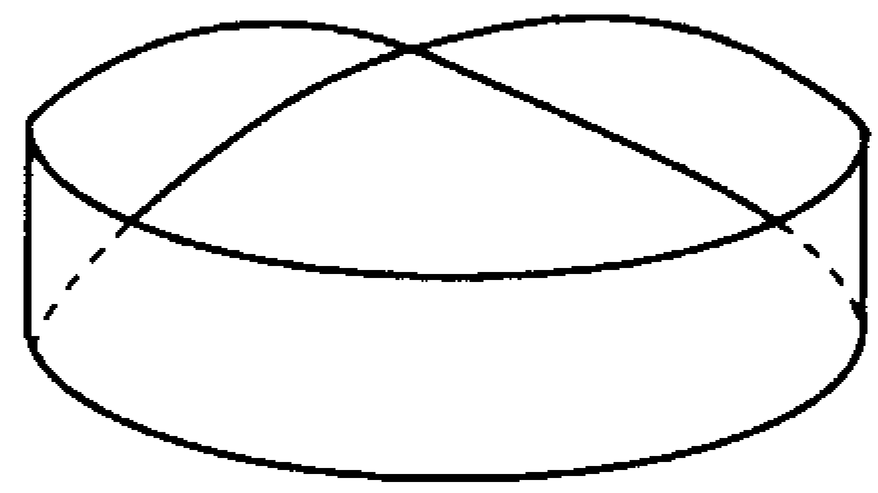


图 2-19

2.2 蜂巢颂

18 世纪,法国科学家雷奥乌姆尔(Reaumur)和马拉尔蒂(Maraldi)等人认真观测蜂巢,发现它外形是正六棱柱,下底是正六边形,顶部是三个全等的菱形,三个菱形与棱柱轴线成等角,三者彼此斜依而下倾,棱柱侧面皆全等的直角梯形,见图 2-20。

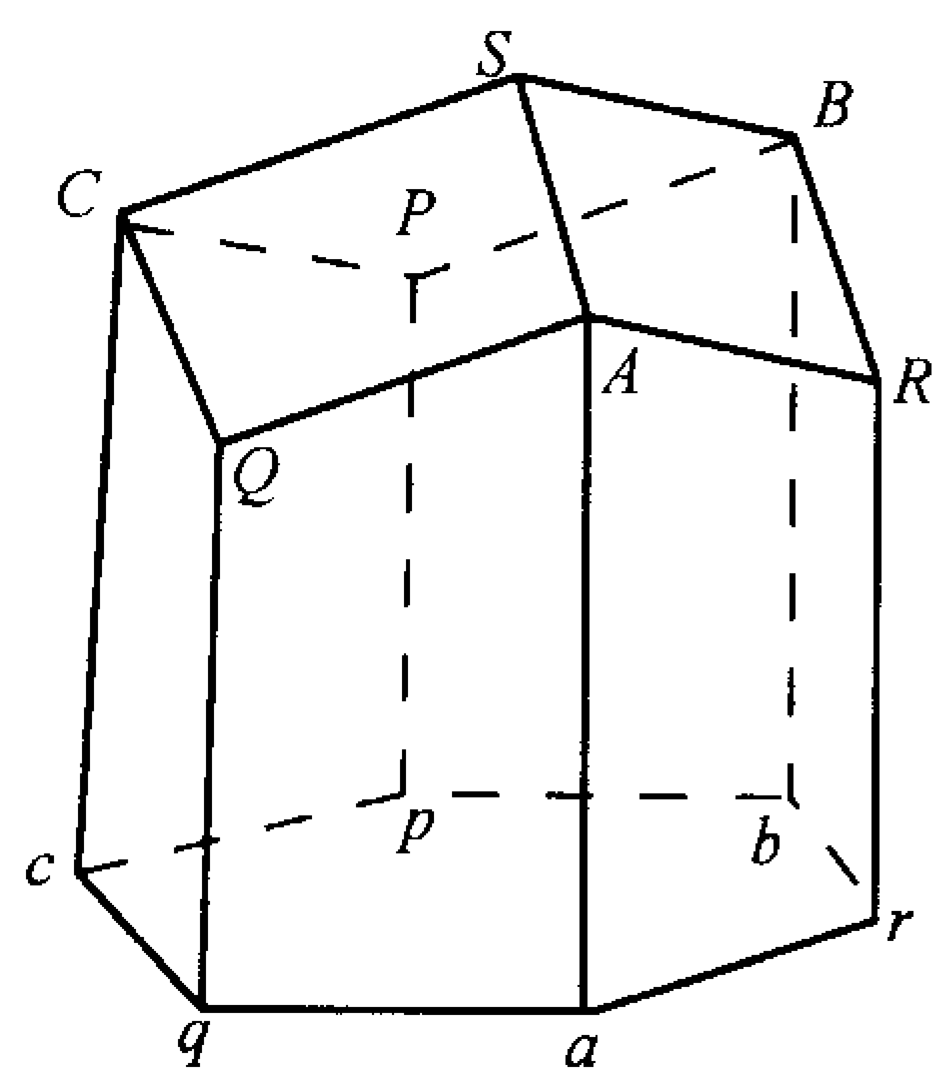


图 2-20

如此精美的蜂房造形,竟出自小小的蜜蜂之口足,实在令人不可

理解，莫非这些可爱的小动物除去勤劳无私、集体观念强、尊老爱幼等君子品质之外，还有非凡的智慧？

欣赏了蜂巢的艺术性之后，科学家在深思这种奇特结构的实用价值，猜想这种蜂房的顶盖设计可能是节省其建筑材料蜂蜡的最佳选择；雷奥乌姆尔就这种猜测请教瑞士数学家、巴黎科学院院士科尼希(Koenig)，科尼希严格证明了人们关于蜂巢最优性的猜测是真的，科尼希的论证如下。

设蜂巢底面的正六边形 $arbpcq$ 边长为 $2e$，则 $ac = ab = bc = 2\sqrt{3}e = AB = AC = BC$ 见图 2-21。

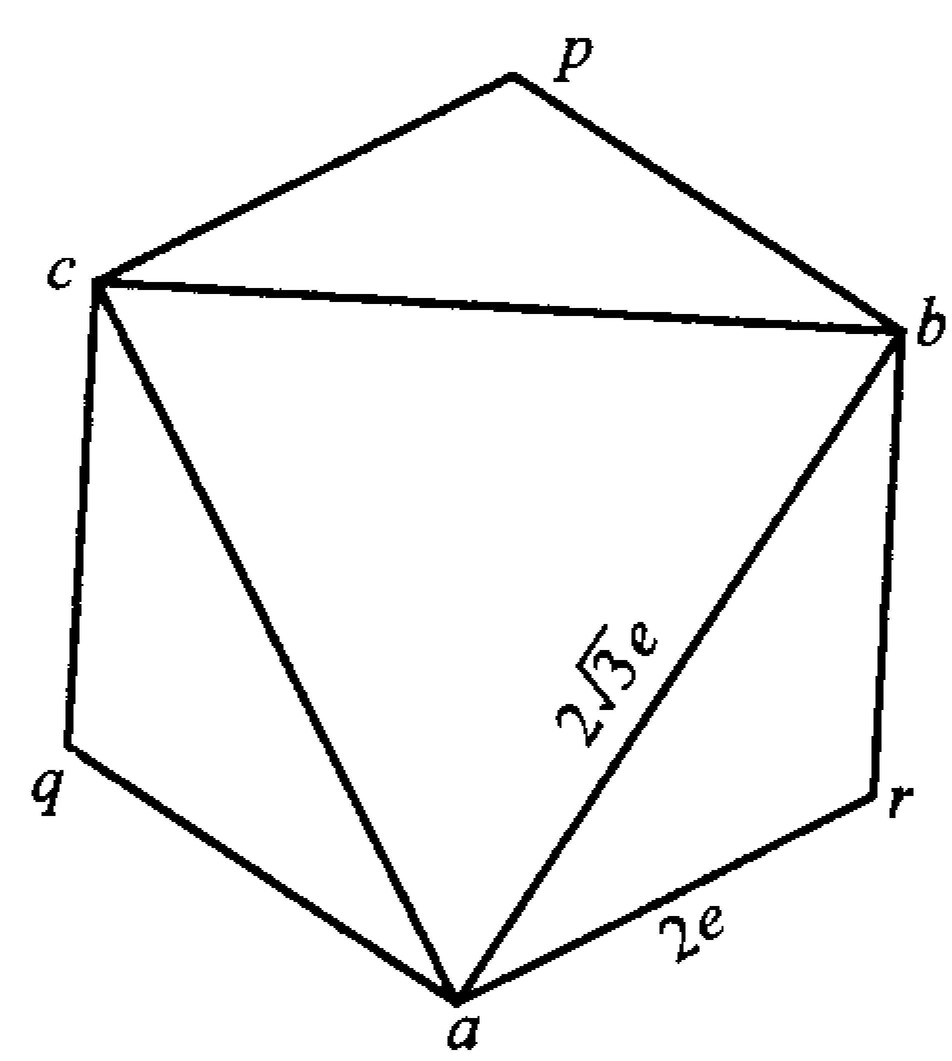


图 2-21

显然平面 ABC // 平面 PQR，设此二平面距离为 x，又 Q 点到平面 ABC 的距离与 S 点到平面 ABC 距离相等，所以 S 到 ABC 的距离也是 x。设菱形对角线 $SP = SR = SQ = 2y$，又 SR 在棱柱轴上投影为 $2x$，SR 在平面 PQR 上的投影为 $2e$，由勾股定理得

$$y^2 = x^2 + e^2 \tag{2.1}$$

设 P'，Q'，R' 分别是 P，Q，R 在平面 ABC 上的投影，则 $AR'BP'CQ'$ 是边长 $2e$ 的正六边形。用 $AR'BP'CQ'$ 做房顶与用蜜蜂的房顶造成的容积是一样的，这是因为蜜蜂在平面 ABC 上侧增加的空间是三棱锥 $S-ABC$，而在平面 ABC 的下侧减少了三个三棱锥 $P-BP'C$，$Q-AQ'C$，$R-AR'B$，这四个三棱锥同高 x，$\triangle BP'C + \triangle AQ'C + \triangle AR'B$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积。但两种结构的表面积不同，蜜蜂的设计省去了正六边形 $AR'BP'CQ'$ 的面积 $6e^2\sqrt{3}$，以及六个直角三角形 $\triangle PP'B$，$\triangle PP'C$，$\triangle QQ'A$，$\triangle QQ'C$，$\triangle RR'A$，$\triangle RR'B$，这六个三角形面积共计 $6ex$，但增加了三个菱形 $PBSC$，$QCSA$，$RASB$，这三

个菱形总面积为 $6\sqrt{3}ey$，蜜蜂实际节省的面积为

$$6e^2\sqrt{3}+6ex-6e\sqrt{3}y=6\sqrt{3}e^2-6e[y\sqrt{3}-x]$$

为了最大限度地节省屋顶面积，只需让 $\sqrt{3}y-x$ 最小。令 $v=\sqrt{3}x-y$，$u=\sqrt{3}y-x$，则由(2.1)式得

$$u^2-v^2=2(y^2-x^2)=2e^2,\ u^2=v^2+2e^2$$

因 $u=\sqrt{3}y-x>0$，故 $v=0$ 时，即 $y=\sqrt{3}x$ 时，u 取得最小值 $\sqrt{2}e$，这时 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e$；$y=\frac{\sqrt{6}}{2}e$。

下面计算由三个全等棱形来封盖正六棱柱所得的蜂房，容积一定时，为使其表面积最小，各种应有的数据。

$SR=2y=\sqrt{6}e<AB=2\sqrt{3}e$，即 SR 是屋顶菱形的短对角线，于是在 S 点的三个菱形的内角都是钝角。

设 $\angle SAR=2\varphi$，则 $\tan\varphi=\frac{SR}{AB}=\frac{2y}{2e\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\sqrt{8}$，$\cos2\varphi=\frac{1}{3}$，$2\varphi=70°32'$，菱形的钝角为 $109°28'$。

下面求出菱形的对角线 SP，SQ，SR 与棱柱轴线所构成的角 μ。显然 $\tan\mu=\frac{2e}{2x}=\sqrt{2}$，由于 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\mu=90°-\varphi=54°44'$。

菱形的面与棱柱横截面所成的角 θ 满足

$$\theta=90°-\mu=\varphi=35°16'$$

梯形 $AarR$ 的锐角 ψ 满足 $\tan\psi=\frac{2e}{x}=2\sqrt{2}=\tan2\varphi$，所以 $\psi=70°32'$，梯形 $AarR$ 的钝角为 $109°28'$。

以 S，P，Q，R 为顶的四个三面角相等。

以 A，B，C 为顶的三个四面角相等。

由于以上所述的三面角相等，四面角相等，以及以 Aa，Rr，Bb，Pp，Cc，Qq 为棱的二面角为 $120°$，所以蜂房上除下底为面的二面角

是 90°外，其余的一切二面角都是 120°。

法国的马拉尔蒂实地测量的结果：

菱形的钝角为 109°28′，锐角 70°32′，与理论结果完全一致，瑞士的科尼希实地测量的结果是：

菱形的钝角为 109°26′，锐角 70°34′，与理论结果只差 2′。

蜜蜂没有计算机，蜜蜂没有设计蓝图，蜜蜂没有指挥施工的工程师，却能营造出与数学家的理论分析一致的最优结构。蜜蜂不仅会酿蜜，而且是天才的建筑师！

2.3 蝴蝶定理

1815 年，西欧《男士日记》杂志上刊出一份难题征解，题目如下：

过圆的弦 AB 的中点 M 引任意两条弦 CD，EF，连接 ED，CF 分别交 AB 于 P，Q 两点，求证 $PM = QM$（见图 2-22）。

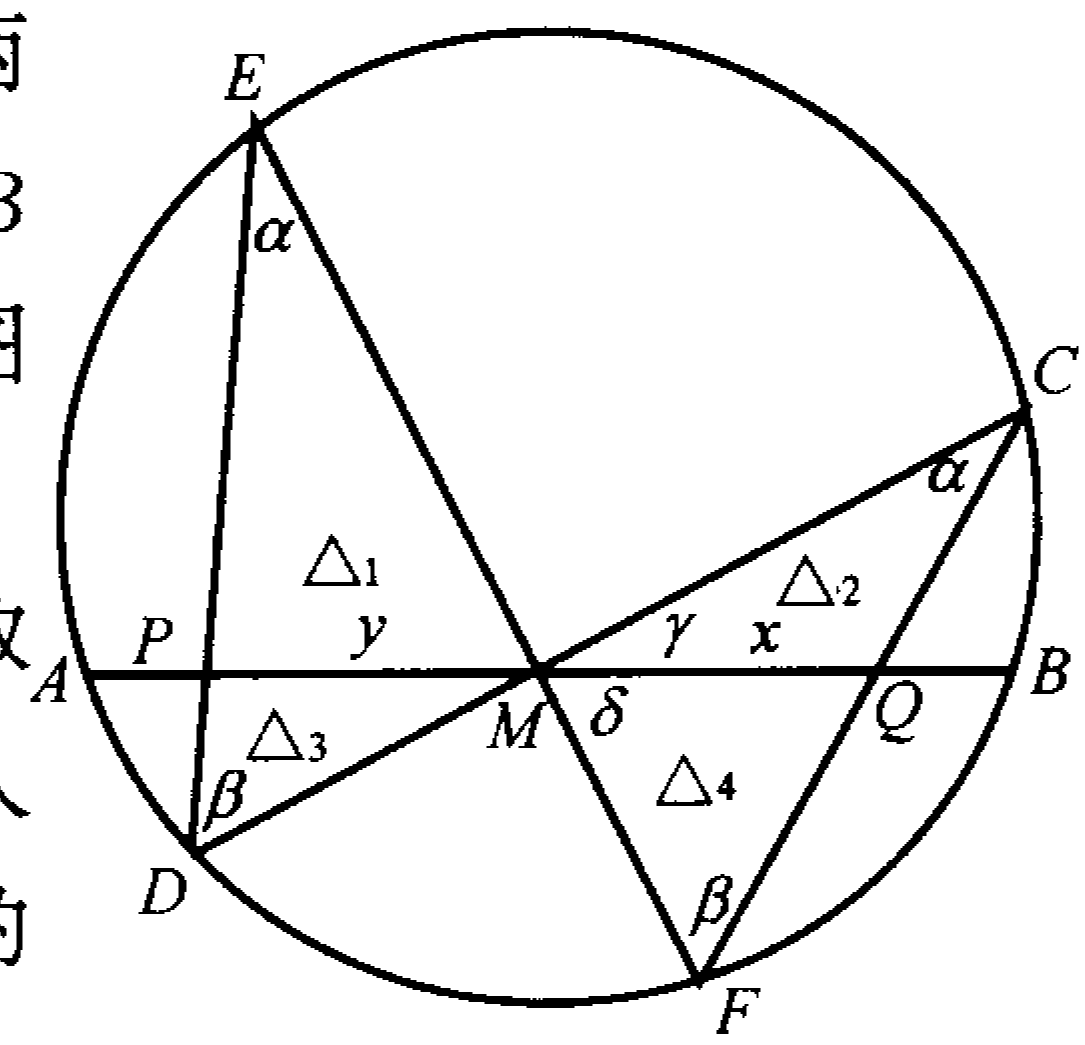


图 2-22

由于图形酷似一只蝴蝶，该命题取名为“蝴蝶定理”。一直过了四年无人作答。1819 年 7 月，一位自学成才的中学数学教师霍纳（W. Horner，1786～1837）给出第一个证明，但该证明方法繁琐难懂。从 1819 年开始，人们努力寻求简洁易懂的新证明，直到 1973 年，中学教师斯特温（Steven）给出了第一个十分初等、十分通俗的简捷证法，之后，又不断有新的证法发表。

下面介绍斯特温的证明。

令 $MQ = x$，$MP = y$，$AM = BM = a$，$\angle E = \angle C = \alpha$，$\angle D = \angle E = \beta$，$\angle CMQ = \angle DMP = \gamma$，$\angle FMQ = \angle EMP = \delta$。

用$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$，$\triangle_4$分别代表$\triangle EPM$，$\triangle CQM$，$\triangle DPM$，$\triangle FQM$的面积，则

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2}\cdot\frac{\triangle_2}{\triangle_3}\cdot\frac{\triangle_3}{\triangle_4}\cdot\frac{\triangle_4}{\triangle_1}=\frac{EP\cdot EM\ \sin\alpha}{CM\cdot CQ\sin\alpha}\cdot\frac{MC\cdot MQ\sin\gamma}{PM\cdot DM\sin\gamma}\cdot$$

$$\frac{PD\cdot DM\sin\beta}{FM\cdot QF\sin\beta}\cdot\frac{FM\cdot QM\sin\delta}{EM\cdot PM\sin\delta}=\frac{EP\cdot PD\cdot MQ^2}{CQ\cdot FQ\cdot MP^2}=1$$

由相交弦定理

$$EP\cdot DP=AP\cdot PB=(a-y)(a+y)=a^2-y^2$$

$$CQ\cdot FQ=BQ\cdot QA=(a-x)(a+x)=a^2-x^2$$

由于　$EP\cdot PD\cdot MQ^2=CQ\cdot FQ\cdot MP^2$，得

$$(a^2-y^2)x^2=(a^2-x^2)y^2$$

$$a^2x^2-x^2y^2=a^2y^2-x^2y^2,\ a^2x^2=a^2y^2$$

由于a,x,y皆正数，故得$x=y$，即$MQ=MP$，证毕。

斯特温的证明简捷漂亮之处在于：

①平面几何的综合证法(即“看图说话”的方法，用几何的定理公理来摆事实讲道理)不易下手，改用了代数的方法。

②欲证$x=y$，它们含在四个三角形中，用面积公式$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$把$x$与$y$引入等式之中。

③利用面积公式建立等式时，从一似乎“言之无物”的恒等式$\frac{\triangle_1}{\triangle_2}\cdot\frac{\triangle_2}{\triangle_3}\cdot\frac{\triangle_3}{\triangle_4}\cdot\frac{\triangle_4}{\triangle_1}=1$入手，抄入面积公式时，同一分数的分子分母中sin下的角取等角，以便把三角函数约掉，只剩下线段比。

④用相交弦定理把$EP\cdot PD$与$CQ\cdot FQ$化成x,y的表达式。

斯特温的证明通俗到初中的孩子们都能在5分钟内看懂的程度，对于这样一个困惑数学家很久的难题，该证明真是漂亮无比。

由于椭圆面是正圆柱面斜截面2-11。圆柱的底是此椭圆面的投

影，若此椭圆上有一弦 $A'B'$，中点是 M'，过 M' 引椭圆两弦 $C'D'$，$E'F'$，连 $E'D'$，$C'F'$ 分别交 $A'B'$ 于 P'，Q' 两点，则此带“ ' ”的图形的投影即图 2-22，而且 $MP=MQ$ 当且仅当 $M'P'=M'Q'$，所以蝴蝶定理对椭圆也成立。

2.4 拿破仑三角形

拿破仑·波拿巴(Napoleon, 1769～1821)，出生在地中海的科西嘉岛，毕业于法国炮兵学校，后任炮兵军官。此人对射击、测量中的几何与三角颇有研究，1804 年加冕成为“法兰西第一帝国”的皇帝，建立资产阶级的军事专政，称帝前与当时著名数学家拉普拉斯、拉格朗日等讨论过数学问题，以这位野心家和独裁者命名的“拿破仑三角形”就是他数学活动的代表作。

以任意给定的三角形的三边为边向形外和形内分别做三个正三角形，形外的三个三角形的中心为顶的三角形称为拿破仑外三角形，形内的三个三角形的中心为顶的三角形称为拿破仑内三角形。拿破仑发现：

拿破仑外三角形与拿破仑内三角形都是正三角形。

拿破仑崇尚实力与科学，例如他与拉普拉斯和拉格朗日私交甚厚，并封二位数学家为伯爵，任命他们为内阁大臣，经常向二位请教数学问题。拉普拉斯对拿破仑提出和证明的拿破仑三角形十分佩服，曾由衷地请这位皇帝给大家“上一次几何课”。

下面介绍拿破仑三角形是正三角形的证明。

设$\triangle ABC$ 的拿破仑外三角形是$\triangle PQR$，见图 2-23，其中 P，Q，R 分别是正三角形$\triangle BCA'$，$\triangle ACB'$，$\triangle ABC'$ 的外心，先证$\odot P$，$\odot Q$，$\odot R$ 交于一点 D，事实上，设$\odot Q$，$\odot R$ 交于一点 D，连接 AD，BD，CD，由于$\angle B'=\angle C'=60°$，则$\angle ADC=\angle ADB=120°$，于是$\angle BDC=120°$，又$\angle A'=60°$，故$\odot P$ 过 D 点(图 2-23 中$\angle BAC<$

120°；不然，$\angle BCA < 120°$）。

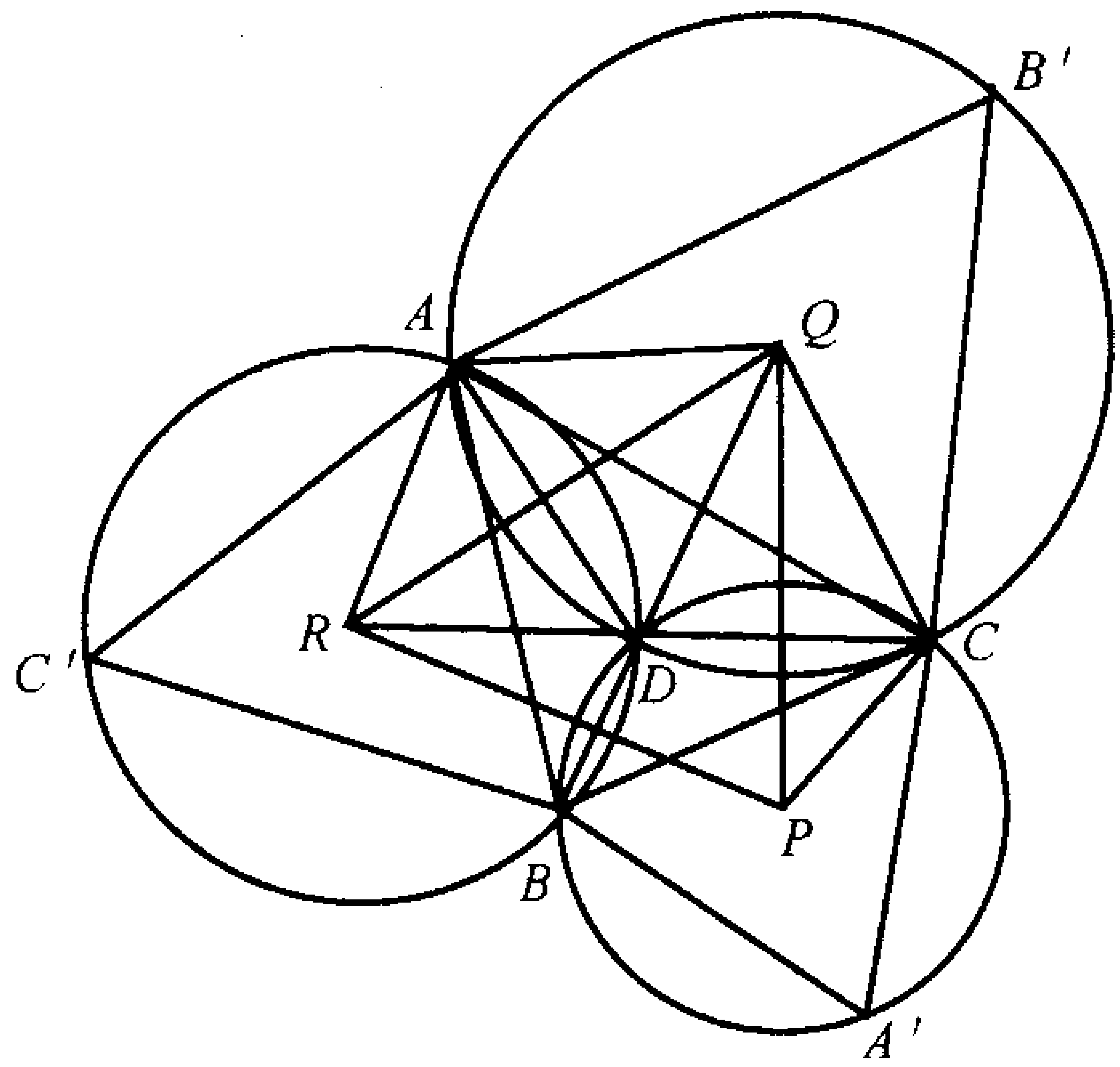


图 2-23

连 AR，AQ，DQ，DP，CP，CQ，DR，则 $\triangle ARQ \cong \triangle DRQ$，$\triangle DPQ \cong \triangle CPQ$，于是 $\angle AQR = \angle DQR$，$\angle DQP = \angle CQP$，又 $\angle AQC = 120°$，所以，$\angle RQP = \frac{1}{2}\angle AQC = 60°$；同理可得 $\angle PRQ = \angle RPQ = 60°$，于是 $\triangle PQR$ 是正三角形。

下面考虑拿破仑内三角形 $\triangle P'Q'R'$，见图 2-24，其中 $\triangle PQR$ 是 $\triangle ABC$ 的拿破仑外三角形，已有 $PQ = QR = RP$。设 $AC = b$，$AB = c$，$BC = a$，则有 $AQ = \frac{\sqrt{3}}{3}b$，$AR = \frac{\sqrt{3}}{3}c$，$\angle CAQ = \angle BAR = 30°$，所以 $\angle QAR = 60° + \angle BAC$。

在 $\triangle AQR$ 和 $\triangle AQ'R'$ 中，由余弦定理得

$$\begin{aligned} QR^2 - Q'R'^2 &= \frac{2}{3}bc[\cos(\angle BAC - 60°) - \cos(\angle BAC + 60°)] \\ &= \frac{4}{3}bc\sin\angle BAC\sin 60° \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3}\,bc\sin\angle BAC \end{aligned}$$

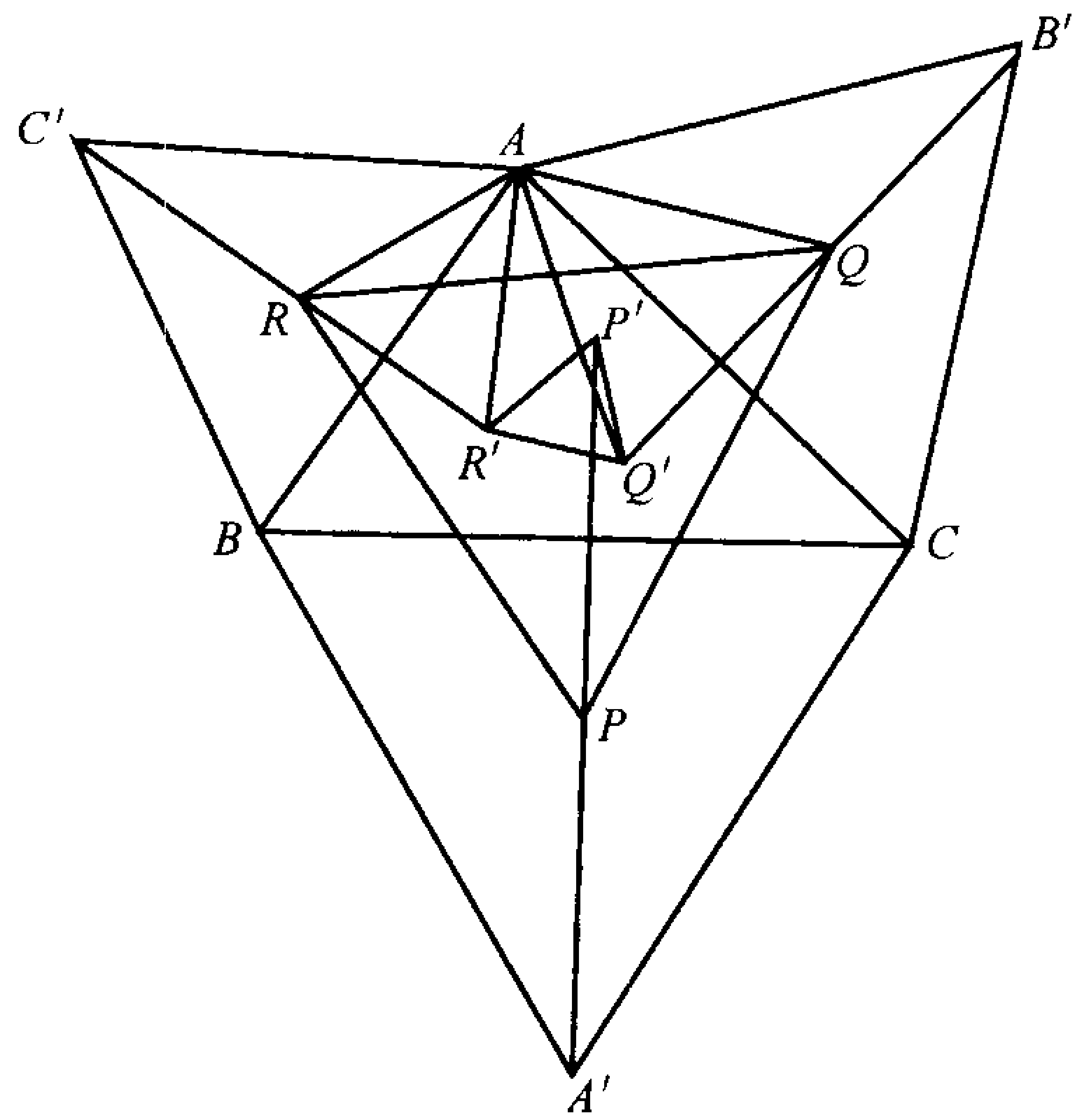


图 2-24

同理可得

$$PQ^2 - P'Q'^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}ab\sin\angle BCA$$

$$PR^2 - P'R'^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}ac\sin\angle ABC$$

又 $bc\sin\angle BAC = ab\sin\angle BCA = ac\sin\angle ABC = 2\triangle ABC$ 的面积，又 $QR = PQ = PR$，所以 $Q'R' = P'Q' = P'R'$，即拿破仑内三角形是正三角形。

由于拿破仑外三角形$\triangle PQR$ 的面积为

$$\frac{1}{2}QR^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}QR^2$$

拿破仑内三角形$\triangle P'Q'R'$的面积为

$$\frac{1}{2}Q'R'\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}Q'R'^2$$

所以

$$\triangle PQR - \triangle P'Q'R' = \frac{\sqrt{3}}{4}(QR^2 - Q'R'^2)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2}{3}\sqrt{3}\,bc\sin\angle BAC$$
$$= \triangle ABC$$

($\triangle ABC$ 等同时表示该三角形的面积),即拿破仑外三角形与内三角形面积之差恰为原三角形的面积。

历史上,帝王和国家领袖作数学者凤毛麟角,除拿破仑外,还有美国总统詹姆斯·加菲尔德和法国总统戴高乐。加菲尔德是美国第20届总统,1881年当选,共和党人,他给出了一个十分巧妙的关于勾股定理的证明,在波士顿《新英格兰教育杂志》上发表,现介绍如下。

$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle C$ 是直角,如图2-25,作 $BE \perp AB$,取 $BE = AB$,延长 CB 至 D,使 $BD = AC$,连接 ED,则 $ACDE$ 是直角梯形,其面积为 $\frac{1}{2}CD(AC + ED) = \frac{1}{2}(a+b)^2$。又此梯形面积为 $\triangle ABC + \triangle ABE + \triangle BDE = \frac{1}{2}c^2 + ab = \frac{1}{2}(a+b)^2$,所以 $\frac{1}{2}c^2 + ab = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + ab$,故 $c^2 = a^2 + b^2$。

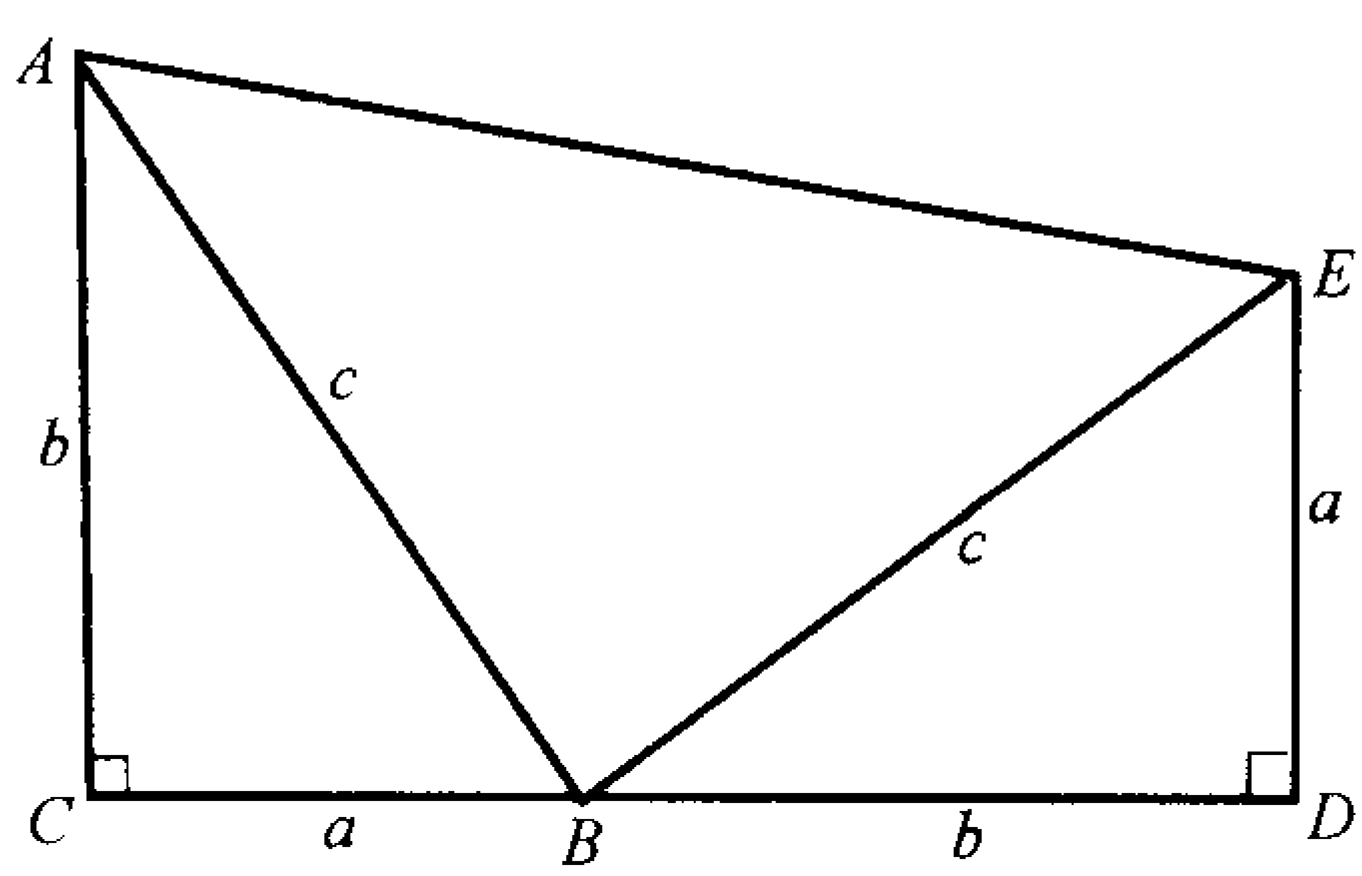


图 2-25

据说总统的这一巧妙证明是他与议员们做数学游戏时想出来的。

法兰西第五共和国总统戴高乐是反法西斯的英雄，他生前生活俭朴，去世后，墓前只有一块小小的墓碑，上刻“戴高乐之墓”，碑的另一面是一个洛林十字架造型。洛林原是法国领土，普法战争后割让给普鲁士，戴高乐生前胸前常佩带一个洛林十字架，不忘收复失地。

洛林十字架如图 2-26 所示，由 13 块 1×1 的小正方形构成。

戴高乐总统解决了如下的等分洛林十字架问题：

用圆规与直尺过 A 点作一直线，把十字架划分成面积相等的两部分。

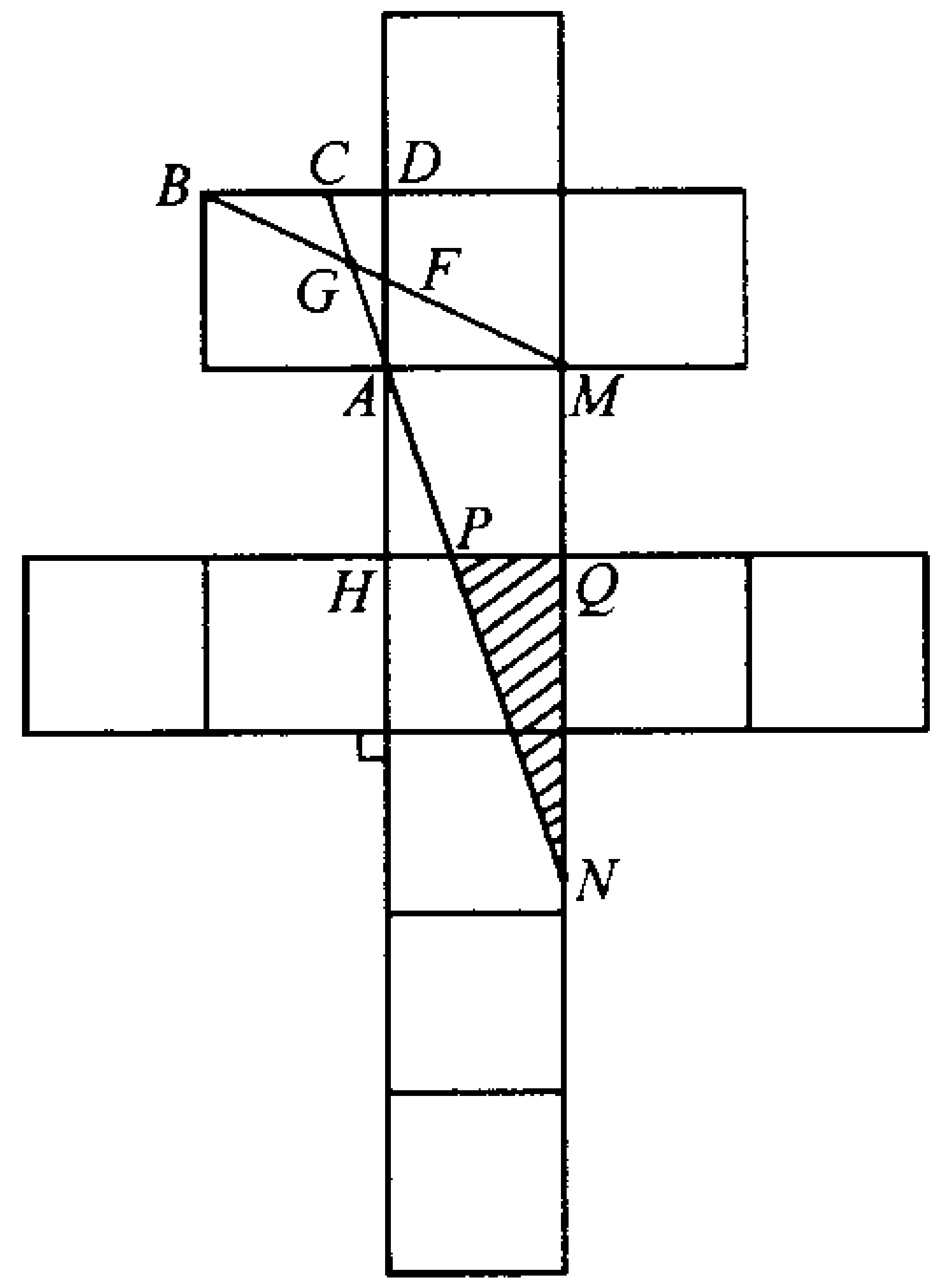


图 2-26

他的做法是：连接 BM，与 AD 交于 F 点，以 F 为圆心，FD 为半径作弧，此弧与 BF 交于 G 点；以 B 为圆心，BG 为半径作弧，此弧与 BD 交于 C 点。连 CA，延长 CA 与十字架边界交于 N 点，CAN 即为所求。

事实上，$\triangle ACD\cong\triangle AHP$，可见在 CAN 右侧的面积是 6 个小正方形加上 $\triangle PQN$ 的面积，只欠证 $\triangle PQN=\frac{1}{2}$。

$$\frac{\triangle ACD\text{ 的面积}}{\triangle PQN\text{ 的面积}}=\left(\frac{CD}{1-CD}\right)^2 \tag{2.2}$$

而 $CD=1-BC=1-BG$，$BG=BF-\frac{1}{2}$，$BF=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$BG=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$CD=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。

把 $CD=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 代入(2.2)得

$$\triangle PQN\text{ 的面积}=\frac{(1-CD)^2}{2CD}=\frac{1}{2}$$

2.5 高斯墓碑上的正 17 边形

1801 年,高斯在他的代表作《算术研究》一书中解决了用圆规直尺对圆周进行 17 等分的千年难题。欧几里得时代,已经有用规尺把圆周三等分和五等分的做法,令人不解的是在以后的两千多年当中,几何学家谁也不会用规尺把圆周 17 等分。高斯 19 岁时用代数方法解决了这一问题,轰动了当时的数学界。高斯逝世后,人们为了缅怀这位"数学家之王",在他的墓碑上刻了一个正 17 边形的美丽图案。

用复数 $a+ib$ 表示坐标为(a,b)的点,$a+ib$ 可以写成

$$a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$是点(a,b)到原点的距离,θ 是点(a,b)的向径与 x 轴之夹角。单位圆上的点可用 $\cos\theta+i\sin\theta$ 来表示。

棣美弗(A. Demoivre, 1667～1754)给出复数 n 次幂公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

正 n 边形的一个顶点在$(1,0)$,则它的全体顶点是

$$\varepsilon_1=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

$$\varepsilon_2=\cos2\varphi+i\sin2\varphi$$

$$\varepsilon_3=\cos3\varphi+i\sin3\varphi$$

……

$$\varepsilon_{n-1}=\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi$$

$$\varepsilon_n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi=1,\ \varphi=\frac{2\pi}{n}$$

于是此正 n 边形的顶点是方程 $Z^n=1$ 的 n 个根。我们只需求出 $Z^n=1$ 的除 1 之外的其他 $n-1$ 个根,则可以画出一个正 n 边形了,这 $n-1$ 个根满足

$$\frac{Z^n-1}{Z-1}=Z^{n-1}+Z^{n-2}+\cdots+Z^2+Z+1=0$$

为得到正 17 边形，应该解方程

$$Z^{16}+Z^{15}+\cdots+Z^2+Z+1=0 \tag{2.3}$$

取 $\varphi=\frac{2\pi}{17}$，$\varepsilon=\varepsilon_1=\cos\varphi+i\sin\varphi$。$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{17}$为正 17 边形的顶点($\varepsilon_0=\varepsilon_{17}$)。

考虑下列各点：

$$Z_0=\varepsilon, Z_1=\varepsilon^3, Z_2=\varepsilon^9, Z_3=\varepsilon^{10}, Z_4=\varepsilon^{13}, Z_5=\varepsilon^5,$$

$$Z_6=\varepsilon^{15}, Z_7=\varepsilon^{11}, Z_8=\varepsilon^{16}, Z_9=\varepsilon^{14}, Z_{10}=\varepsilon^8,$$

$$Z_{11}=\varepsilon^7, Z_{12}=\varepsilon^4, Z_{13}=\varepsilon^{12}, Z_{14}=\varepsilon^2, Z_{15}=\varepsilon^6$$

不难验证 $Z_i^3=Z_{i+1}$，$i=0,1,2,\cdots,15$。令

$$\begin{aligned} x_1 &= Z_1+Z_3+Z_5+Z_7+Z_9+Z_{11}+Z_{13}+Z_{15} \\ &= \varepsilon^3+\varepsilon^{10}+\varepsilon^5+\varepsilon^{11}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^7+\varepsilon^{12}+\varepsilon^6, \\ x_2 &= Z_0+Z_2+Z_4+Z_6+Z_8+Z_{10}+Z_{12}+Z_{14} \\ &= \varepsilon+\varepsilon^9+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^8+\varepsilon^4+\varepsilon^2, \end{aligned}$$

由于 $Z_i(i=0,1,2,\cdots,15)$是(2.3)的根，故

$$x_1+x_2=-1$$

经计算得知

$$x_1x_2=-4$$

所以 x_1,x_2 是二次方程

$$x^2+x-4=0$$

的两个根

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$u+v=17$ 时，ε^u 与 ε^v 关于实轴对称，见图 2-27。

考虑

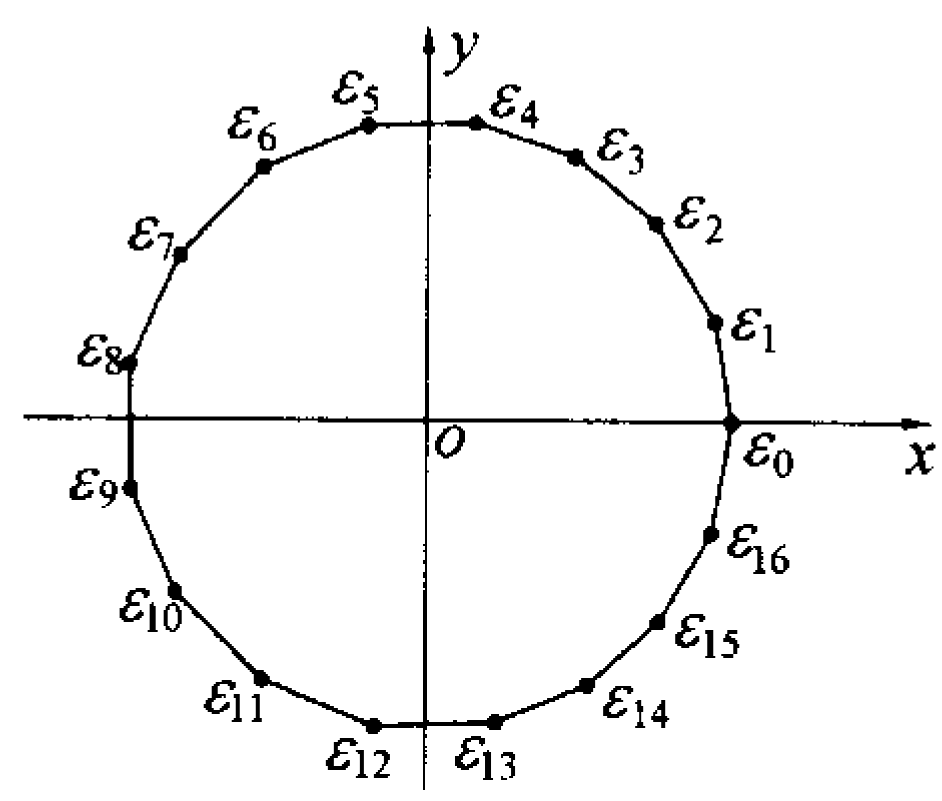


图 2-27

$$U = Z_0 + Z_4 + Z_8 + Z_{12} = \varepsilon + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4$$

$$u = Z_2 + Z_6 + Z_{10} + Z_{14} = \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2$$

$$V = Z_1 + Z_5 + Z_9 + Z_{13} = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12}$$

$$v = Z_3 + Z_7 + Z_{11} + Z_{15} = \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6$$

于是

$$U + u = x_2,\ V + v = x_1$$

$$Uu = Vv = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \cdots \varepsilon^{16} = -1$$

U 与 u 是二次方程 $t^2 - x_2 t - 1 = 0$ 的解；V 与 v 是二次方程 $t^2 - x_1 t - 1 = 0$的解。解得

$$U = \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 4}}{2},\ u = \frac{x_2 - \sqrt{x_2^2 + 4}}{2}$$

$$V = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4}}{2},\ v = \frac{x_1 - \sqrt{x_1^2 + 4}}{2}$$

令

$W = Z_0 + Z_8 = \varepsilon + \varepsilon^{16},\ w = Z_4 + Z_{12} = \varepsilon^{13} + \varepsilon^4$

则 $W + w = U$, $Ww = V$, W 与 w 是方程 $t^2 - Ut + V = 0$ 的两个实根, $W = \dfrac{U + \sqrt{U^2 - 4V}}{2}$, $w = \dfrac{U - \sqrt{U^2 - 4V}}{2}$。

由以上分析可得正 17 边形的做法步骤如下：

①用规尺作线段 $x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$(已知圆半径为 1)。

②用规尺作线段 U, V。

③用规尺作线段 W。

④在实轴上标出 W 点,作 OW 的垂直平分线与单位圆交于 A, B 两点,从(1,0)点到 A 点(或 B 点)的弦即为此圆内接正 17 边形的边长。

高斯的上述做法是几何、代数与复数的完美结合之典范。等分圆周的问题并非同一档次的问题,有的平凡原始,例如三等分,四等分和五等分,有的则植根于深刻的理论山巅之上。在代数基本定理(在复数范围内 n 次方程有 n 个根)和复数理论建立之前,凭任欧几里得、阿基米德乃至牛顿等大人物如何聪明,也未能解决貌似初等的作正 17 边形的问题;数学当中有不少这种性质的问题,表面上看,提法朴素初等,人人可以弄清楚是在要求干什么,甚至和已经解决了的问题似乎同类,但百思不得其解,其难度隐藏在某些尚未发现的数学理论之中,只能等待纯数学搞出那个可以解决该问题的理论之后,才会得出该问题的解法,作正 17 边形和化圆为方等规尺作图就是这种性质的问题。

2.6 椭圆规和卡丹旋轮

1657 年,荷兰数学家施古登(F. Schooten, 1615~1660)提出如下的有趣问题:

平面上给定三角形的两个顶点沿平面上一个角的两边滑动,求第三个顶点的轨迹。

在上述施古登问题提出一千多年前,鲍克勒斯(B. Proclus, 410~

485)提出并解决了下面类似的问题：

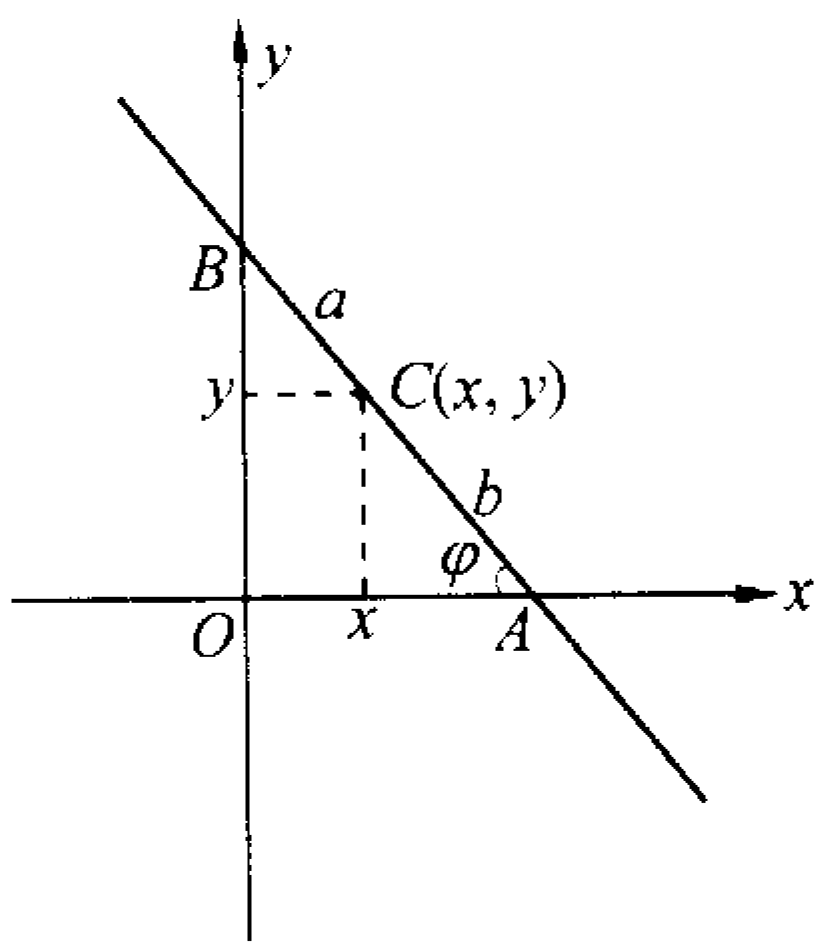


图 2-28

一条动直线上有三个点，其中两个点沿一个固定的直角的两个边滑动，求第三点的轨迹。

事实上，把直角的两条边视为正 x 轴与正 y 轴，直线上的点 A 在 x 轴上滑动，B 点在 y 轴上滑动，见图 2-28。C 点坐标为 (x, y)，设直线与 x 轴夹角为 φ，则

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$$

其中 $BC = a$，$AC = b$，于是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

可见 C 点在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上，C 点在 AB 线段之外时，相似地可以知道 C 点的轨迹仍为椭圆。

用鲍克勒斯轨迹可以制作一个椭圆规：

在木制十字架上开两个成直角的槽，一根杆子的两端各有一只滑钉固定在杆子上，杆子的某点上固定一支铅笔，当两端钉子在槽内滑动时，铅笔画出椭圆。

我们发现，鲍克勒斯轨迹中的直角是施古登轨迹中那个角的特殊情形，直线上的三个点 A, B, C 是施古登轨迹中那个三角形的顶点。所以施古登轨迹是鲍克勒斯轨迹的推广。

设 α 是平面上固定的角，$\triangle ABC$ 的顶 A 与 B 在 α 两边上滑动，以 AB 为弦以 α 为弦 AB 所对的圆周角作圆 O，过中心 O 与 C 的直线与 $\odot O$ 交于 D 点与 E 点，当 $\triangle ABC$ 的 A, B 顶在 $\angle\alpha$ 边上滑动时，此动圆始终过 $\angle\alpha$ 的顶点 F，动圆直径长不变。$\angle EFD$ 始终是直角，见图 2-29。从 D, E, C 三点来看，此三点是一条动直线上的三个点，

E 与 D 分别在一个直角两边上滑动，由鲍克勒斯轨迹知，C 点的轨迹是椭圆。

意大利数学家卡丹(Cardano, 1501～1576)设计了一个所谓卡丹旋轮：一个圆盘沿另一大圆盘的内沿滚动，大圆盘半径是小圆盘的 2 倍。

卡丹问：小圆盘上任标定的一点的轨迹是什么？

卡丹答：该轨迹是一个椭圆。

设开始时标志点 M 在小圆盘直径 AB 上，且 A 与大圆盘中心 O 重合，B 在大圆盘边界上 D 点。作大圆盘正交的直径 CD 与 EF，见图 2-30。滚动的过程可视为 A, M, B 在动直线上，A, B 两点沿直角边滑动，求 M 点的轨迹，由鲍克勒斯轨迹知，M 点的轨迹是一个椭圆，其半轴分别为 AM 与 MB。

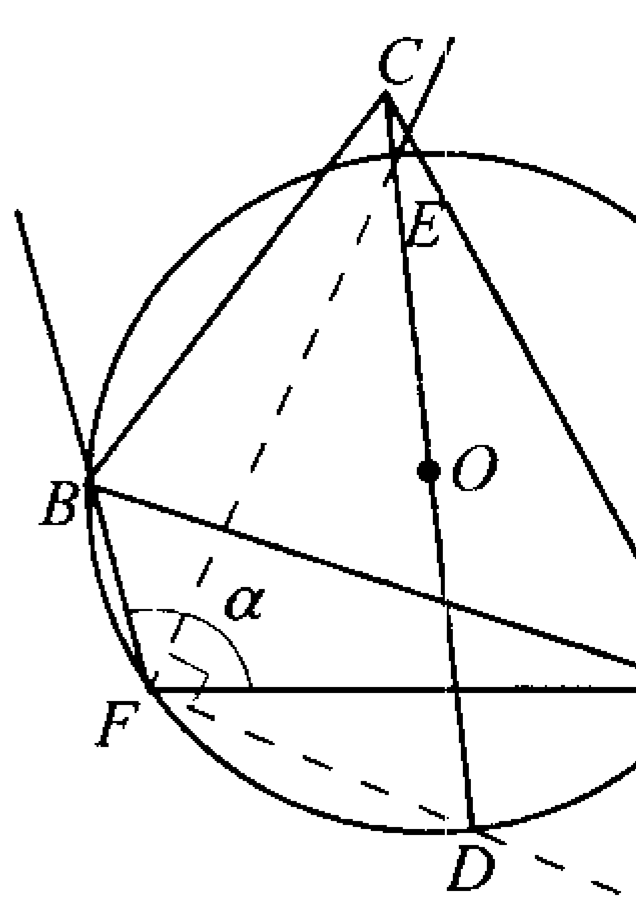


图 2-29

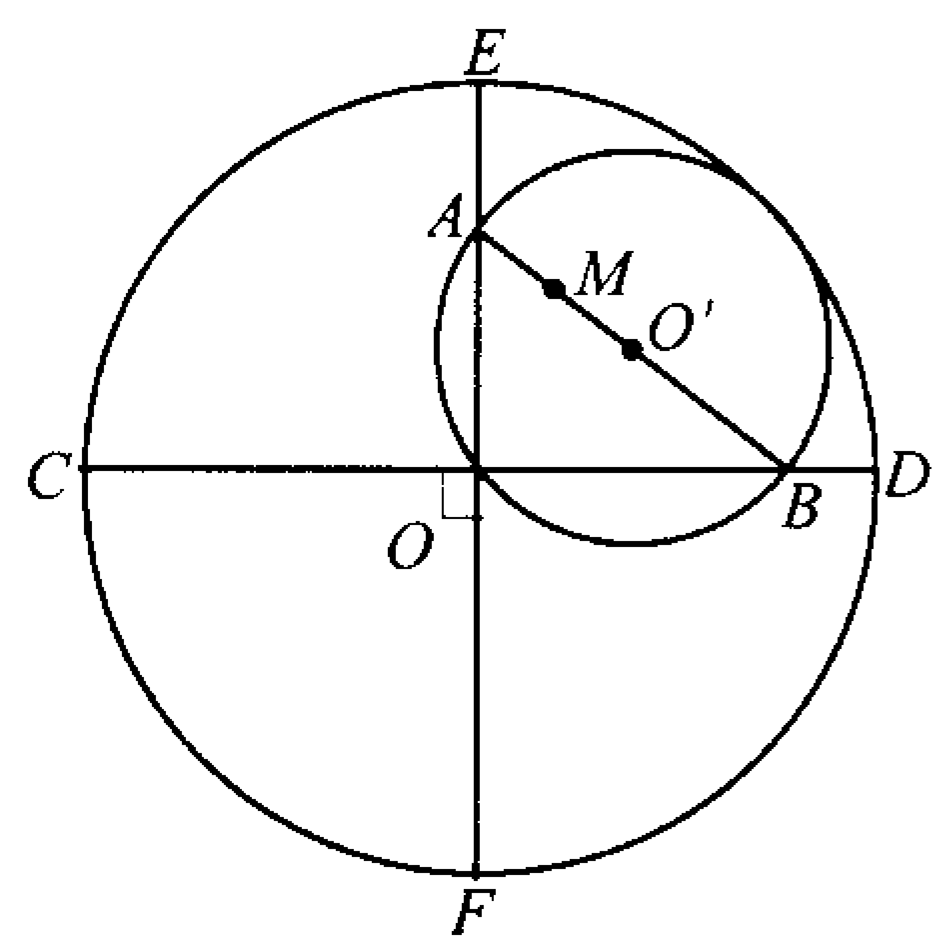


图 2-30

市场上有一种称为“大白兔繁花规”的数学玩具，大白兔形的塑料板上挖掉一个圆片，内侧制成小齿牙，另有五只较小的圆盘，半径不一定如卡丹旋轮那样是白兔身上圆孔半径之半，小圆盘边缘也有齿牙，每个小圆盘上钻有小孔若干，把圆珠笔尖插入小孔，且使小圆盘沿大白兔身上的孔滚动，则圆珠笔在下面垫的纸上画出奇妙对称的图案。此游戏明显是受了卡丹旋轮的启发发明的，不难证明，仅当

小圆盘的公转周期与其自转周期之比是有理数时，才能画出封闭曲线。卡丹旋轮的公转周期与自转周期之比是2，所以它画出的是闭曲线（椭圆），建议读者自制一套或选购一套繁花规玩玩看，画出的图案一定使你赏心悦目。

2.7 阿尔哈达姆桌球

公元1000年左右，阿拉伯数学家阿尔哈达姆（965～1039）提出下面的桌球问题：

一张圆形弹子台上有两个弹子球，用什么方法冲击一球，使该球碰到台边折回后恰撞击到另一只球？

上述问题的等价提法有：

①在已知圆内作一个两腰分别过圆内两个已知点的圆内接等腰三角形。

②在一个圆的圆周上找一点，使其与圆内两已知点的距离之和最小。

③在一个球面凹面镜上找一点，使由一个已知点射来的光线在此点反射到另一已知点。

阿尔哈达姆的名字很啰嗦，英文译名为 Abu Ali al Hassan ibn al Hassan ibn Alhaitham，有时被译成阿尔哈森（Alhazen）。很多有名的数学家研究过阿尔哈达姆问题，例如黎卡提、休金斯、巴诺等知名人物。

下面介绍①这种提法的解答。

设 O 为已知圆心，r 是半径，圆内已知点为 $P(A, B)$ 和 $p(a, b)$，直角坐标系的原点为 O。

设$\triangle MSs$ 是已作出的圆内接等腰三角形，记$\angle SMO = \Phi$，$\angle sMO = \varphi$，则 $\Phi = \varphi$，见图2-31。设 PM，OM，pM 与x 轴夹角分别

为 Λ,μ,λ,则

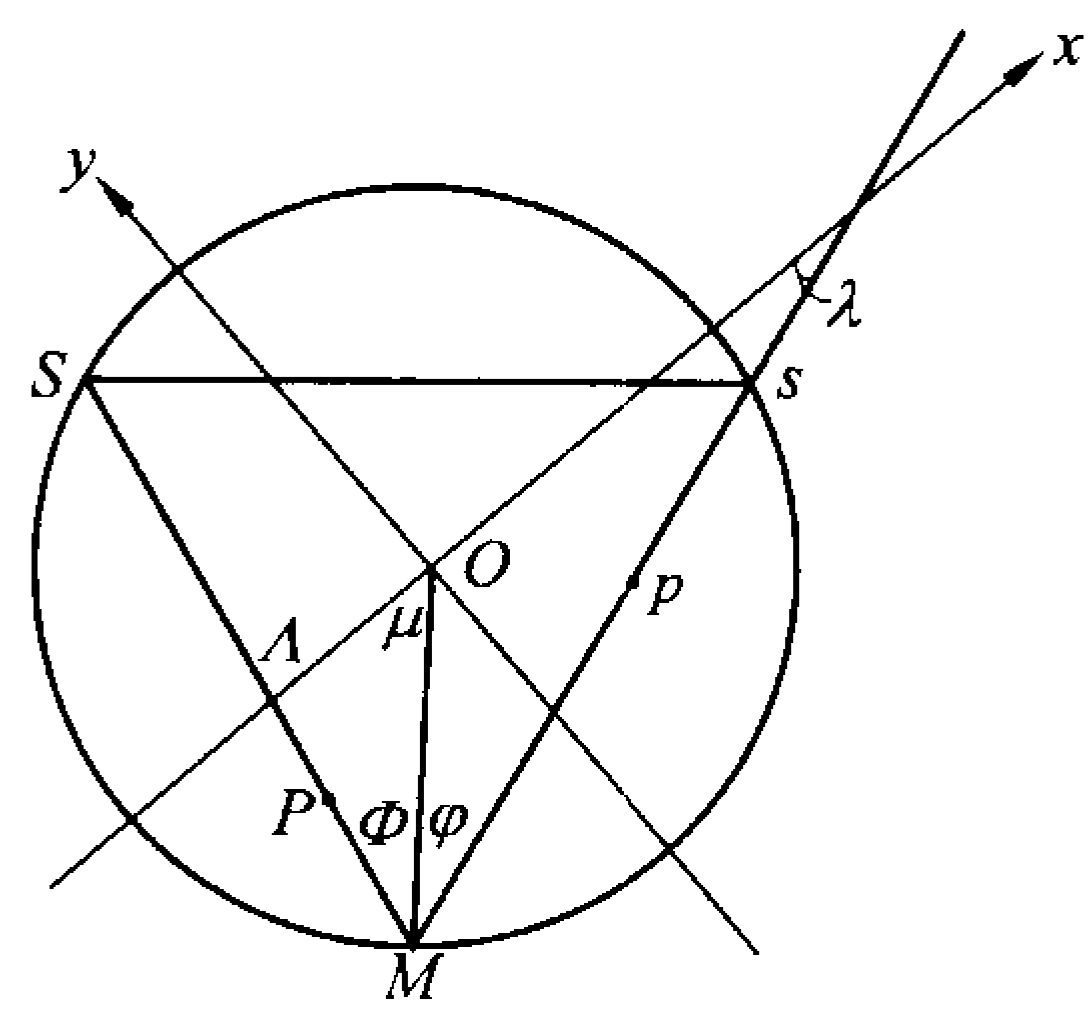


图 2-31

$$\Phi=\Lambda-\mu,\ \varphi=\mu-\lambda$$

$$\tan\Phi=\frac{\tan\Lambda-\tan\mu}{1+\tan\mu\tan\Lambda},\ \tan\varphi=\frac{\tan\mu-\tan\lambda}{1+\tan\mu\tan\lambda}$$

设 M 的坐标是(x,y),则

$$\tan\Lambda=\frac{y-B}{x-A},\ \tan\mu=\frac{y}{x},\ \tan\lambda=\frac{y-b}{x-a}$$

由于 $\tan\Phi=\tan\varphi$,故有

$$\frac{\frac{y-B}{x-A}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\frac{y-B}{x-A}}=\frac{\frac{y}{x}-\frac{y-b}{x-a}}{1+\frac{y}{x}\frac{y-b}{x-a}}$$

$$\frac{Ay-Bx}{x^2+y^2-Ax-By}=\frac{bx-ay}{x^2+y^2-ax-by}$$

令

$$Ab+Ba=H,\ Aa-Bb=K$$

$$A+a=h,\ B+b=k$$

则得

$$H(x^2-y^2)-2Kxy+(x^2+y^2)[hy-kx]=0,$$

$$x^2+y^2=r^2$$

于是

$$L: H(x^2-y^2)-2Kxy+r^2(hy-kx)=0$$

L 是双曲线，即所求的 M 点是双曲线 L 与圆的交点。

由于双曲线与圆可以有四个交点，所以此题可有四个解。

有些特殊情形值得一提，例如 P 与 p 到圆心 O 相距都是 c，取 Pp 的垂直平分线为 x 轴，则 $A=a, B=-b, H=0, K=c^2, h=2a, k=0$。

于是 L 变成

$$L': -2c^2xy+2ar^2y=0$$

$$y=0 \text{ 或 } x=a\frac{r^2}{c^2}$$

由于所求点 M 在 $x^2+y^2=r^2$ 上，对于 $y=0$，得 $x=\pm r$，即 M 是 x 轴与圆的两个交点。此与我们的经验一致，印证了上面的分析是符合实际的。

阿尔哈达姆还解决了下述问题：

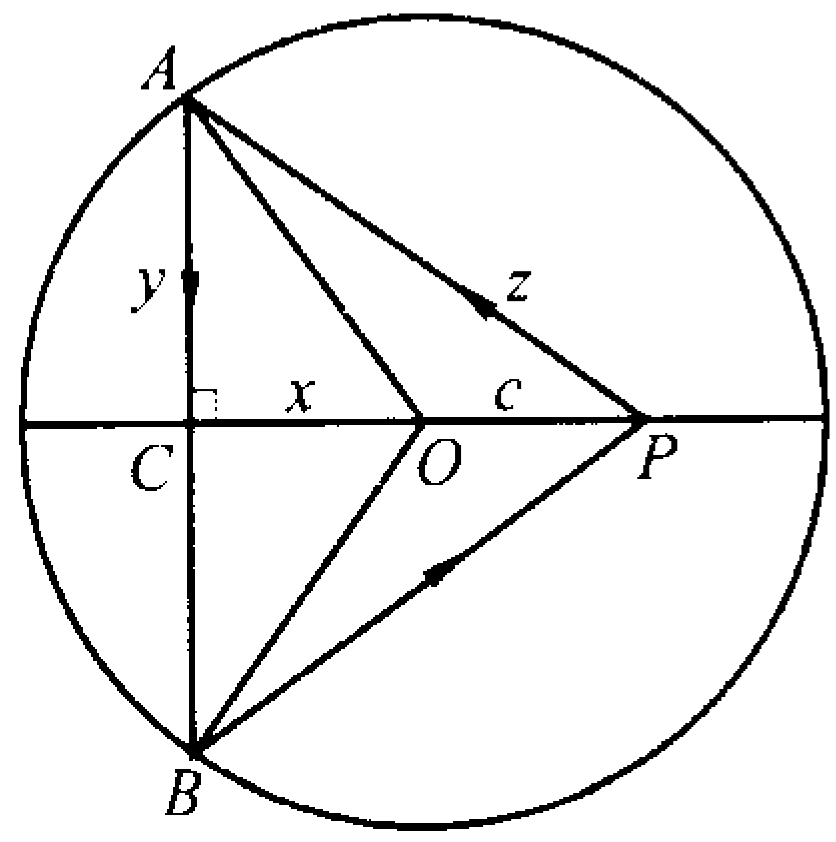


图 2-32

怎样冲击圆台桌球的弹子球，使其两次碰壁后返回原位。

设球桌半径为 r，中心为 O，球原位在 P 点，$OP=c$ 已知，若球第一次碰壁在 A 点，第二次碰壁在 B 点，再反射通过 P 点，见图 2-32，则 OA，OB 是 $\triangle ABP$ 的内角平分线。设 AB 与 OP 交于 C，$OC=x$，$AC=y$，$AP=z$，在 $\triangle APC$ 中，由内角平分线定理，$\frac{y}{z}=\frac{x}{c}$；由勾股定理得

$$r^2=x^2+y^2,\ z^2=y^2+(x+c)^2$$

$$2cx^2+r^2x-cr^2=0$$

$$x=\frac{-r^2\pm\sqrt{r^4+8c^2r^2}}{4c}$$

只能取“+”号，即

$$x=\frac{-r^2+\sqrt{r^4+8c^2r^2}}{4c}$$

$$=\frac{-r^2+r\sqrt{r^2+8c^2}}{4c}$$

求得 C 点后，过 C 作 OP 的垂线与圆的交点即为所求的碰壁点。

2.8 费尔巴哈九点圆

三角形三边中点，三条高的垂足，垂心到三个顶点线段的中点，这九个点是否共圆？

1765年，欧拉回答说：“是。”1822年，费尔巴哈再次发现此圆，由于当时的传媒比欧拉时代发达，所以人们一般把此圆称为费尔巴哈圆或九点圆，而不称其为欧拉圆，1821年数学家彭色列（Poncelet）给出第一个九点共圆的证明，1822年费尔巴哈汇总和补充了关于九点圆的论述，写成一本小册子公开出版。

下面介绍彭色列的证明（此证明经后人多次修改）。

设 A', B', C' 分别是 $\triangle ABC$ 三条边 BC, AC 和 AB 的中点，D 是高 AD 的垂足，见图 2-33，则 $DA'B'C'$ 是等腰梯形。$DA'B'C'$ 是一个圆 $\odot O$ 的内接四边形，即 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆 $\odot O$ 上有三角形高的垂足，于是 $\triangle ABC$ 三条高的垂足 D, E, F 都在此圆上。

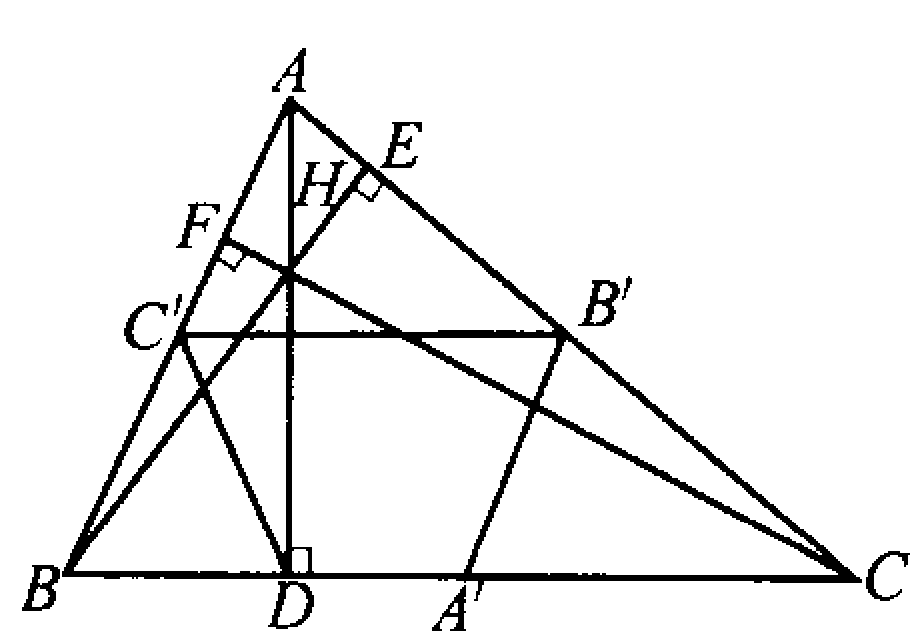


图 2-33

设 $\triangle ABC$ 的垂心是 H，下证 AH, BH, CH 的中点也在 $\odot O$ 上。

对$\triangle HBC$而言，D, E, F也是其三高的垂足，由上面所证，过$\triangle HBC$三边中点的圆也过D, E, F。即HB, HC之中点在$\odot O$上，同理HA的中点也在$\odot O$上，即$\odot O$是欲求证的九点圆。

显然九点圆半径是$\triangle ABC$外接圆半径之半。

2.9 倍立方问题的丝线解法

公元前四世纪，古希腊的智人学派（也称巧辩学派）提出并研究三大几何作图问题：

倍立方问题，化圆为方问题和三等分角问题。

当时限定只许用圆规直尺来解，直到19世纪才证明了用圆规与直尺不可能解决上述三大几何作图问题。1837年，旺策尔（P. Wantzel）证明了倍立方与三分角的不可能性，1882年，林德曼（C. Lindemann）证明了π的超越性，从而推断只用圆规直尺不能化圆为方，即不能用规尺作一个与已知圆等面积的正方形。

关于倍立方的提出，传说很多。埃拉托塞尼（Eratosthenes，公元前226～公元前195年）在名著《柏拉图》一书中写道：太阳神阿波罗向提洛岛的人们宣布，瘟疫即将流行，为了摆脱灾难，必须把德里安祭坛的体积扩大，变成现在这个立方体祭坛体积的2倍，而且要求仍然是一个立方体。工匠们百般努力，百思不得其解，于是去请教柏拉图，柏拉图提醒大家，神发布这个谕示，并不是想得到一个体积加倍的祭坛，而是以此难题来责难希腊人对数学的忽视和对几何学的冷淡。

埃拉托塞尼是国王托勒密（Ptolemy）之子的家庭教师，他把自己关于倍立方的工作上报给托勒密国王，引起了国王的重视，在全国悬赏征解。

又传古代一位希腊悲剧诗人描述过名叫弥诺斯的匠人为皇族格

劳科斯修坟的故事。弥诺斯说，原来设计的每边都是百尺的立方体坟墓，对于殉葬者众多的皇家而言还嫌太小，要求他把其体积加倍。

当时古希腊关于倍立方的传说满天飞，可见人们对这一问题的重视和兴趣。

虽然 1895 年著名数学家克莱茵已经对三大作图问题作了总结，严格证明了它们用规尺绝不可解，彻底解决了两千多年的悬案，但用其他几何方法还是可以准确地（非测量地）解决这三个问题的。

设 k 是立方体的棱长，x 是所求立方体的棱长，使得以 x 为棱的立方体体积为以 k 为棱长的立方体体积的 2 倍，这就是倍立方问题，这时

$$x^3=2k^3$$

希腊数学家梅纳奇马斯（Menaechmus，公元前 375～325）考虑两条抛物线

$$x^2=ky,\ y^2=2kx$$

的交点，由于 $x^4=k^2y^2=2k^3x$，所以这两个抛物线的交点横坐标为 $x^3=2k^3$，此交点横坐标即为所求的立方体之棱长。

笛卡儿（Descartes，1596～1650）只用上面两条抛物线中的一条就求得了 x。事实上，上述两抛物线的交点 (x,y) 满足

$$x^2+y^2=ky+2kx$$

$$(x^2-2kx+k^2)+\left[y^2-ky+\left(\frac{k}{2}\right)^2\right]=k^2+\frac{k^2}{4}$$

$$(x-k)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{5}{4}k^2,$$

这是一个中心在 $\left(k,\frac{k}{2}\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}k$ 的圆，此圆过两抛物线的交点，所以为求两抛物线交点的横坐标 x，只需求上述圆与抛物线 $x^2=ky$ 或 $y^2=2kx$ 之一的交点（圆比抛物线容易作出）。

上述方法要做抛物线，这件事用规尺不能完成。

下面介绍一种巧妙的"丝线作图法"：

①画出边长为 k 的正三角形$\triangle ABC$，延长 CA 到 D，使得 $AD=k$。

②做射线 DB，AB。

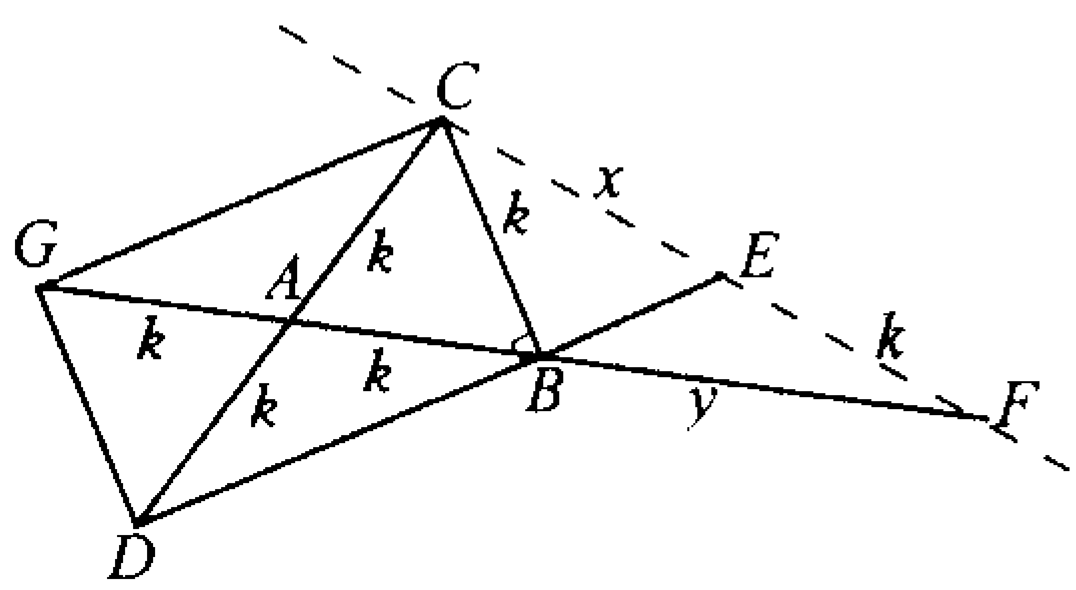


图 2-34

③取丝线一条，在其上标出两点 E，F，使 $EF=AB=k$。

④拉直丝线，使其通过 C 点，且 E，F 点分别落在射线 DB 和 AB 上。

于是 $CE=k\sqrt[3]{2}$，即 CE 为体积加倍的立方体的棱长。

事实上，设 $x=CE$，$y=BF$，见图 2-34，$\triangle DBC$ 是直角三角形，在$\triangle BCF$ 中，由余弦定理

$$CF^2=CB^2+BF^2-2CB\cdot BF\cos\angle CBF$$

即

$$(x+k)^2=k^2+y^2-2ky\cos120°=k^2+y^2+ky$$

$$(x+k)^2-k^2=y^2+ky$$

延长 BA 到 G，使 $BA=AG=k$，则 $GC/\!/BE$，于是

$$\frac{k}{y}=\frac{x}{2k},\ xy=2k^2$$

$$\begin{cases}xy=2k^2\\x^2+2kx=y^2+ky\end{cases}$$

解得 $x=k\sqrt[3]{2}=CE$。

2.10 现代数学方法的鼻祖笛卡儿

笛卡儿 1596 年生于法国都兰，贵族出身，科学史上的传奇人物，伟大的数学家、物理学家、哲学家和生物学家。我们只从数学的角度介绍他的事迹与思想。

笛卡儿20岁毕业于普互捷大学法律系，但他既不想成为世袭贵族，对法律亦无兴趣，他具有许多创新的思想，绝不因循守旧和迷信古人，敢于向传统挑战，他勤于思考，他的名言是："我思，故我在。"他不仅读书破万卷，而且对社会、对宇宙深入观察，努力实践。他说："我遇到的一切我都仔细研究，目的是从中引出有益的东西。"他无正当职业，行思古怪，终生未娶，心怀大志，专心科学，变卖家产、著作等身。1629年，移居荷兰，深居简出，著书立说。主要著作有：《方法论》，《论世界》，《形而上学的沉思》，《哲学原理》，《几何学》。《几何学》中译本1992年由武汉出版社出版。全书分三篇，第一篇的内容是规尺作图，引入平面坐标系来建立几何问题的方程，包含着解析几何的要旨；第二篇进一步发展解析几何的思想和方法，讨论如何由坐标与方程研究多种曲线的性质。

笛卡儿发明的解析几何使变量和运动进入数学，是初等数学向高等数学发展的转折点，为函数论和微积分等现代数学主流的创立奠定了基础，也为几何学开拓了有力的研究方法，所以笛卡儿被科学史家公认为现代数学方法的鼻祖。

笛卡儿认识到欧几里得几何学过分强调证明技巧和过分依赖图形，酷似少儿"看图说话"，不利于几何学的进步，而代数又完全受制于法则和公式，过于抽象，缺乏直观性。他主张把两者联姻，形成数学分支间的杂交优势，解析几何是笛卡儿对他那个时代以及之后的世代数学家们恩赐的无价的数学财富。

笛卡儿强调通过数学建模来解决科学上的实际问题，他在《方法论》一书中宣言：

把一切问题化成数学问题，把一切数学问题化成代数问题，把一切代数问题化成单个方程来求解！

今天听来，他的话说得有点过头，但在许多场合，上述观点是可行的；事实上，他那个时代尚未建立系统的非线性数学（例如非线性微分

方程和混沌等)，所以上述"笛卡儿纲领"中的"一切"二字似应修正。

笛卡儿重视直觉，他说："我们不应该只服从别人的意见或自己的猜测，而是仅仅去寻找清楚而明白的直觉所能看到的东西，以及根据确实的资料做出的判断，舍此之外，别无求知之道。"他还说过："数学不是思维的训练，而是一门建设性的有用的科学，研究数学是为了造福人类。"

笛卡儿身体一直不健康，不得不躺在床上看书和思考，据说解析几何就是他躺着想出来的。1649 年，瑞典年轻的皇后克利斯蒂娜邀请笛卡儿辅导她学习数学，笛卡儿看她喜爱数学，聪慧刻苦，为人正派，就答应了她，每天清晨为这位特殊的学生授课，由于瑞典气候寒冷，笛卡儿不久染患肺炎，第二年(1650 年)2 月，这位伟大的科学家与世长辞。

2.11 三等分角的阿基米德纸条

阿基米德想出了一个绝招，用一个纸条即可三等分任意给定的角，现介绍如下。

任给一角 Φ，以此角顶点 O 为圆心，以 r 为半径作圆⊙O，⊙O 与此角两边分别交于 A，B 两点，见图 2-35。

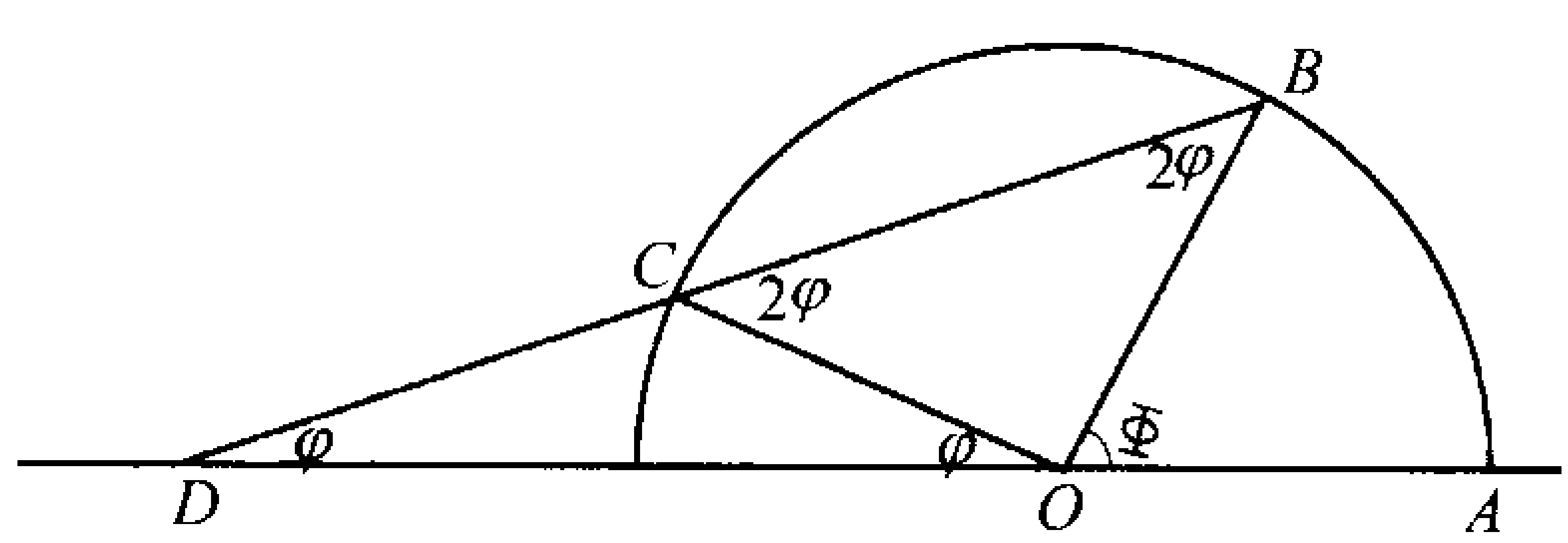


图 2-35

取一矩形纸条，在其边缘上标出相距为 r 的两点 C，D；令纸条的边缘过 B 点，且使 C 点落在⊙O 上，D 点落在 AO 的延长线上，则

$$\angle BDA=\varphi=\frac{1}{3}\Phi$$

事实上，$CD=OC=OB=r$，$\angle OCB=\angle OBC=2\angle CDO=2\varphi$，于是$\triangle OBD$的外角$\Phi=\angle OBC+\angle CDO=2\varphi+\varphi=3\varphi$，即$\angle BDA$是已知角$\Phi$的$\frac{1}{3}$。

木工师傅中巧如鲁班者大有人在，不知何年何人用“鲁班尺”发明了三等分任一角的方法；所谓鲁班尺，或称木工尺，是形如图2-36的直角尺。在过尺的拐角内点B与尺边BD垂直的尺边缘直线上取一点C，使BC等于尺宽AB；任给一角$\angle EOF$，先用鲁班尺画一条与OE相距为尺宽AB的平行线l，见图2-37。使鲁班尺的边缘上的点A落在l上，C点落在OF上，且边缘线BD过O点，如图2-38。则沿边缘DB画出的直线l'与OF的夹角是$\angle EOF$的$\frac{1}{3}$。事实上，作$AG\perp OE$，G为垂足，则直角三角形$\triangle OAG\cong\triangle OAB\cong\triangle OBC$，故$\angle AOG=\angle AOB=\angle BOC=\frac{1}{3}\angle EOF$。

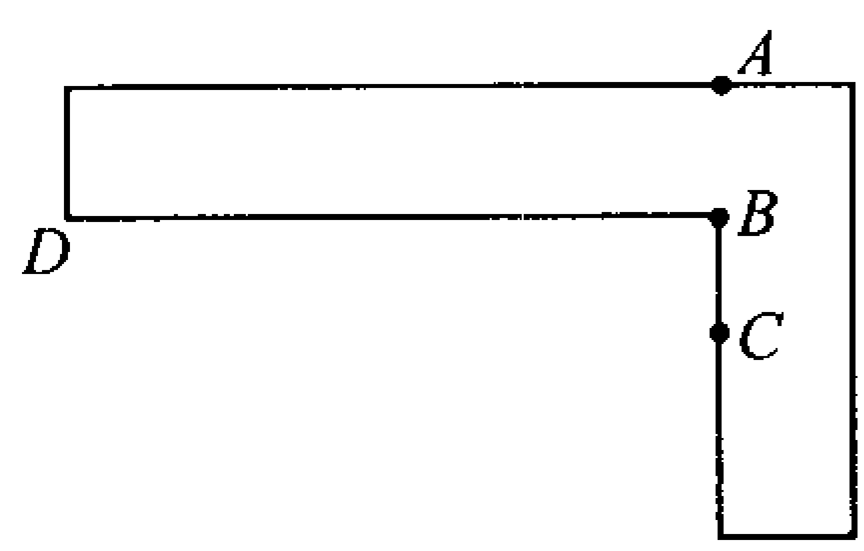


图 2-36

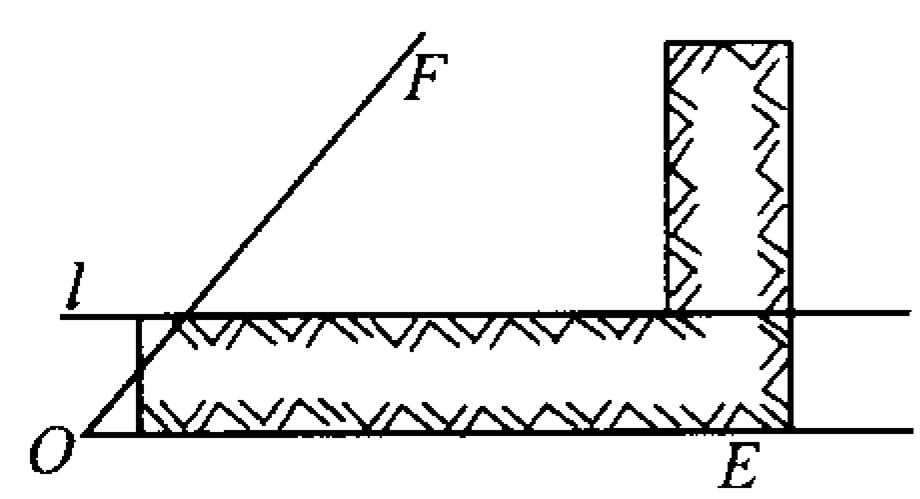


图 2-37

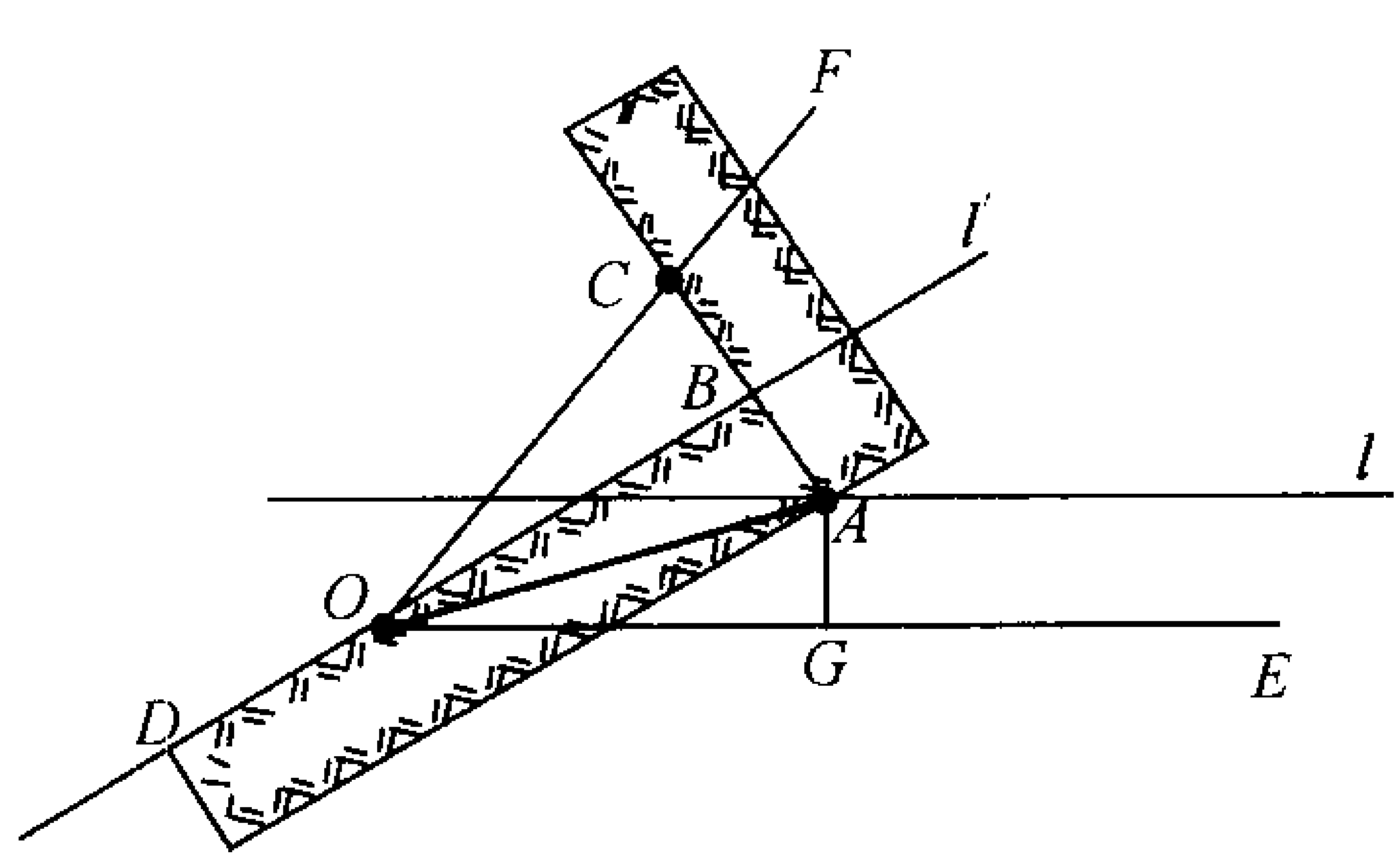


图 2-38

2.12 化圆为方的绝招

作一个正方形，使其面积和已知圆的面积相等，这就是化圆为方问题。

问题是数学的灵魂，为了解决化圆为方问题，古希腊数学家希庇亚斯发明了一条称为“割圆曲线”的奇怪曲线（当然这条曲线用规尺是作不成的）。割圆曲线是这样制成的：

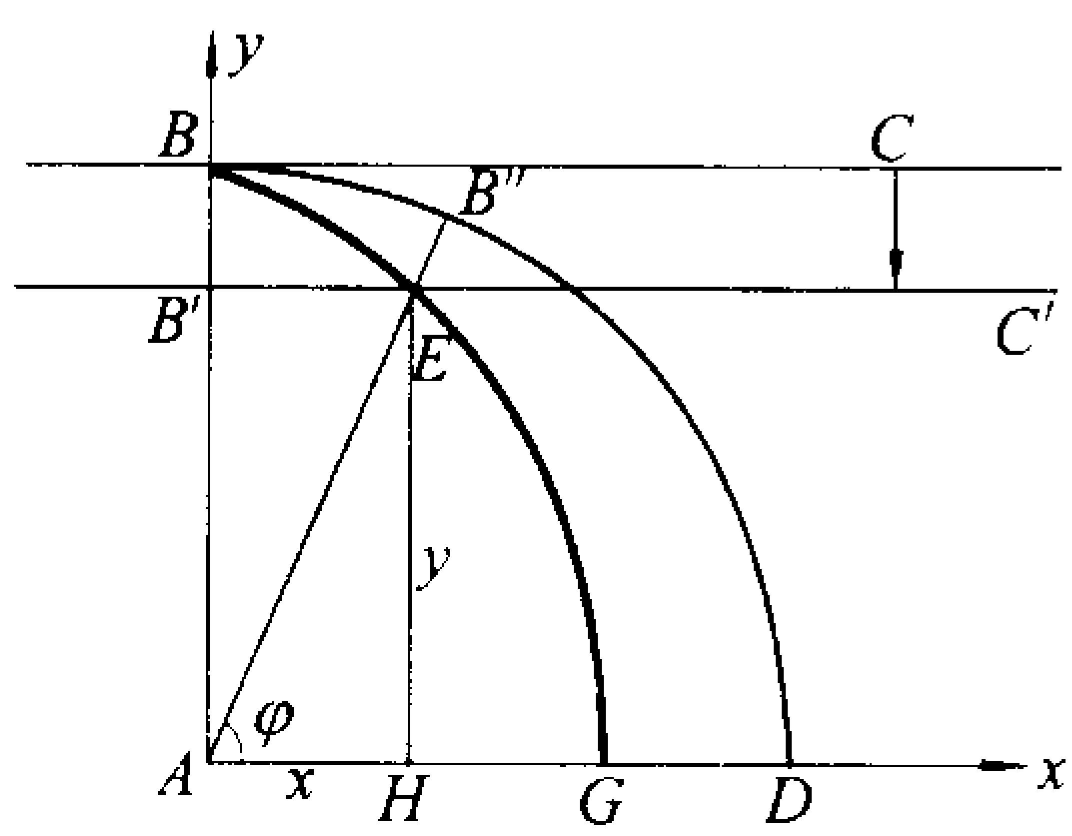


图 2-39

把线段 AB 绕 A 点顺时针匀速旋转 90°到 AD 位置，同时与 AD 平行的直线 BC 匀速平移到 AD 位置，动线段 AB 与动直线 BC 的交点形成的曲线称为割圆曲线，见图 2-39 中的粗实线。在同一时间内，BC 平移到 $B'C'$，AB 转到 AB''，AB'' 与 $B'C'$ 交于 E 点，动点 E 的轨迹 BG 即为割圆曲线，它把以 A 为中心的以 AB 为半径的$\frac{1}{4}$圆切割成两块，故有其名谓之割圆曲线。

下面导出割圆曲线的方程。记 $AB=a$，$AH=x$，$EH=y$，$\angle EAD=\varphi$，则 $\tan\varphi=\frac{y}{x}$，$\varphi=\arctan\frac{y}{x}$；又

$$\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{EH}{AB}=\frac{t}{T}$$

其中 T 是 AB 转动 90°所用时间，t 是 AB'' 转角 φ 所用时间，于是

$$\varphi=\frac{\pi}{2a}y,\ y=\frac{2a}{\pi}\varphi=\frac{2a}{\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

$$y=x\tan\frac{\pi y}{2a}\ \text{或}\ x=\frac{y}{\tan\frac{\pi}{2a}y}$$

下面求 AG 的长度

$$AG=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan\frac{\pi}{2a}y}$$

又 $\tan\frac{\pi}{2a}y=\frac{\sin\frac{\pi}{2a}y}{\cos\frac{\pi}{2a}y}$，而 $\cos\frac{\pi}{2a}y$ 当 $y\to 0$ 时以 1 为极限，所以

$$AG=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2a}y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\pi}{2a}y}{\sin\frac{\pi}{2a}y}\cdot\frac{2a}{\pi}$$

令$\frac{\pi}{2a}y=t$，只需求出$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$。由图 2-40，$\triangle OAB$ 面积 $=\frac{1}{2}\sin t$，$\triangle OAT$ 面积$=\frac{1}{2}\tan t$，扇形 OAB 面积$=\frac{1}{2}t$，所以

$$\frac{1}{2}\sin t<\frac{1}{2}t<\frac{1}{2}\tan t$$

$$1<\frac{t}{\sin t}<\frac{1}{\cos t},\quad \cos t<\frac{\sin t}{t}<1$$

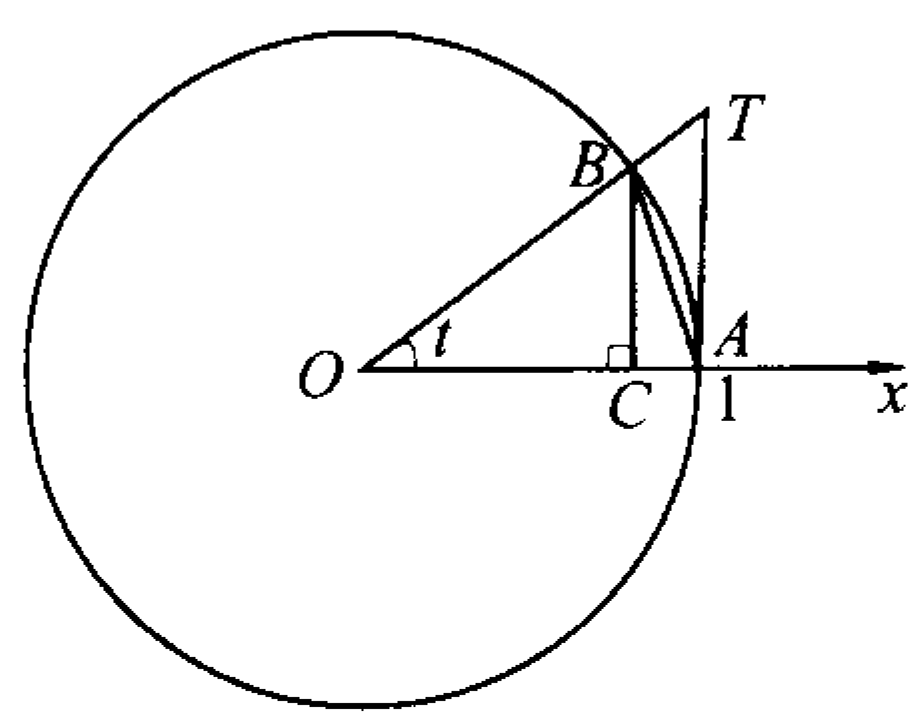


图 2-40

令 $t\to 0$，则

$$1\leqslant\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\leqslant 1$$

即$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$（显然 t 是负值时，此极限亦为 1）。

至此知 $AG=\frac{2a}{\pi}$，于是 AG，AB 皆已知线段，且

$$\frac{AG}{AB}=\frac{AB}{\frac{1}{2}\pi a}$$

割圆曲线作成后，AG 已画出，于是$\frac{1}{2}\pi a$ 是已知三线段的第四比例项，用规尺可作出长$\frac{1}{2}\pi a$ 的线段 l，以 l 为长，以 $2a$ 为宽作矩形，则

此矩形面积为 πa^2，即为已知圆的面积，令 $b^2=2la$，作 l 与 $2a$ 的比例中项 b，以 b 为边的正方形即与已知圆等积的正方形。

下面讨论把弯月亮形化成等面积的正方形的问题。所谓弯月亮形是指两圆相交于两点，在一圆内部而在另一圆外部的平面区域，图 2-41 的阴影部分就是两个弯月亮。

和化圆为方不能用规尺完成的难度有些区别的是，有些弯月亮是可以用规尺作出的。

①内外弓形角分别为 45°和 90°的弯月亮可以规尺作出，见图 2-42。

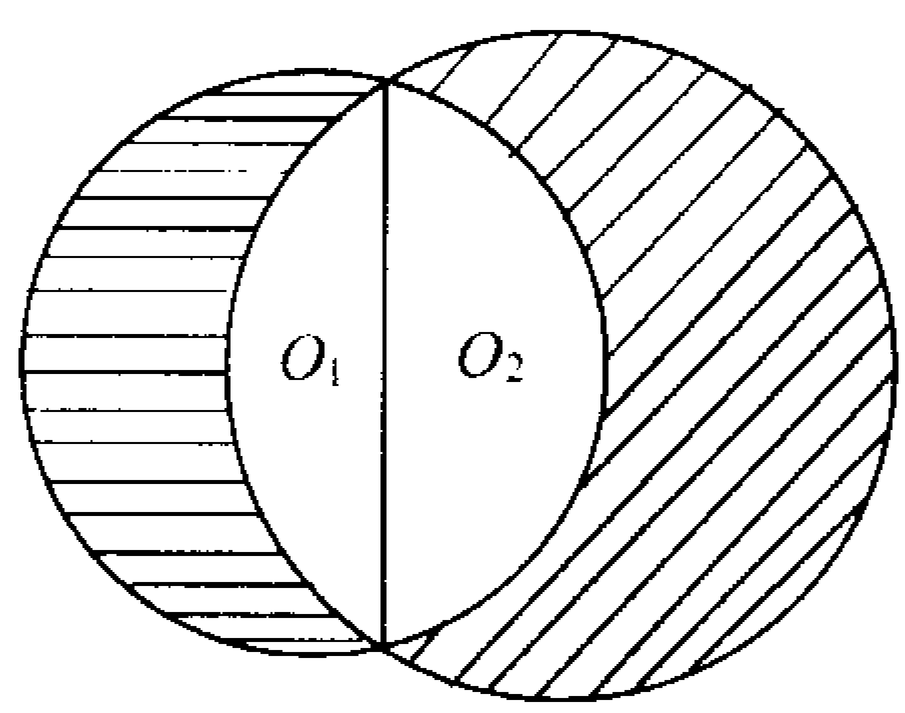


图 2-41

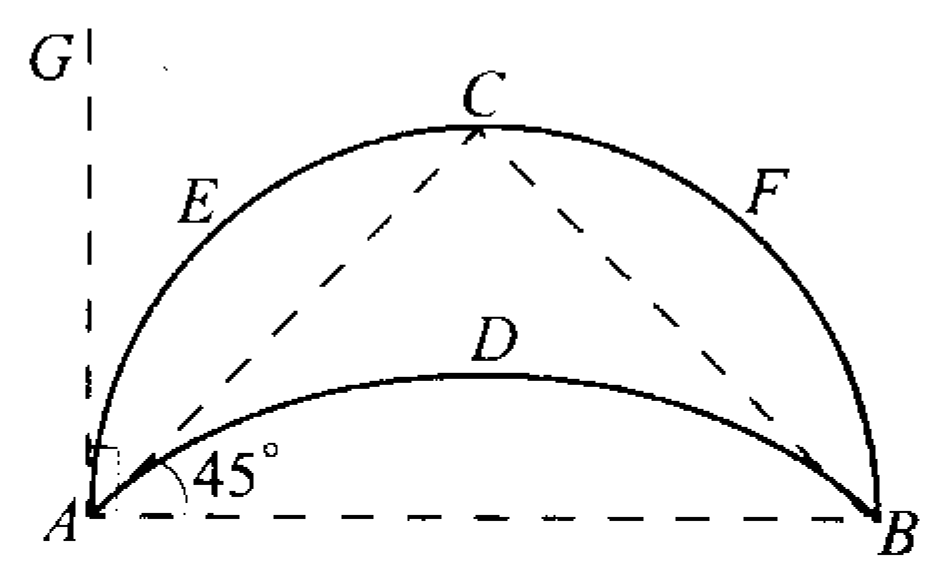


图 2-42

由于弓形角 $\angle GAB=90°$，$\angle CAB=45°$，其中 C 点在弯月亮的弧上，则 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AB^2=AC^2+BC^2$；又由于

$$\frac{\text{弓形 } ACE}{\text{弓形 } ABD}=\frac{AC^2}{AB^2},\frac{\text{弓形 } BCF}{\text{弓形 } ABD}=\frac{BC^2}{AB^2}$$

于是

$$\frac{\text{弓形 } ACE+\text{弓形 } BCF}{\text{弓形 } ABD}=\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}=1$$

从而得知弯月亮的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积。由于可以用规尺把 $\triangle ABC$ 化成等积的正方形，所以可把弯月亮 $ACBD$ 用规尺化成等积的正方形。

②若弯月亮的外弧上的弦 $AA_1=A_1A_2=\cdots=A_{n-1}A_n=A_{n-1}B$，

满足 $AA_1^2 + A_1A_2^2 + \cdots + A_{n-1}A_n{}^2 = AB^2$，又 AA_1 弦在外弧上构成的弓形角与 AB 弦在内弧上构成的弓形角相等，则弯月亮可用规尺化成等积正方形，见图 2-43。

与①推理相似地可得外弧上的 n 个弓形的面积和等于内弧与 AB 弦组成的弓形面积，于是弯月亮的面积与多边形 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 的面积相等，而多边形 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 可以用规尺化成等积的三角形，此三角形再用规尺化成等积的正方形，于是终于用规尺把弯月亮化成等积的正方形。

但并不是任何弯月亮形都可以用规尺化成等面积的正方形。例如图 2-44 中 AB 是大半圆直径，$AC = CD = DB$，则以 AC 为直径的半圆的面积加上三个弯月亮的面积等于梯形 $ABDC$ 的面积，由于梯形可以规尺等积化方，所以三个弯月亮加一个半圆可以规尺化方，而已知半圆不可规尺等积化方，所以这三个弯月亮之和不可规尺化方，从而一个这种弯月亮不可规尺化方。

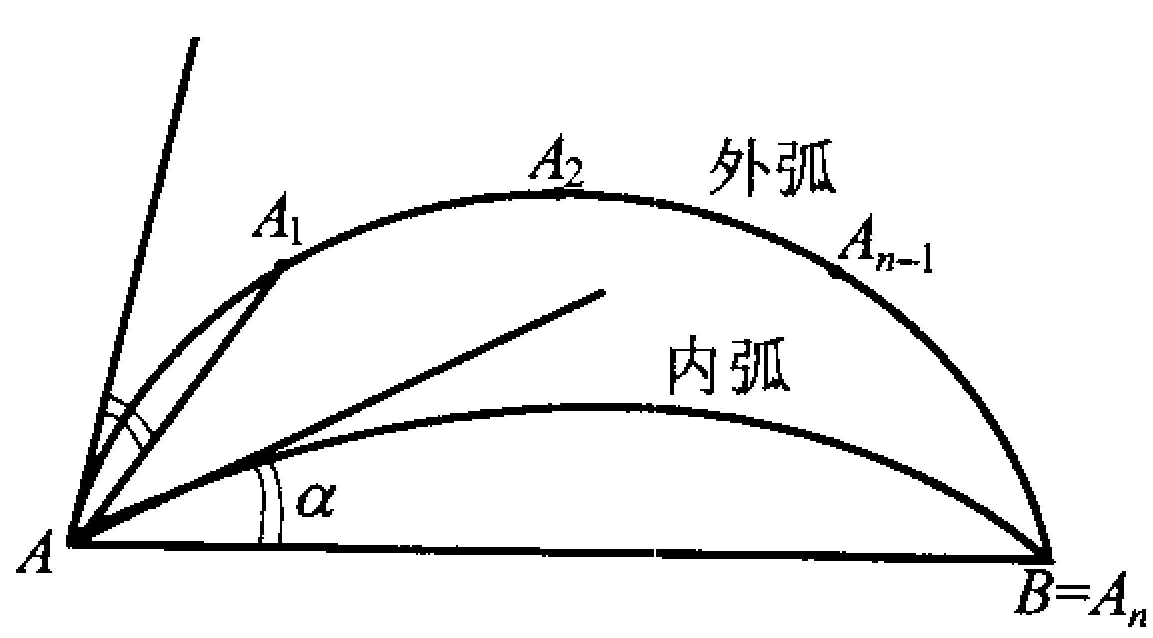


图 2-43

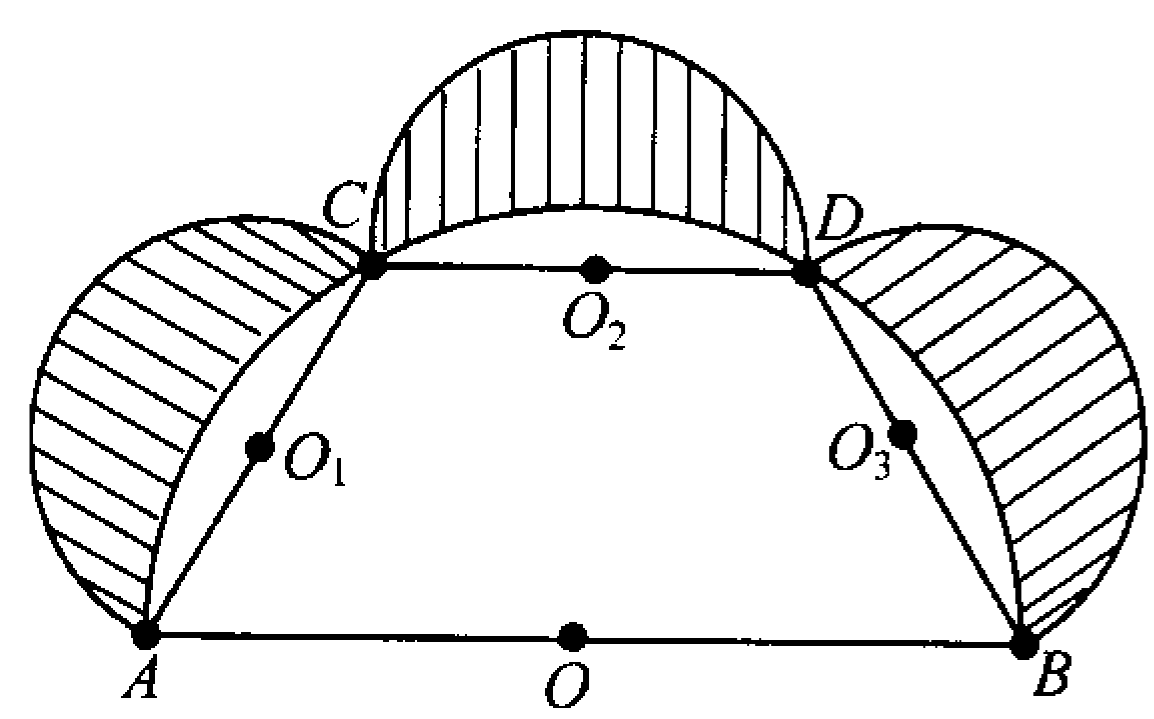


图 2-44

2.13 逆风行舟

我们讨论一个很现实、很有趣的数学问题：

帆船如何顶北风向正北最快地航行？

显然，这也是奥林匹克运动会帆船运动员们最关心的问题之一。

首先考虑下面的问题：

当帆面与风向所成的角为 α，与船的轴线所成的角是 β 时，帆船的航速 c 是多少？

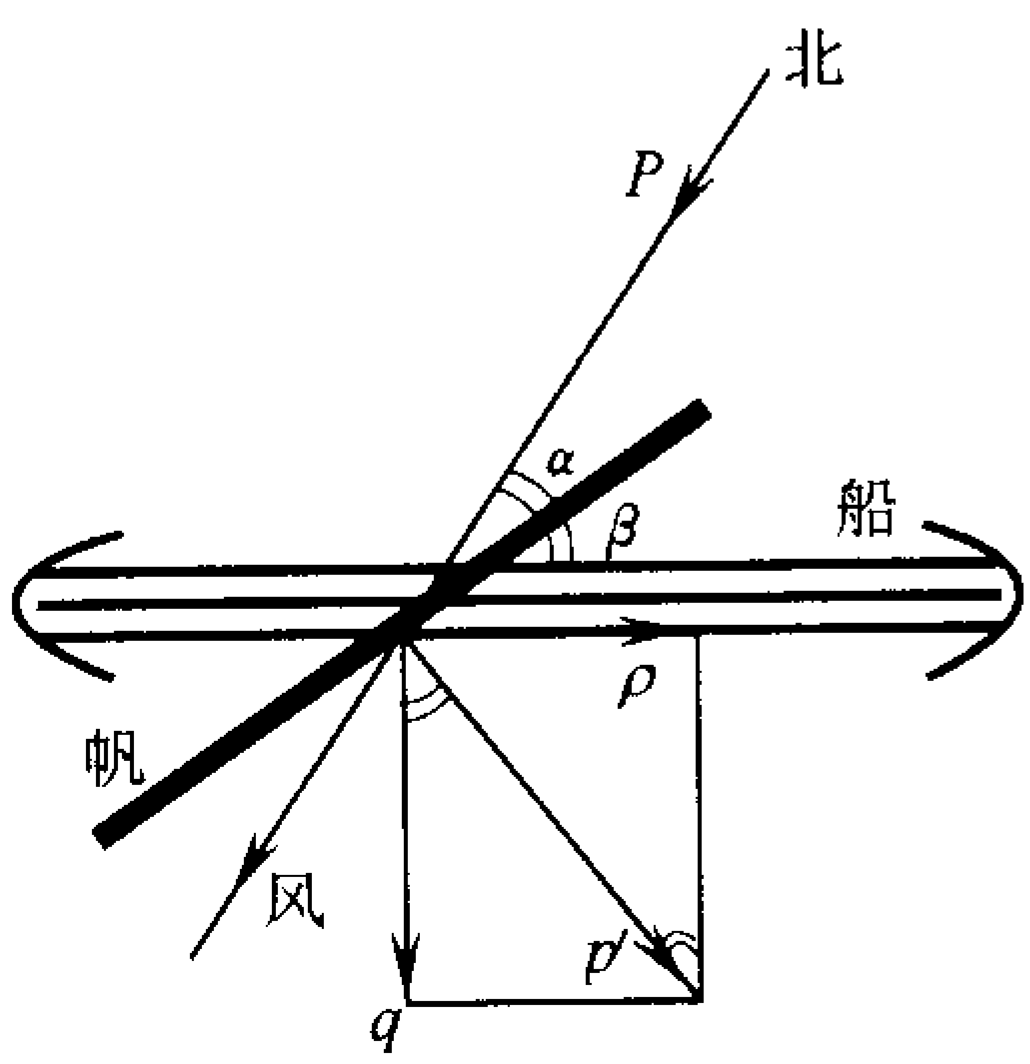


图 2-45

设帆面与风向垂直时，风对帆面的压力是 P，当 $\alpha\neq 90°$ 时，垂直于帆面的风压 $p'<P$，$p'=P\sin\alpha$。再把 p' 分解成沿船轴线方向的分量 $p=p'\sin\beta$ 和垂直于船轴线的分量 $q=p'\cos\beta$，从而风加在航行方向上的压力为（图 2-45）

$$p=P\sin\alpha\sin\beta$$

帆船的速度 c 与 p 成正比

$$c=kp=kP\sin\alpha\sin\beta$$

k 是正常数。显然 $\alpha=\beta=90°$ 时，即风是北风，船向南行，帆与船轴垂直时，船速最大，这时 $c_{max}=kP$，令 $kP=C$，C 是最大船速。

下面讨论如何向北最快航行。这时船的轴线与风夹角 $\alpha+\beta$，船速向北分量为 $c'=c'\cos(\alpha+\beta)=C\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$，$\alpha+\beta+\gamma=90°$。下面确定 α,β,γ 的值，使 c' 最大。

如果 $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$，$\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 皆锐角，由于

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha'\sin\beta'=\cos(\alpha'-\beta')-\cos(\alpha'+\beta')$$

所以当且仅当 $|\alpha-\beta|>|\alpha'-\beta'|$ 时，$\sin\alpha\sin\beta<\sin\alpha'\sin\beta'$。

考虑 $\alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'=90°$，其中 $\alpha'=30°$，$\gamma=\gamma'$，$\alpha'+\beta'=\alpha+\beta$，且 $\alpha=30°+\varepsilon_1$，$\beta=30°-\varepsilon_2$，$\alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$，皆锐角，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2>0$，则 $|\alpha-\beta|=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\beta'=30°-\varepsilon_2+\varepsilon_1$，$|\alpha'-\beta'|=|\varepsilon_1-\varepsilon_2|<|\alpha-\beta|$，所以

$$\sin30°\sin\beta'\sin\gamma'>\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{2.4}$$

又 $\beta'+\gamma'=60^\circ$，所以

$$\sin 30^\circ \sin 30^\circ \geqslant \sin\beta' \sin\gamma' \qquad (2.5)$$

由(2.4)和(2.5)得

$$\sin 30^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ \geqslant \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \qquad (2.6)$$

即 $\alpha=\beta=\gamma=30^\circ$时，$c'$最大。至此得知：

船的轴线与朝北方向成 60°，且帆面平分这个角时，向北航行最快，这时最大北上速度为

$$c'=C\sin 30^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ=\frac{C}{8}$$

即是顺风向南行最大速度的$\frac{1}{8}$，见图 2-46。

只要使你的船头指向与逆风方向成 60°，再把帆面转到这个 60°角的平分位，不管何方来风，总会使你向逆风方向航行得最快。这一结论也适用于无动力有舵渔船的漂流，水流相当于风，舵相当于帆。

为了达到预定地点 A，可以扭转船头若干次，使船头交替地在风向 AB 直线的两侧且使风向、船轴向和帆面间的角度仍为上述的角度。

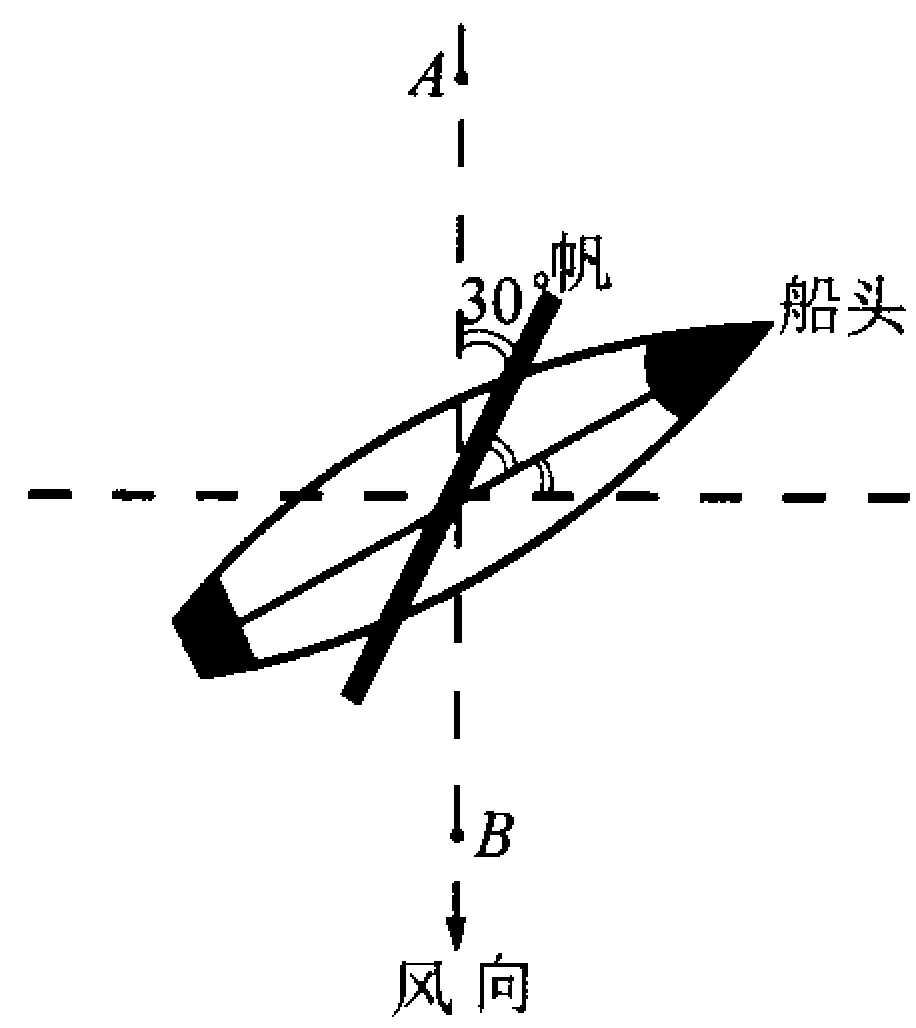


图 2-46

处于逆境，巧借阻力，迂回曲折，仍可达到目标!

2.14 天上人间怎么这么多的圆和球

天上的行星、月球和太阳等星体，自然界的雨点露珠，橘子苹果，诸多天然之物，为什么那么多球状体？还有几乎人人爱好的足球、篮球，等等，乃至我们的眼球头颅，也都是球状物，德国著名数学家斯坦纳(S. Steiner，1796～1863)揭穿了其中的天机。

一个有关的传说是，古罗马皇帝的女儿吉冬去非洲创立迦太基国，成为该国首任女皇，她欲在海边购买一块土地，吉冬向土地出售者提出要买“一张兽皮的土地”，即把一张兽皮剪成了细条，结成一条长绳，她说买下这条绳围住的那么多土地，于是双方谈妥价钱。之后聪明的吉冬把绳作成半圆弧，此半圆直径在海岸线上，她心里明白，这时面积最大。

事实上，在等长的平面闭曲线所围面积当中，以圆面积最大。反之，在面积相等的平面图形中，圆的周长最小。

显然只需考虑凸的平面图形，即那些连接内部任意两点的线段，此线段完全属于这个图形所围的区域内部的图形。

为证明上述有关圆的命题，先讨论梯形。

在上下底的长度与高固定的梯形中，等腰梯形的两腰之和最短。

考虑梯形 $ABCD$，见图 2-47，关于 AD 的中垂线为 l，B 的对称点为 B'，C_0 为 CB' 中点，C_0 关于 l 的对称点为 B_0，则 $BB_0 = B'C_0$。于是等腰梯形 AB_0C_0D 与 $ABCD$ 底与高分别等长，它们等面积。

作平行四边形 $DCHB'$，于是 $DH < DC + CH$。而 $DH = 2DC_0 = DC_0 + AB_0$，$CH = DB' = AB$，故

$$AB_0 + DC_0 < AB + DC$$

即在底边与高分别相等的梯形中，等腰梯形的两腰和最小。

设 Ω 是具有已知面积 S 而周长最短的平面图形，我们往证 Ω 是圆。

任作一直线 L，因为 Ω 是凸的，所以可以找到 Ω 上的两个点 P_1，P_2，使得过 P_1 与 P_2 垂直于 L 的两条直线所夹的带形之外无 Ω 上的点，设过 P_1，P_2 的垂线与 L 交于 Q_1，Q_2 两点，我们把线段 Q_1Q_2 进行 2^n 等分，过每一等分点作 L 的垂线，把 Ω 划分成 2^n 个长条区域，由于 n 充分大，长条很窄，可以把每个长条视为一个梯形，见图

2-48。对任一长条 $ABDC$，以 L 直线为对称轴作等腰梯形 $A'B'D'C'$，使它与 $ABDC$ 是等高等底的梯形，于是

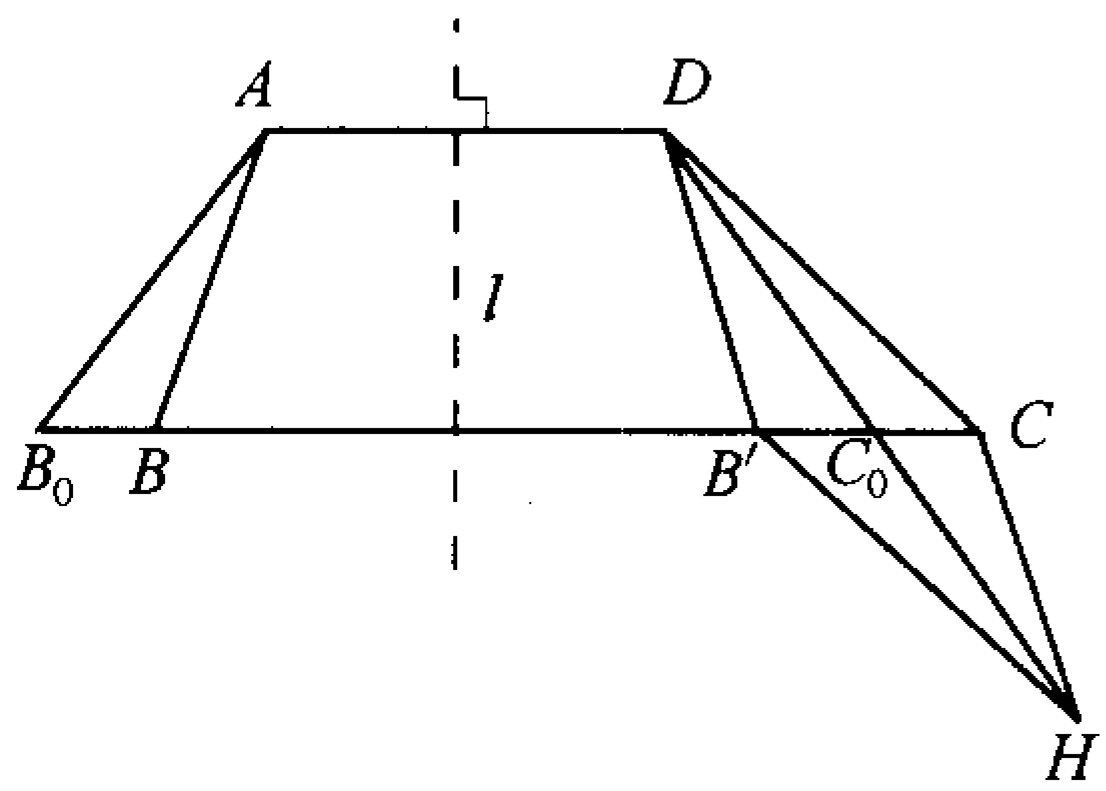


图 2-47

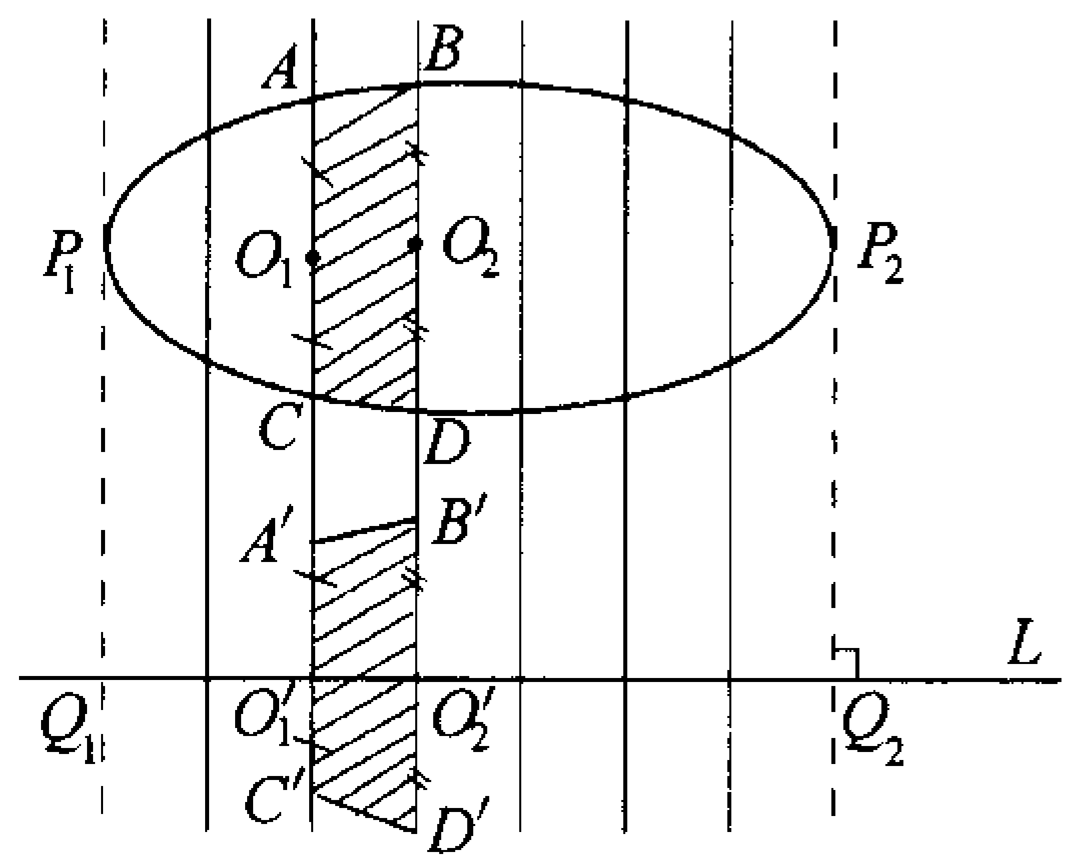


图 2-48

$$AB + CD \geqslant A'B' + C'D'$$

上式等号仅在 $ABDC$ 也是等腰梯形时成立。又 Ω 的周长是等积平面图形中的最小者，则由 $A'B'D'C'$ 这种等腰梯形并成的平面图形 Ω' 不但与 Ω 等积而且周长也与 Ω 的周长相等，则每个小梯形 $ABDC$ 皆等腰梯形，所以 Ω 有与 L 平行的一条对称轴 L'，L' 过 AC 中点 O_1。由 L 的任意值知 Ω 在任何方向上都有对称轴，这种图形一定是圆，即得知：

在等积的平面图形中，圆的周长最短。

下面论证其逆命题亦成立，即等长的平面闭曲线所围面积，圆面积最大。

事实上，设任一不为圆的平面图形 Ω 与圆 C 的周长都是 l，记 S_ω 是 Ω 的面积，S_C 是 C 的面积，若 $S_\omega \geqslant S_C$，考虑与 C 同心且面积为 S_ω 的圆 C'，则 C' 的周长 $l' \geqslant l$，但从前面论证知，这时应有在 C' 与 Ω 这两个平面图形中，圆 C' 的周长比 Ω 的周长短，即 $l' < l$，矛盾。故应有 $S_\omega < S_C$。

上述平面图形的结论可以推广到空间，有以下结论：

在表面积相等的所有立体当中，球有最大体积；在体积相等的所

有立体当中，球有最小表面积。

论证球的最优性的思路与论证圆的最优性的思路相似，只不过把等腰梯形改成下面的三棱柱 $ABC-A'B'C'$：$ABC-A'B'C'$有与侧棱垂直的对称平面。且易证下面事实，侧棱 AA'，BB'，CC'有定长 a，b，c，且 AA'，BB'，CC'分别位于三条给定的直线上的所有三棱柱中，有与侧棱垂直的对称平面者，其底面面积之和$\triangle ABC+\triangle A'B'C'D$最小。

对于吉冬女皇"一张兽皮的土地"，如果她围的土地不是以海岸线一段为直径的半圆，则以海岸线为对称轴的一个平面图形 Ω 不是圆，这里 Ω 边界线的"陆地部分"由兽皮条构成，与 2 倍长兽皮条围成的圆相比，Ω 的面积小，可见吉冬的半圆是围地最多的。

从理论上讲，我们上面已论证出这种结论：吃苹果和橘子时，丢掉了一定数量的果皮，显然希望剩下的果肉越多越好，这就应当使苹果和橘子等水果是球形的；自然界真是数学家的奶娘，她已经按数学上最优化的要求长出了许多球状的水果。

反过来讲，例如雨点露珠，水的表面张力像一张收缩的橡皮膜一样地尽量缩小表面积。正如上述数学理论指出的，这一定质量的水滴应当是球状的，难怪自然界的球状物那么多，自然界"尽量节省皮肤"的原理被数学家道破了。

2.15 平面几何定理为什么可以机器证明

数学定理的机器证明是现代数学的重要成就，我国在这方面已有很突出的贡献，例如吴文俊教授、张景中教授和杨路教授等著名数学家在用计算机作平面几何定理的证明等项目上已取得了世界领先的成绩。下面用实例说明平面几何定理何时可以用计算机证明。

例如，已知锐角$\triangle ABC$，向$\triangle ABC$ 外作正方形 $ACDF$，$BCEG$，求

证$BD \perp AE$。

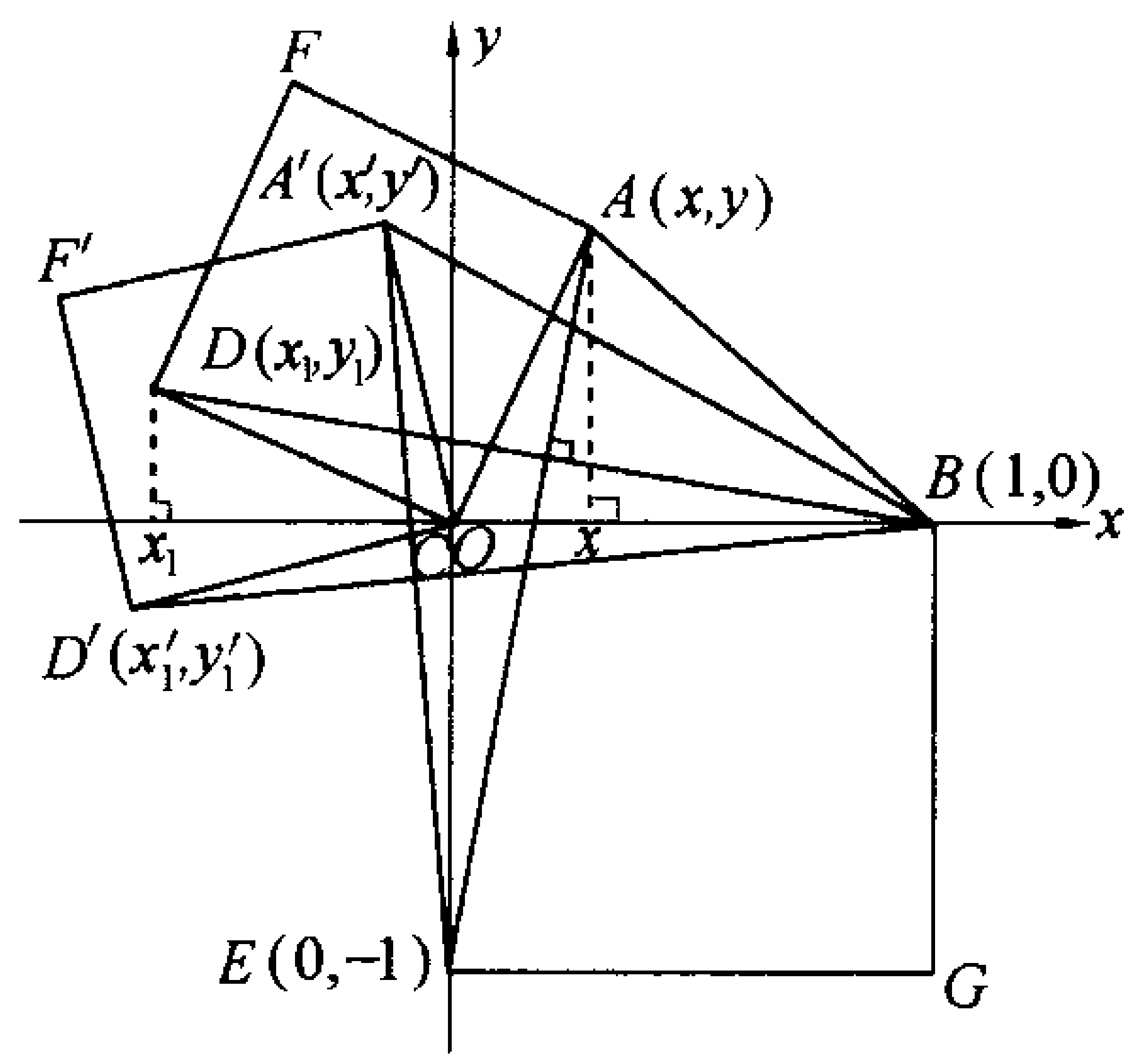


图 2-49

(1) 适当安装直角平面坐标系,把平面几何定理的已知和求证化成代数问题

图 2-49 中 C 点取为原点,B 点坐标不妨设其为(1,0),A 点在上半平面,于是 E 点坐标是(0, -1),记 D 点坐标为(x_1, y_1),则已知条件可写成

$$\begin{cases} x_1^2 = y^2 & (2.7) \\ x_1 x + y y_1 = 0 & (2.8) \end{cases}$$

求证

$$\frac{y_1 - 0}{x_1 - 1} \cdot \frac{y+1}{x} = -1$$

即求证

$$y_1(y+1) + x(x_1 - 1) = 0 \tag{2.9}$$

是恒等式。

(2) (2.7)、(2.8)、(2.9)方程联立,消去 x_1, y_1 化成只含 x 与 y 两个变元的恒等式

由方程(2.8)和(2.9)得

$$y_1 - x = 0, y_1 = x$$

由方程(2.9)得 $y_1 = \dfrac{-x_1 x}{y}$,代入 $y_1 = x$ 得

$$-x_1 x = xy$$

两边平方得

$$x_1^2 x^2 = x^2 y^2$$

由方程(2.7)得

$$y^2x^2=x^2y^2$$

这是一个恒等式,故不论 A 点如何运动,都有 $AE\perp BD$。

方程(2.7)、(2.8)、(2.9)联立消去 x_1, y_1 等参数的过程可用计算机来完成。

一般地,把几何问题化成代数问题之后,如果消元法得到的多项式 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k)=0$ 不明显为恒等式,可用“数值实验”的方法来验证它是否恒等式。

例如 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$是恒等式,当时我们是直接进行 $x-1$ 与 x^2+x+1 的多项式乘法便算出了 x^3-1,其实还有比此妙得多的办法:

令 $x=0$,则得 $x^3-1=0^3-1=-1$, $(x-1)(x^2+x+1)=(0-1)(0^2+0+1)=-1$,左=右。

令 $x=1$,则得 $x^3-1=1^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$,左=右。

令 $x=-1$,则得 $x^3-1=(-1)^3-1=-2$, $(x-1)(x^2+x+1)=(-1-1)((-1)^2-1+1)=-2$,左=右。

令 $x=2$,则得 $x^3-1=2^3-1=7$, $(x-1)(x^2+x+1)=(2-1)(2^2+2+1)=7$,左=右。

至此已经证出 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$是恒等式。

事实上,如果它不是恒等式而是三次方程,由代数基本定理,它至多有三个实根,而今有四个两两相异的实数都满足它,可见它不是方程,而是恒等式。

对于两个变元的等式 $f(x, y)=0$,其中 $f(x, y)$是 x 最高次数为 m 次,y 的最高次数为 n 次的多项式,m, n 为自然数,则取 x 的 $m+1$ 个特殊值,例如 $x=0, 1, 2, \cdots, m$,取 y 的 $n+1$ 个特殊值,例如 $y=0$,

$1,2,\cdots,n$，组成$(m+1)(n+1)$组(x,y)的数组

$$(0,0),(1,0),(2,0),\cdots,(m,0)$$
$$(0,1),(1,1),(2,1),\cdots,(m,1)$$
$$\cdots$$
$$(0,n),(1,n),(2,n),\cdots,(m,n)$$

如果对这些特殊的 x，y 之取值，$f(x,y)$ 皆取零值，则可判定 $f(x,y)=0$是恒等式。

事实上，$f(x,y)=0$ 可以写成

$$a_0(y)x^m+a_1(y)x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}(y)x+a_m(y)=0 \qquad (2.10)$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 是y 的多项式，次数最高者为 n 次多项式。

由于用$(0,0),(1,0),\cdots,(m,0)$代入(2.10)得出

$$a_0(0)x^m+a_1(0)x^{m-1}+\cdots+a_m(0)=0$$

所以 $a_0(0)x^m+a_1(0)x^{m-1}+\cdots+a_m(0)\equiv0$，同理得

$$a_0(1)x^m+a_1(1)x^{m-1}+\cdots+a_m(1)\equiv0$$
$$a_0(2)x^m+a_1(2)x^{m-1}+\cdots+a_m(2)\equiv0$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_0(n)x^m+a_1(n)x^{m-1}+\cdots+a_m(n)\equiv0$$

于是 $a_0(y)\equiv a_1(y)\equiv\cdots\equiv a_m(y)\equiv0$，进而 $f(x,y)\equiv0$。

对于多个变量的等式 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，其中 F 是 x_1，$x_2,\cdots,x_n$的多项式，对它们的最高次数分别为 x_1 为 m_1 次，x_2 为 m_2 次，$\cdots$，x_n 为m_n 次，令 x_1 取值 $0,1,2,\cdots,m_1$，x_2 取值 $0,1,2,\cdots,m_2,\cdots$，x_n 取值 $0,1,2,\cdots,m_n$，把每个数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$代入$F=0$后得 $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$，$a_i\in\{0,1,2,\cdots,m_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$，则可判 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv0$。上述数组有$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_n+1)$个。

下面用著名的“西摩松线”来说明机器证明的步骤。

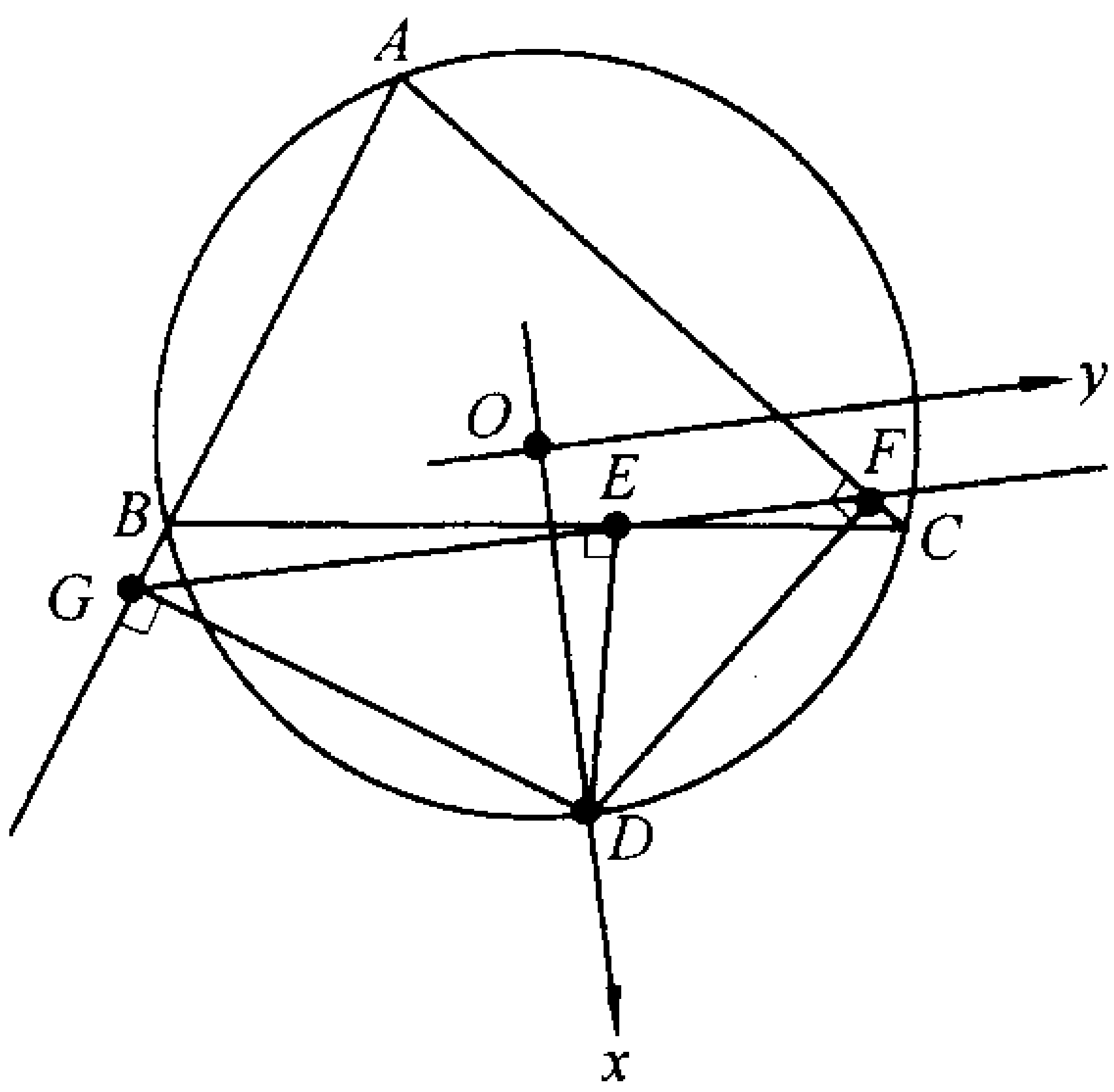


图 2-50

西摩松定理 在△ABC的外接圆上(图 2-50)任取一点 D, 自 D 向BC, CA, AB 引垂线, 垂足依次为 E, F, G, 则 E, F, G 三点共线(此直线称为西摩松线)。

取坐标系: 外接圆圆心 O 为原点, D 点坐标为(1,0), 此外, 还有六个点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $E(x_5, y_5)$, $F(x_6, y_6)$, $G(x_7, y_7)$。由已知条件, E, F, G 分别在 BC, AC, AB 上, 于是有

$$\begin{cases} x_5=\lambda x_2+(1-\lambda)x_3 \\ y_5=\lambda y_2+(1-\lambda)y_3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_6=\mu x_3+(1-\mu)x_1 \\ y_6=\mu y_3+(1-\mu)y_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_7=\rho x_1+(1-\rho)x_2 \\ y_7=\rho y_1+(1-\rho)y_2 \end{cases}$$

再由已知条件, A, B, C 在单位圆上, 故有

$$x_1^2+y_1^2=1,\ x_2^2+y_2^2=1,\ x_3^2+y_3^2=1$$

又已知 $DE\perp BC$, $DF\perp AC$, $DG\perp AB$ 得

$$\begin{cases} [\lambda x_2+(1-\lambda)x_3-1](x_2-x_3)+ \\ [\lambda y_2+(1-\lambda)y_3](y_2-y_3)=0 \\ [\mu x_3+(1-\mu)x_1-1](x_3-x_1)+ \\ [\mu y_3+(1-\mu)y_1](y_3-y_1)=0 \\ [\rho x_1+(1-\rho)x_2-1](x_1-x_2)+ \\ [\rho y_1+(1-\rho)y_2](y_1-y_2)=0 \end{cases}$$

欲证 E, F, G 共线, 即求证

$$\frac{y_5-y_6}{y_5-y_6}=\frac{y_5-y_7}{x_5-x_7}$$

等价于求证

$$(x_5-x_6)(y_5-y_7)-(x_5-x_7)(y_5-y_6)=0$$

上面的已知和求证的各代数式(多项式)中有 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_5, y_5, x_6, y_6, x_7, y_7, \lambda, \mu, \rho$ 15 个变量,有 13 个方程,可以用消去法从中消去 12 个变量,只留下 x_1, x_2, x_3 这三个自由变量组成的等式 $f(x_1, x_2, x_3)=0$。

这一消元过程由计算机去做。

接下去的工作是用计算机求 $f(x_1, x_2, x_3)$在一些指定点上的值,如果这些指定点上的 f 值皆零,则 $f(x_1, x_2, x_3)\equiv 0$,从而西摩松定理证毕;这些指定点可如下指定:

设 x_1 在 f 中最高次数为n_1,则取 $x_1\in\{0,1,2,\cdots,n_1\}$,$x_2$ 在 f 中最高次数为n_2,则取 $x_2\in\{0,1,2,\cdots,n_2\}$,$x_3$ 在 f 中最高次数为n_3,则取 $x_3\in\{0,1,2,\cdots,n_3\}$,进而取指定点为

$$\begin{cases}(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),\cdots\\(0,0,n_3-1),(0,0,n_3)\\(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),\cdots\\(0,1,n_3-1),(0,1,n_3)\\\qquad\cdots\\(0,n_2,0),(0,n_2,1),(0,n_2,2),\cdots\\(0,n_2,n_3-1),(0,n_2,n_3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),\cdots\\(1,0,n_3-1),(1,0,n_3)\\\qquad\cdots\cdots\\(1,n_2,0),(1,n_2,1),(1,n_2,2),\cdots\\(1,n_2,n_3-1),(1,n_2,n_3)\end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}(n_1,0,0),(n_1,0,1),(n_1,0,2),\cdots \\ (n_1,0,n_3-1),(n_1,0,n_3) \\ \qquad\cdots\cdots \\ (n_1,n_2,0),(n_1,n_2,1),(n_1,n_2,2),\cdots \\ (n_1,n_2,n_3-1),(n_1,n_2,n_3)\end{cases}$$

共计 $(n_1+1)(n_2+1)(n_3+1)$ 个点需要用计算机(器)代入 $f(x_1,x_2,x_3)$ 来求值,如果皆等于零,则证毕。

上面这些“活儿”用手来干当然烦人,但用计算机来干只需几秒钟即可完成。目前已有代数方程组消元的现成软件,用以得到一个单个的欲证其为恒等式的等式;也有现成软件来求多项式在指定点的值。

数学上已有理论(例如代数基本定理)的思想性与现代计算机的运算技术相结合,正在把数学家们从繁琐的证明书写和无味的数字或符号运算的桎梏中解救出来,并能用机器证明各种难以证明的数学定理和解决众多数学难题。例如 1997 年人造机器 IBM 公司的“深蓝计算机”在国际象棋盘上运筹博弈,战胜了国际天王级象棋大师卡斯帕罗夫,使人们为之瞠目结舌,叹为观止。

已知与求证中不涉及不等式的初等几何问题,总可以如上面西摩松定理那样,把它用机器化成一个多项式等于零的问题,再用机器证明该多项式是零多项式,即恒等于零,从而完成几何问题的证明。

2.16 勾三股四弦五精品展

(1)中华牌 345 三角形

我国数学名著《周髀算经》中载名句:“句广三,股修四,径隅五。”译成白话文即勾三股四弦五,说的是公元前 1100 年前的大禹时代,

商高已知直角三角形的斜边是5，短直角边(勾)是3，长直角边(股)是4。周髀二字的"周"是周朝，即《周髀算经》是周朝的数学著作，"髀"是股骨，周朝时人们用牛股骨作成测日光影子的工具，见图2-51。

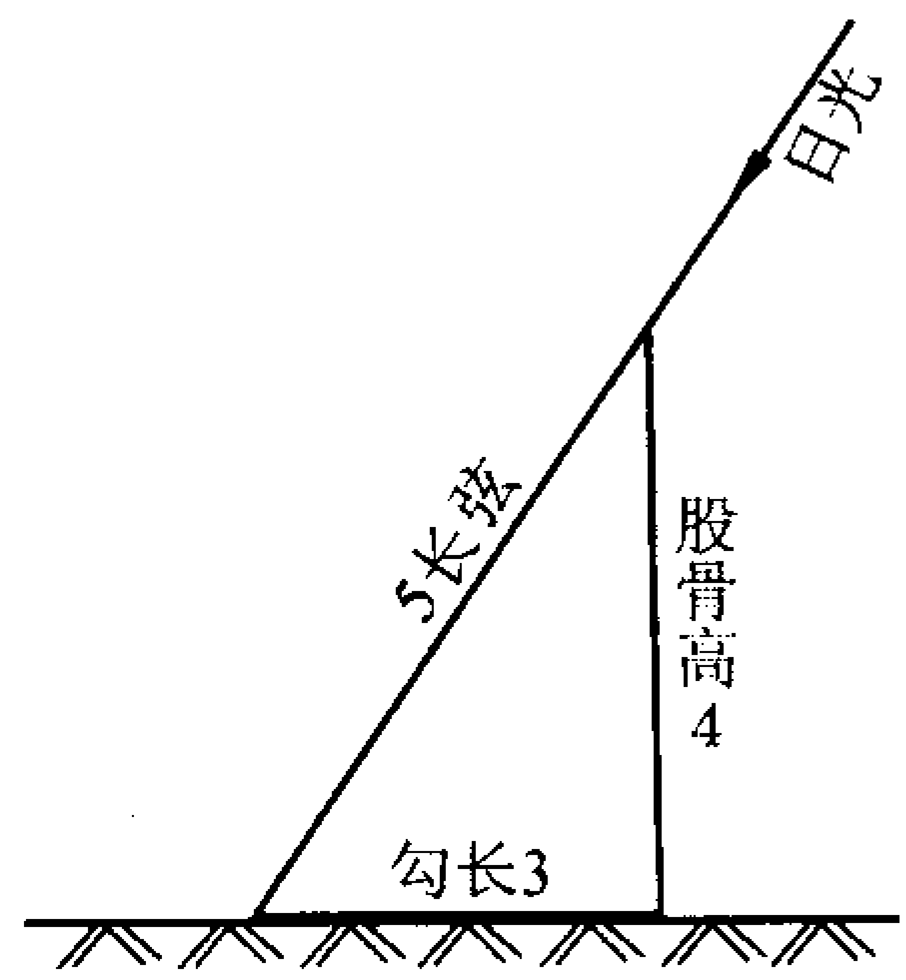


图 2-51

我国的赵君卿于公元222年为《周髀算经》作注，证明了勾股定理。赵君卿又名赵爽，是三国时代吴国人，他的证明看图2-52不言自明。

事实上

$$c^2 = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + (a-b)^2$$
$$= 2ab + a^2 + b^2 - 2ab$$
$$= a^2 + b^2$$

即 $a^2 + b^2 = c^2$，若 $a = 3$，$b = 4$，则 $c = 5$，即勾3股4弦5，图2-52中勾3股4弦5的三角形共四个，下面称三边比为3∶4∶5的直角三角形为345三角形，图2-53中的345三角形有8个：①，②，③，④，⑤，⑥，⑦，⑧。

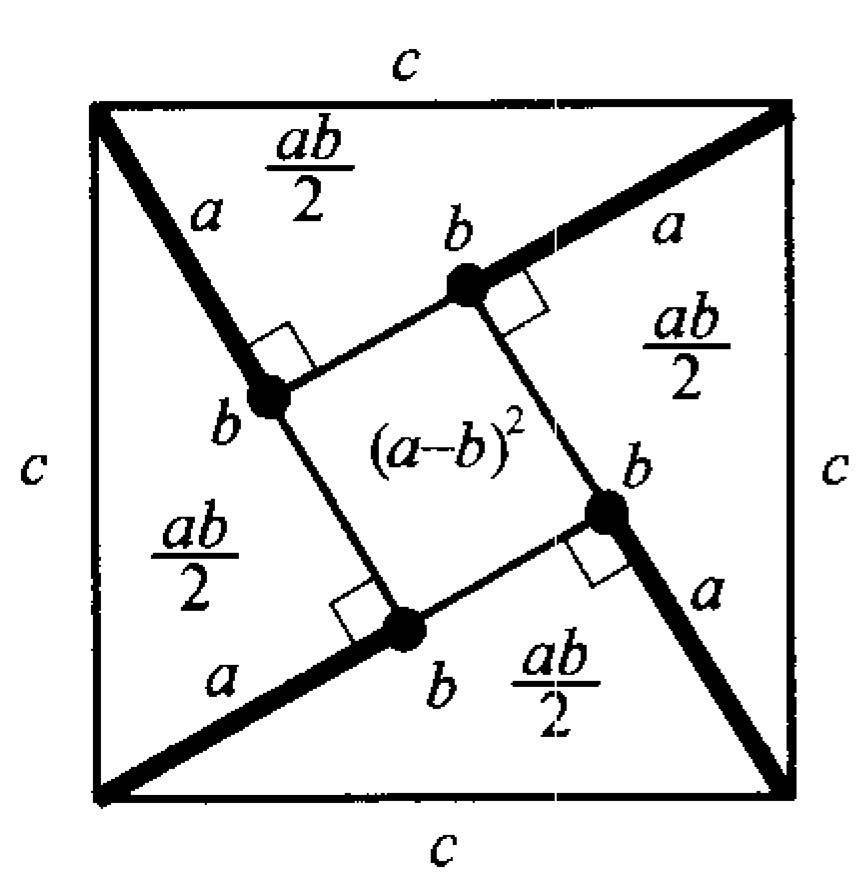


图 2-52

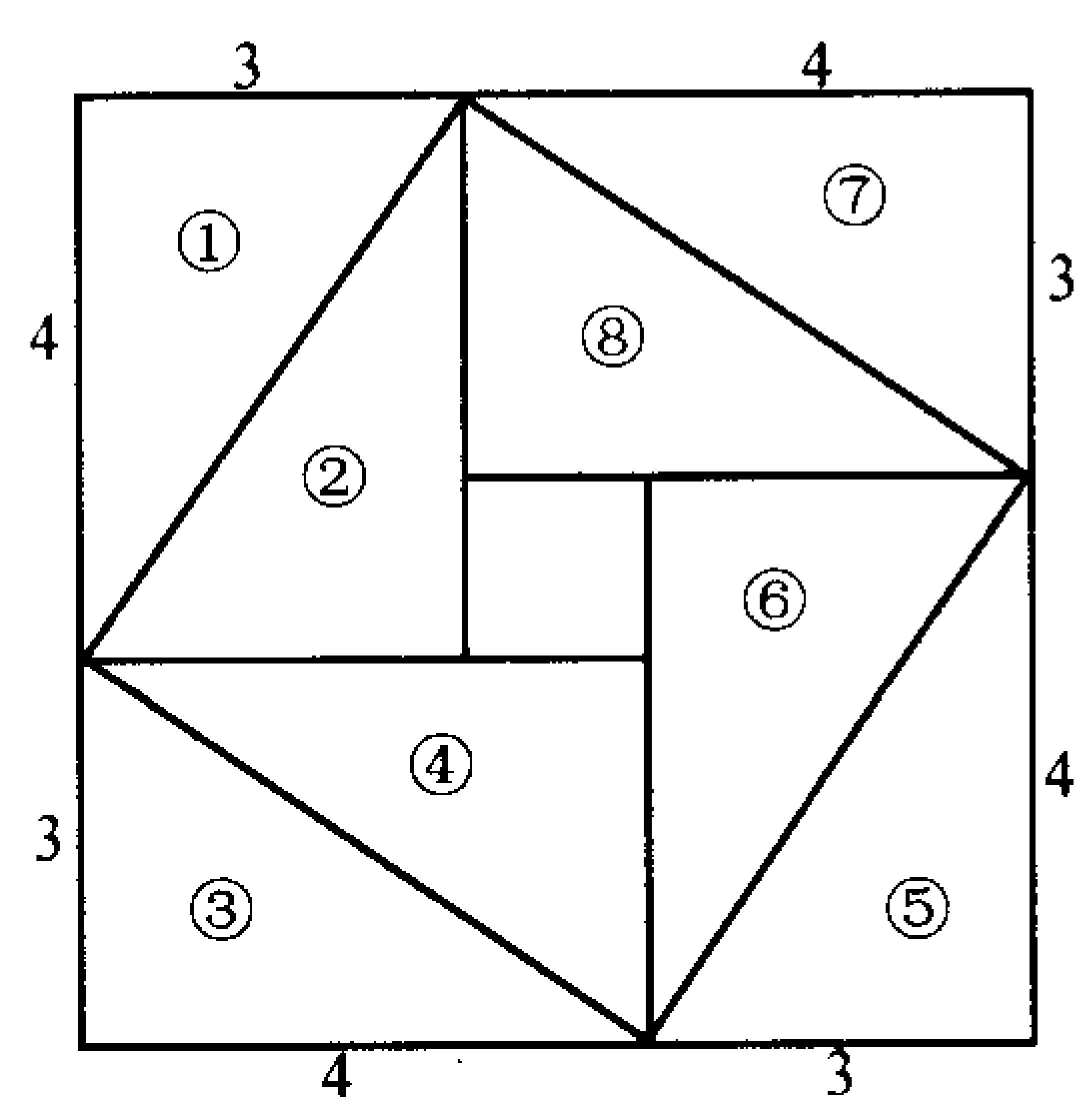


图 2-53

(2)徒手在正方形纸片上作出 24 个 345 三角形

只有一张正方形纸片,其上无任何标志,如何徒手地在这张正方形上显现出 24 个 345 三角形?

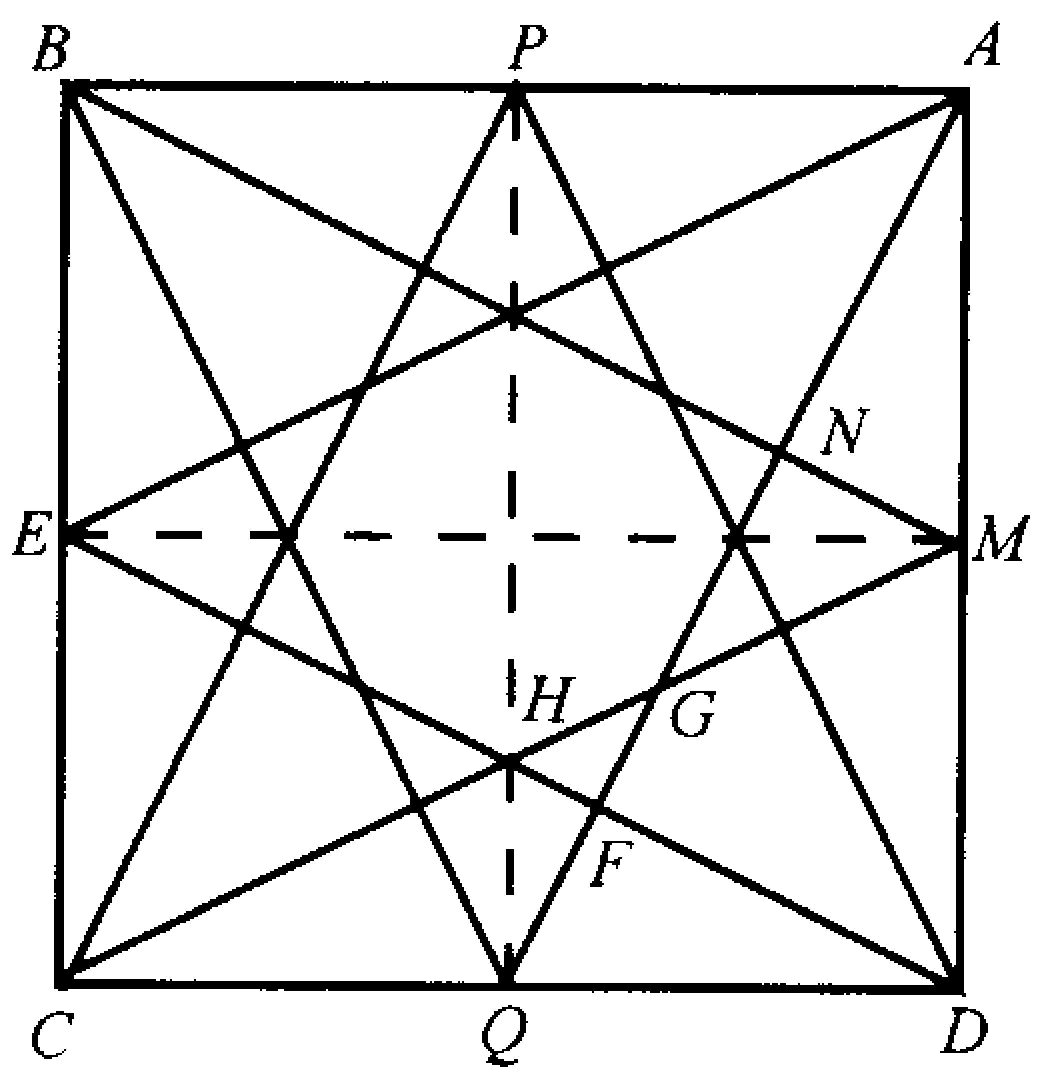


图 2-54

如图 2-54,容易证明与△GHF 全等的三角形共计八个,与△GMN 全等的三角形共计八个,与△AEF 全等的三角形共八个,其中 E, P, M, Q 是正方形各边中点,这四个中点可以由正方形纸片对折得到,进而沿 DE, DP, BQ, BM, AQ, AE, CM, CP 折叠,即得图 2-54 中各折痕线段和各三角形。而且容易看出△$GHF \backsim$△$GMN \backsim$△AEF,下面只欠证△AEF 是 345 三角形。

事实上,设正方形边长为 2,则正方形面积为 4,△CEQ 面积是 $\frac{1}{2}$,△ABE 与△ADQ 面积和是 2,于是△AEQ 的面积为

$$4-2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}AQ\times EF=\frac{\sqrt{5}}{2}\times EF$$

于是 $EF=\frac{3}{\sqrt{5}}$,由勾股定理得 $AF=\frac{4}{\sqrt{5}}$,所以△AEF 是 345 三角形,进而得到 24 个 345 三角形。

常言道,工欲善其事,必先利其器;事实上,人手乃是世间最灵巧的工具,而最聪明者莫过于人脑,电脑永远不及人脑;上面不动用任何工具即造出 24 个 345 三角形即显示了手和脑的优势。

(3)方圆之中的 345 三角形

图 2-55 中,$ABCD$ 是正方形,F 是 DC 中点,以 F 为中心以 FD 为半径画圆,AGH 是此圆切线,G 是切点,H 在线段 BC 上,则

△*ABH* 是 345 三角形。事实上，设 $AB=1$，则 $AG=1$，设 $HC=x$，则 $HG=x$，$BH=1-x$ 由勾股定理得

$$(1+x)^2=1^2+(1-x)^2,\ x=\frac{1}{4}$$

于是 $AB=1$，$BH=\frac{3}{4}$，$AH=\frac{5}{4}$，可见△*ABH* 是 345 三角形。

E 是 *AB* 中点，由相似性，△*AKE* 与△*FGK* 也是 345 三角形；延长 *FG* 至 *J*，*J* 在 *BC* 上，则△*HGJ* 与△*FCJ* 也是 345 三角形。

作 *GP*∥*BC*，*P* 在 *DC* 上；连接 *DJ*。与 *EF* 交于 *I*，作 *IM*∥*AB*，*M* 在 *AD* 上；连接 *AI*。经简单计算知 $DM=\frac{1}{3}$，进而△*FPG*，△*EMI*，△*AIE*，△*AME*，△*AMI* 都是 345 三角形。

由于矩形 *AEIM* 的对角线把此矩形划分成两个 345 三角形，所以从此矩形对角线交点作其边的平行线分得的四个小矩形仍有原矩形的性质，即每个小矩形的两条对角线画出四个 345 三角形，如此可得 $4+4^2+4^3+\cdots$ 个 345 三角形，即可得任意多个 345 三角形。

经过简单计算可以断定图 2-56 至图 2-60 中的阴影三角形是 345 三角形。

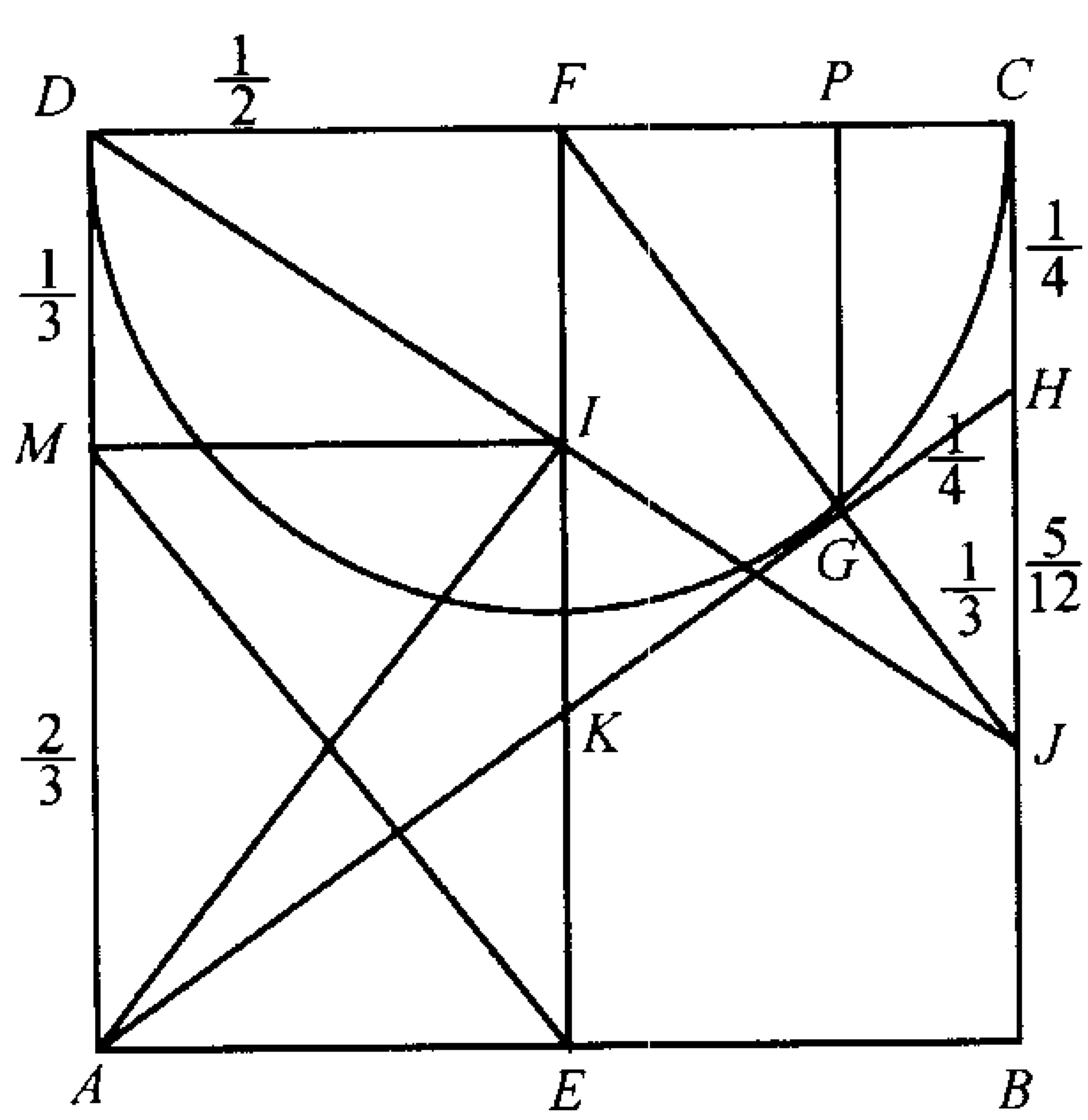


图 2-55

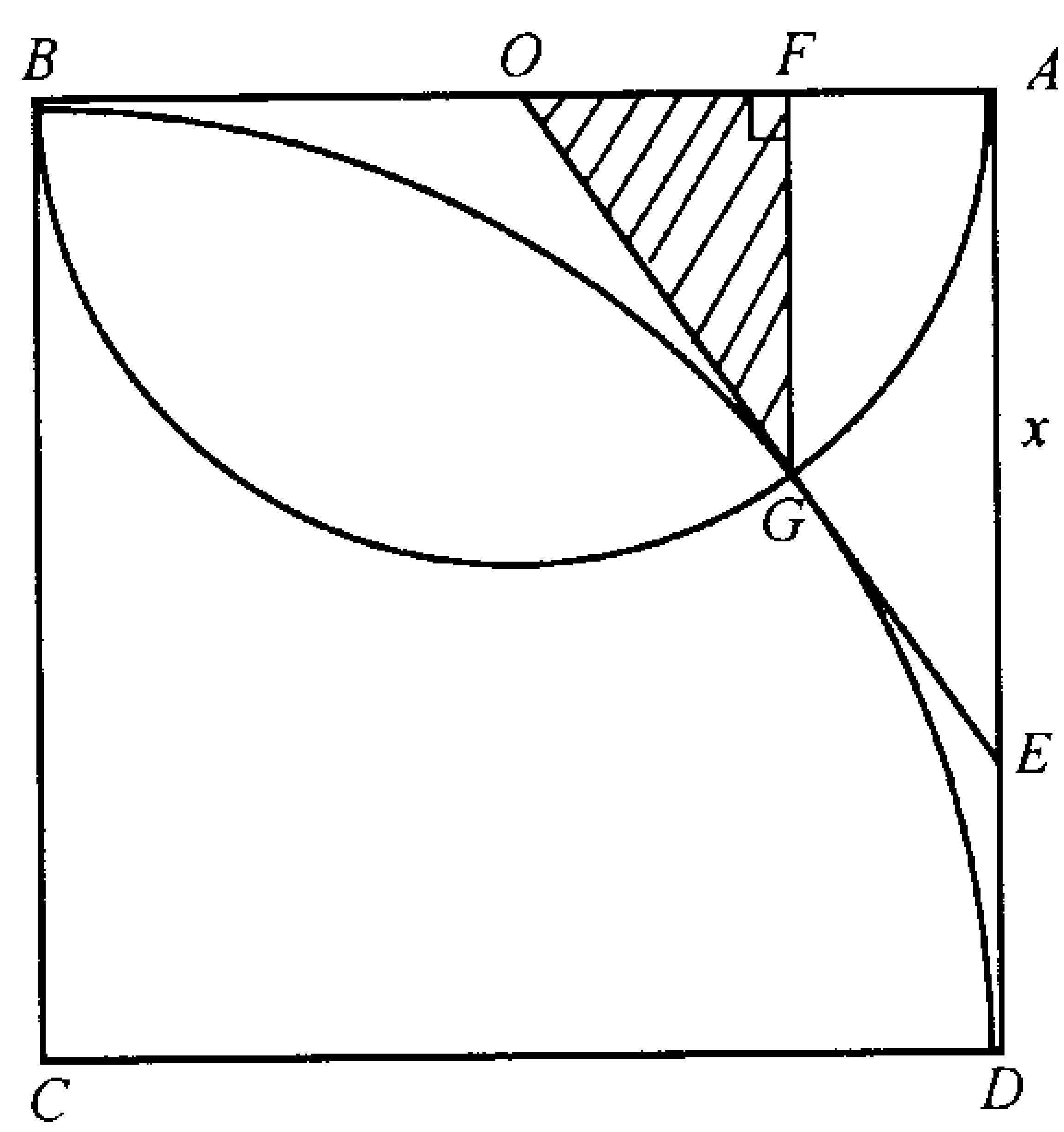


图 2-56

图 2-56 中 O 是 AB 中点，$ABCD$ 是单位正方形，G 是半圆⊙O 与 $\frac{1}{4}$ 圆⊙C 的交点；于是 OGE 是⊙C 的切线，在△OAE 中，由勾股定理，$\left(\frac{1}{2}^{2}\right)+x^2=\left[\frac{1}{2}+(1-x)\right]^2$，$x=\frac{2}{3}$，$OA=\frac{1}{2}$，$OE=\frac{5}{6}$，所以△$OAE$ 是 345 三角形，由相似性，△OGF 也是 345 三角形。

以下各三角形(带阴影者)为什么是 345 三角形，请读者验算一下。

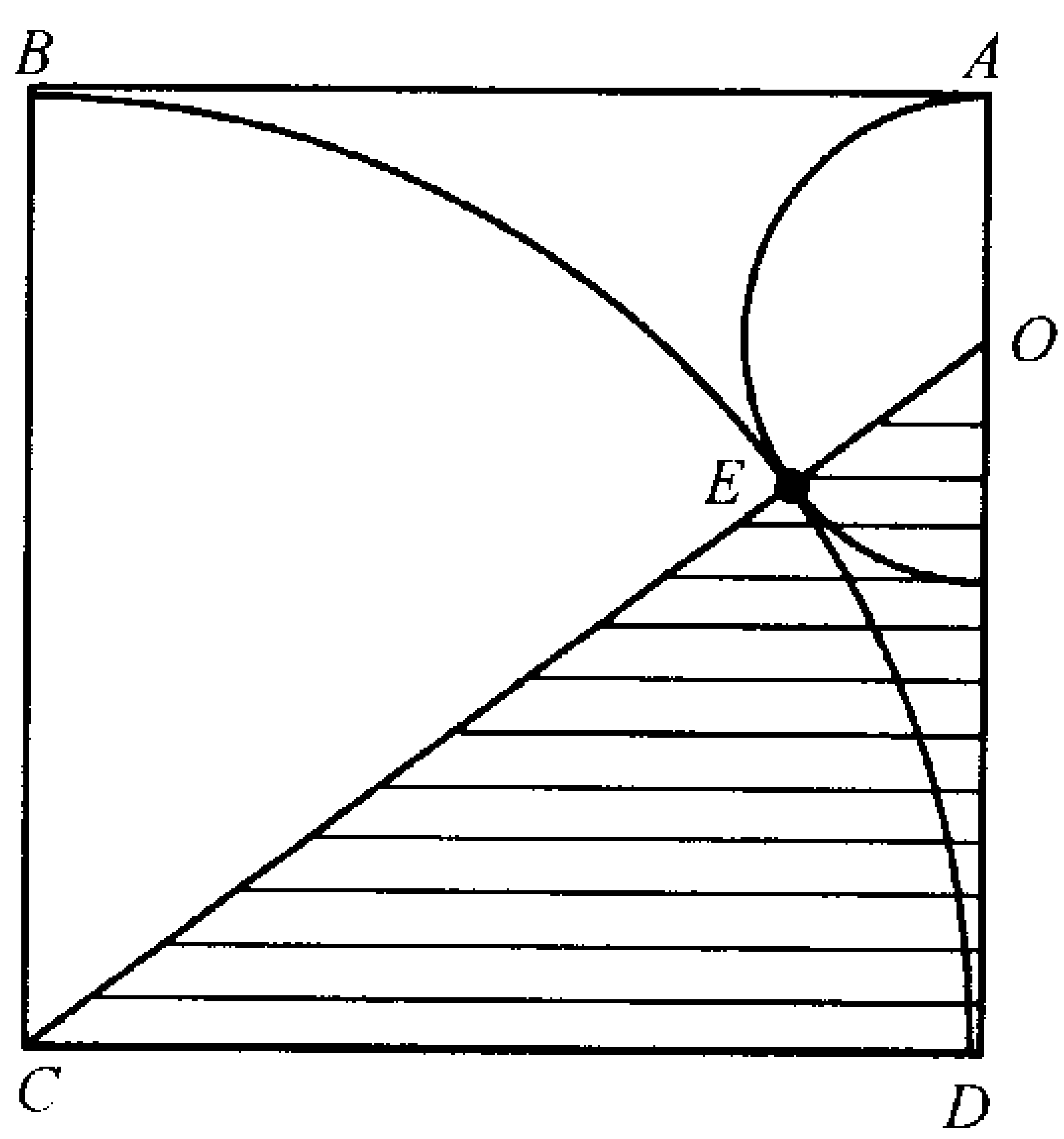


图 2-57

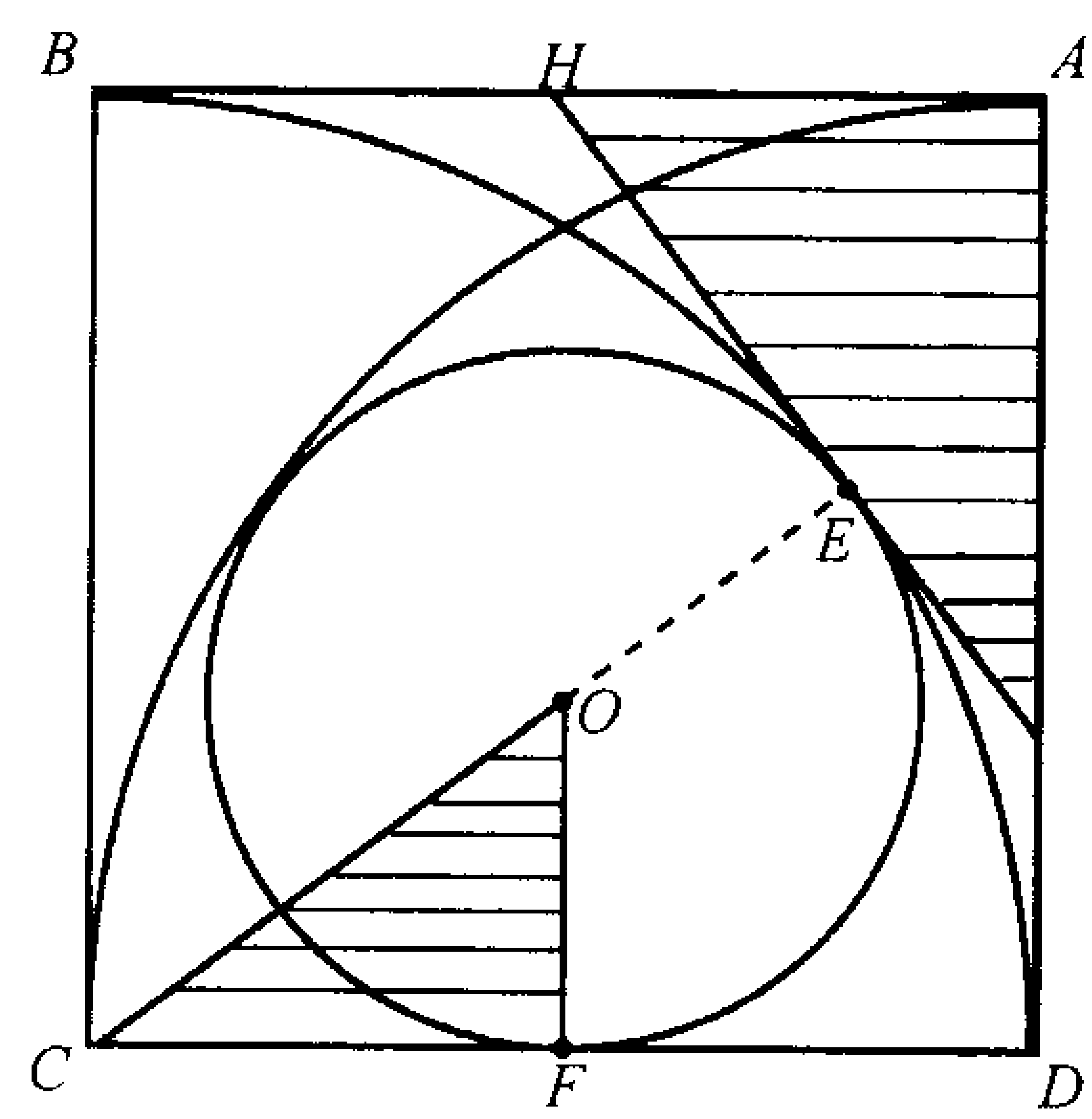


图 2-58

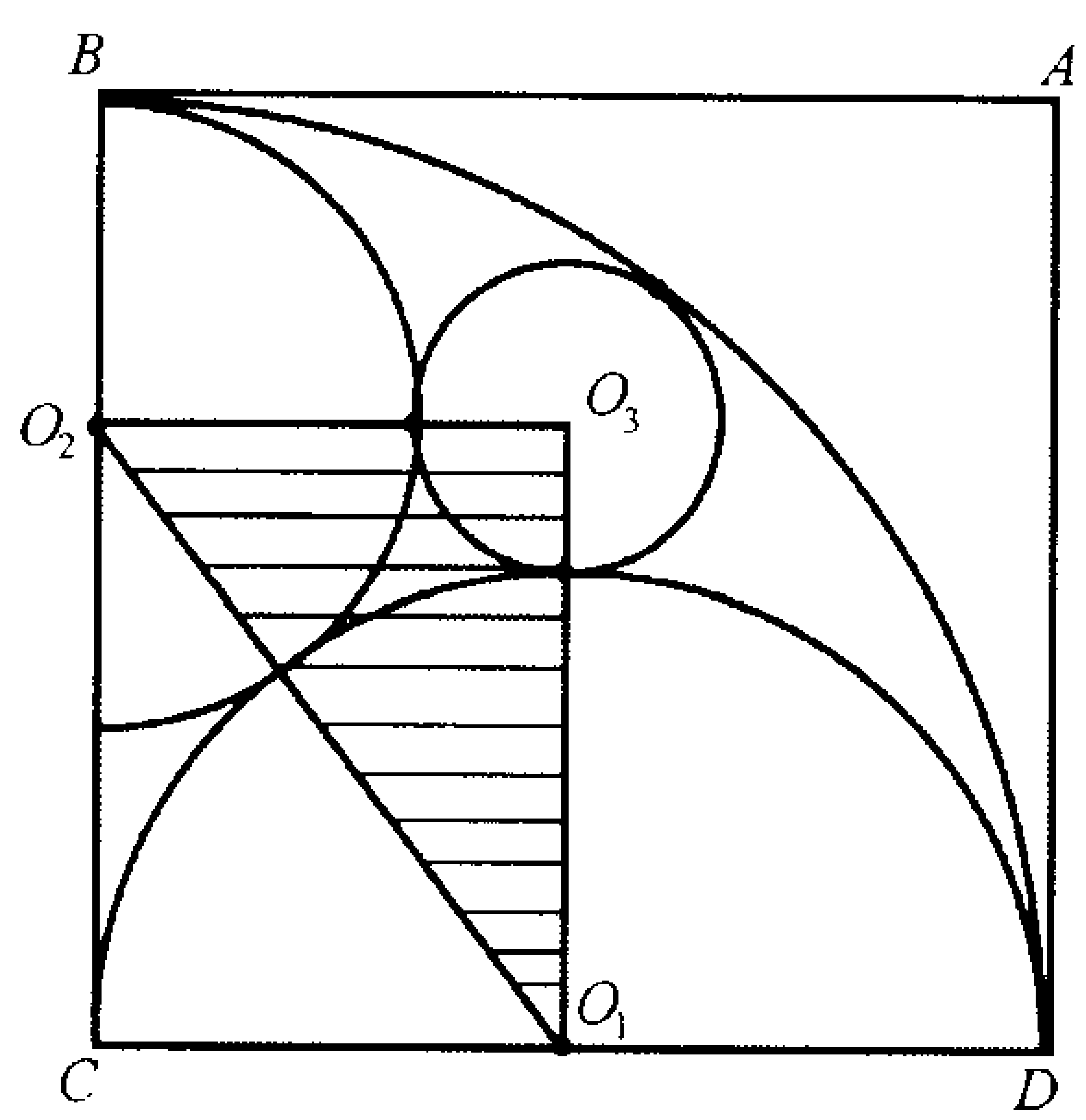


图 2-59

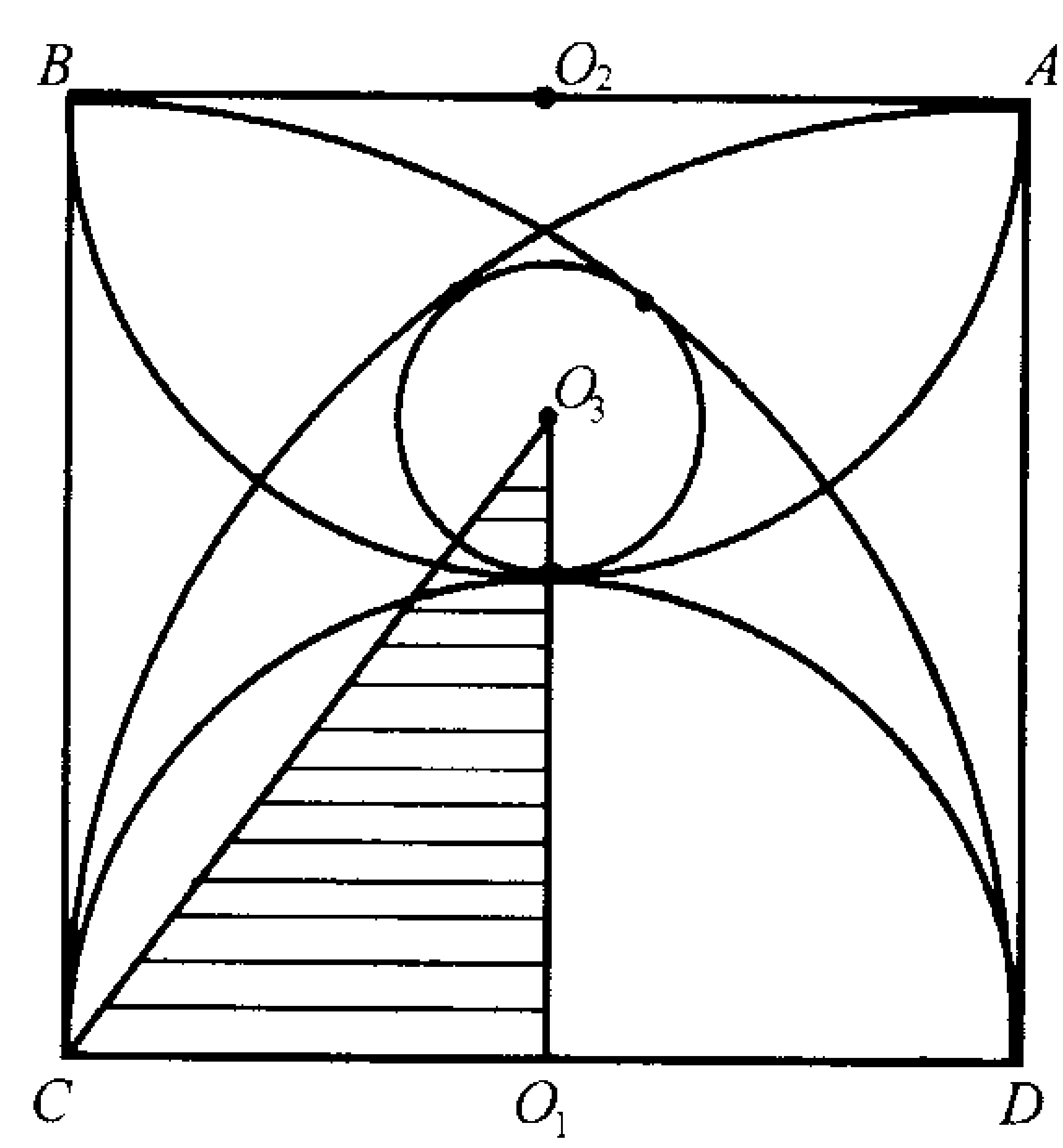


图 2-60

2.17 雪花几何

放眼宇宙，细看犬牙交错的海岸线，美丽对称而边缘并不平滑的雪花，以及天上的云朵，山中的枫叶……绝大多数的客观实物，并不像欧几里得几何中讨论的点、线段、圆、立方体、球等乃至笛卡儿的解析几何中的椭圆，椭球等那样单纯，复杂是宇宙的本性。有不少东西大处和小处的结构有相似性，例如太阳系，地球绕着太阳转，月亮又绕着地球转，月亮上的氢原子核外又有绕其旋转的电子，等等，这种无限嵌套的精细的层次结构实乃大自然的几何学。

(1)春风杨柳

春天到了，从一枝长 1 的柳条的$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$处各长出长为$\frac{1}{3}$的新枝，见图 2-61，分叉点把树枝分成 5 段，每段又从其$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$处长出新枝，此刚长出的新枝之长是该段长的$\frac{1}{3}$，如此生长下去，最后得到枝繁叶茂的一棵杨柳树。

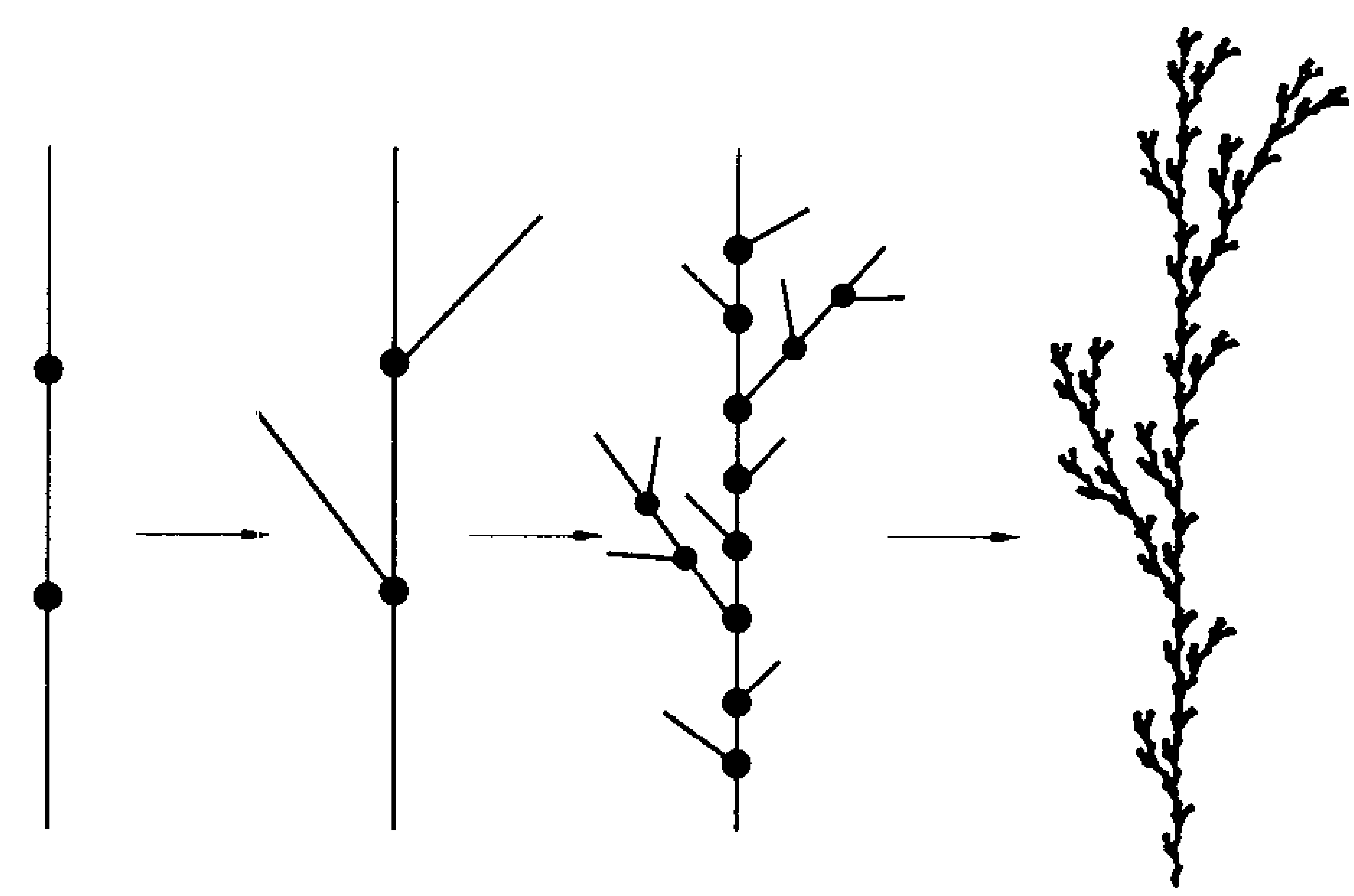


图 2-61

算一算枝条的总长度：

第一次生长了两个枝条，全长为 $1\times\frac{5}{3}$；

第二次又长出了十个枝条，全长为 $1\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$；如此递推，第 n 次又生长了若干枝条，全长为 $\left(\frac{5}{3}\right)^n$，当 n 很大时，$\left(\frac{5}{3}\right)^n$ 是十分巨大的数字，从理论上讲，如果无限生长下去，此树的枝条总长就是无穷的了。当然，由于自然条件的限制，真实的树木是不可能无限地增长的，由于天灾人祸和生物自身的衰老，到一定限度就不会再增长了。

(2) 隆冬雪花

E_0 是单位长线段；E_1 是 E_0 除去中间 $\frac{1}{3}$ 线段代之以底边在除去的线段上的正三角形的另两边所得的折线，E_1 上有四条线段；同样的操作用于 E_1 的每一线段得到 E_2 折线，以此类推，即 E_k 是把 E_{k-1} 的每个线段中间的 $\frac{1}{3}$ 用以它为底的"向外的"正三角形的另两边替代而得。当 k 趋于无穷时，则得一曲线，见图2-62。

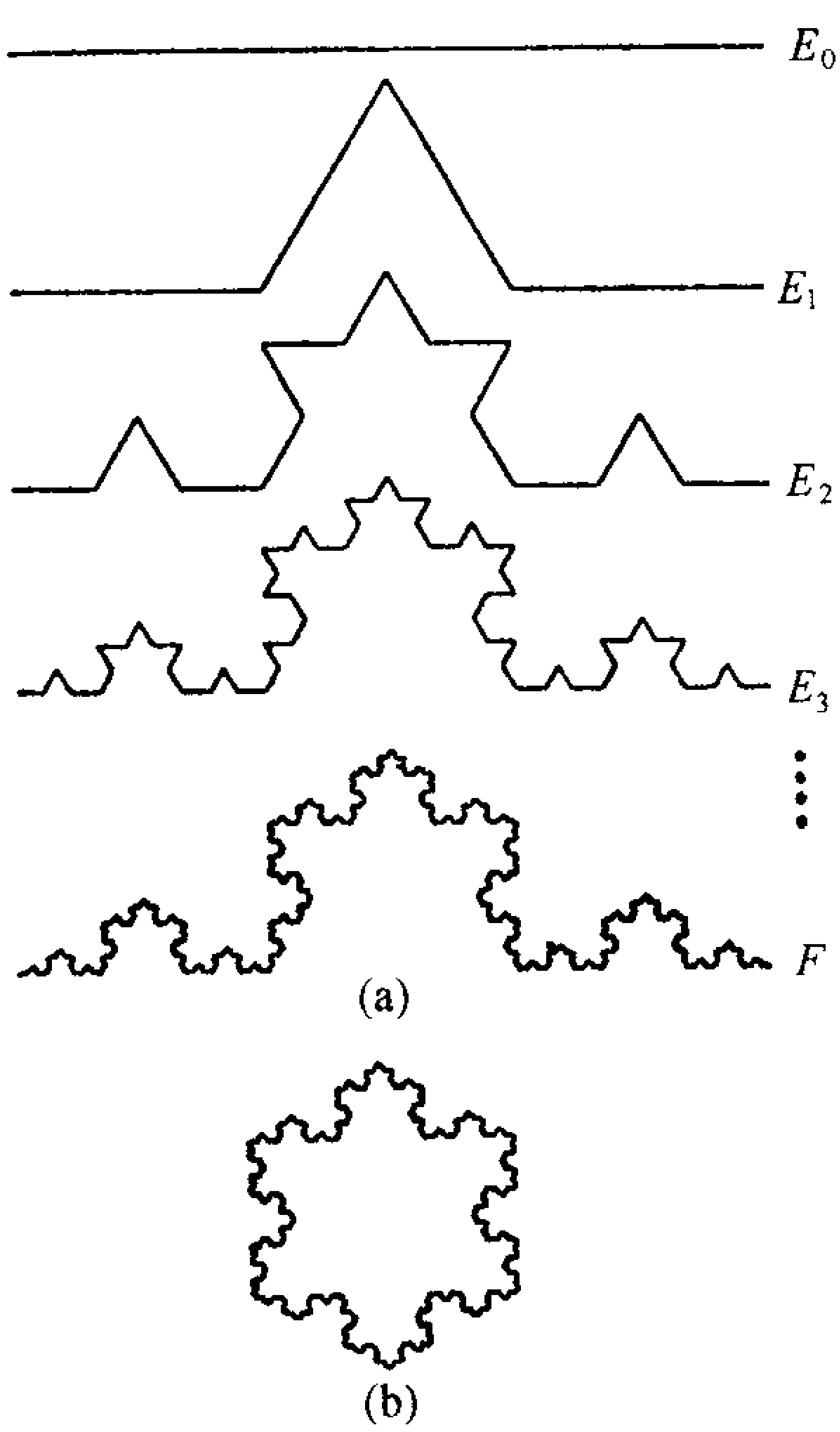


图 2-62

这条曲线是 1904 年由数学家科克(H. V. Koch)首创的，你细瞧海岸线，就有类似的形状。

Koch 曲线留在 E_0 上的部分是康托尘集。

三条 Koch 曲线围成一片雪花，见图 2-62(b)和图 2-63。

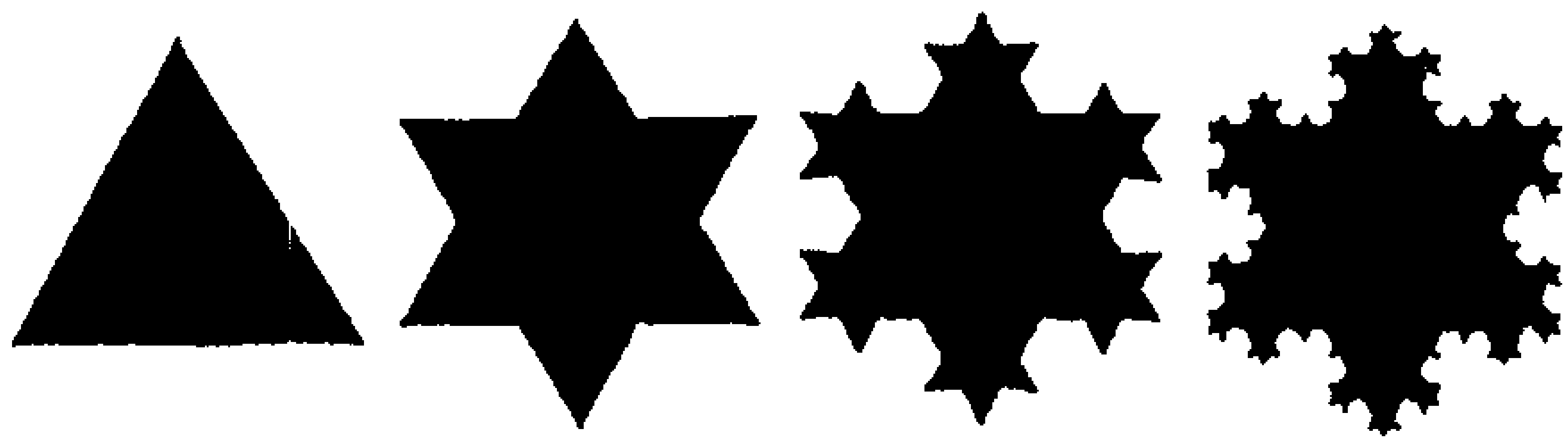


图 2-63

下面算一下雪花边界线的长度。由于每操作一步，所得折线是上一代折线的$\frac{4}{3}$，所以第 n 次 E_n 的长度是$\left(\frac{4}{3}\right)^n$，当 n 足够大时，$\left(\frac{4}{3}\right)^n$ 是十分巨大的数字，当 n 趋于无穷时，雪花边界长是无穷大。

再算一下雪花的面积。

E_1 与 E_0 夹的面积

$$A=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{36}$$

E_2 比 E_1 多了四个小三角形，它们的面积是$\frac{4}{9}A$，依此类推得

$$B=\left[1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3+\cdots\right]A=\frac{9}{5}A=\frac{\sqrt{3}}{20}$$

B 是E_0 与 Koch 曲线夹的面积，雪花总面积 C 为边长为 1 的正三角形加上 $3B$，即

$$C=\frac{3\sqrt{3}}{20}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{5}\sqrt{3}$$

我们看到有限面积的边界却是无穷长的曲线。

(3) 清凉坐垫

用三条中位线把一个正三角形划分成四个正三角形，去掉中间的那个小正三角形；对于剩下的小正三角形，再用其三条中位线划分且舍去中间的小正三角形，如此不停地进行正三角形“去心”，最后得到的平面点集就成了一个满身大孔小孔的清凉坐垫，见图 2-64。

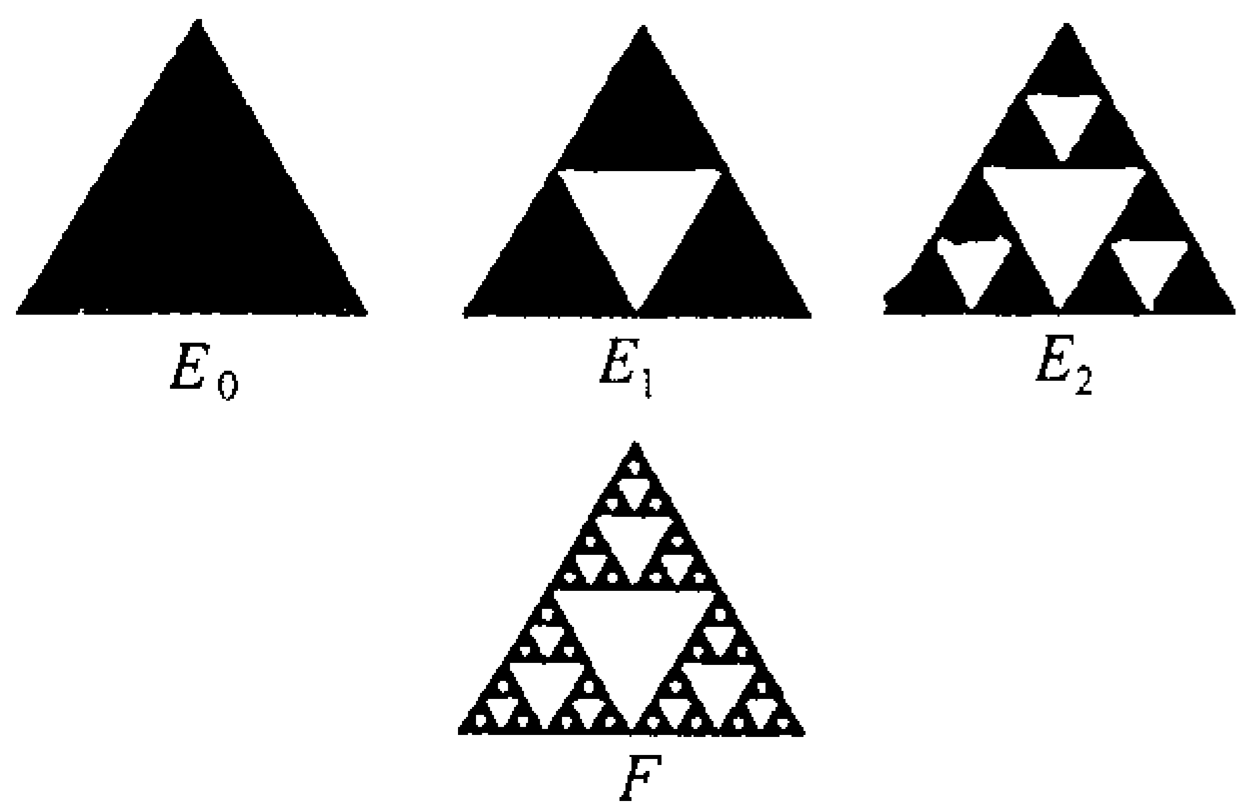


图 2-64

若原来正三角形的面积是 A，则剩下的点集的面积为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$$

从以上几个精彩的实例我们领会到，自然界许多东西都是由本来十分简单的事物为基础用简单的步骤的重复作用产生出来的，联想到为什么相对少量的遗传物质可以发育成复杂的器官，例如大脑乃至整个生物机体，还可以理解仅占人体质量5%的血管何时可以布满人体的每一部分等这些生物的"魔术"表现。

2.18 最优观点与最大视角

1471 年，德国数学家 J·米勒(Miller)提出如下问题：

一尊英雄塑像，高 H 米，塑像底座高 p 米，一人从远处注视塑像朝它走去，此人眼离地面 h 米，问此人走到哪一点观看塑像时，觉得塑像最大(即视角最大)?

如果人的水平视线与塑像有交点，则离塑像越近，视角越大，感到塑像也越大。

如果人的水平视线与塑像不能相交，不妨设人的眼睛离地的高度 $h<p$(如果人的眼睛离地的高度$h>H+p$，与 $h<p$ 相似地讨

论)。

如图 2-65, AB 是塑像, BC 是底座, α 与 β 是不同的视角。

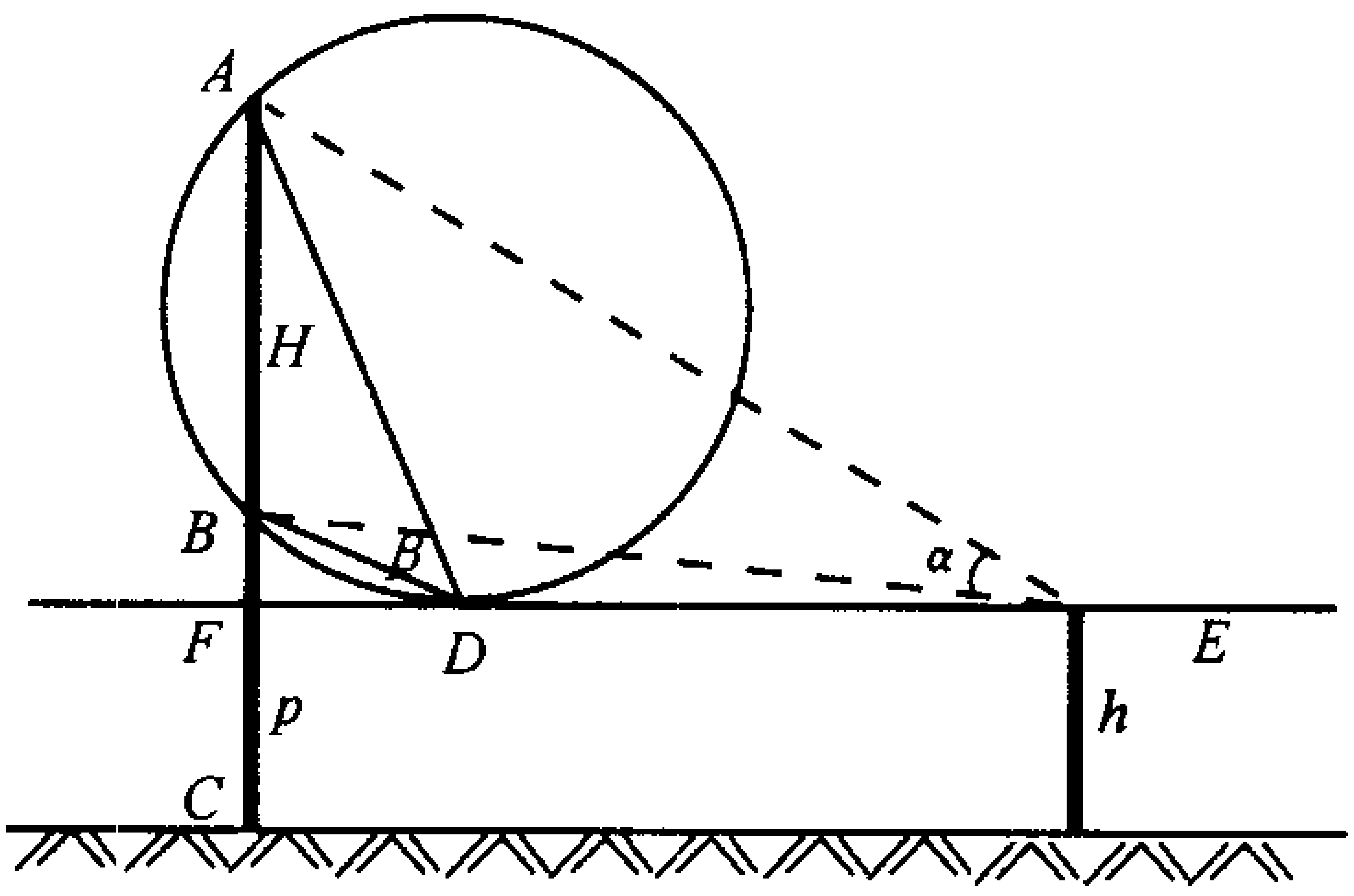


图 2-65

作距地面为 h 的水平线 DE, 作圆过 A, B 两点且与 DE 相切, 切点为 D, 则 D 点是人眼的最优观点, $\angle ADB$ 是最大视角。

事实上, 人眼在水平线 DE 上, 除 D 点外, DE 上任一点皆在圆外, 见图 2-66, 若眼在 D 点右侧 M_1 点, 连接 BM_1 与圆交于 M_2, 则 $\angle AM_2B = \angle ADB$, 而 $\angle AM_2B$ 是 $\triangle AM_2M_1$ 之外角, $\angle AM_2B > \angle AM_1B$。若眼在 D 点左侧, 同理可证视角小于 $\angle ADB$。可见 $\angle ADB$ 是最大视角, D 点是最优观点。

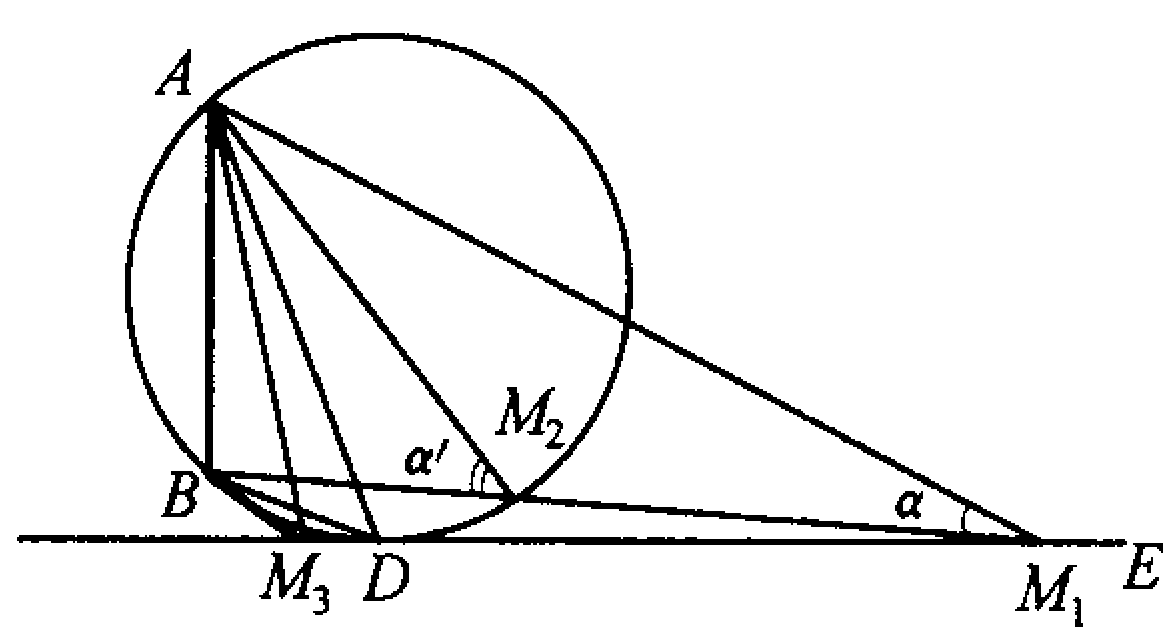


图 2-66

例如 10 尺高的塑像, 安放于 13 尺的底座上, 人眼高 5 尺, 求最佳观点 D。

考虑由于 $FD^2 = FB \times FA$, 而 $FB = 13 - 5 = 8$(尺), $FA = 13 + 10 - 5 = 18$(尺), 则 $FD = \sqrt{8 \times 18} = 12$(尺), 即人眼 D 与底座的水平距离应为 12 尺, 才使得塑像看起来最大。

看起来, 古典的平面几何不仅仅是人类思维的健身操, 不少实用

性问题也能巧妙地运用初等几何的方法得以解决，初等几何不仅有趣、漂亮，而且有用，欧几里得永垂不朽！

2.19 切分蛋糕

甲乙二人分食一块正三角形蛋糕，切一刀，每人吃其中一块。乙说蛋糕要由他来切，而且还要由他先挑。聪明的甲说同意，但要乙答应一个条件，条件是乙切蛋糕时刀刃必须经过甲指定的一点，设蛋糕的厚薄均匀，试问甲指定的点在何处才能使贪嘴的乙少占便宜？且问乙最多可以多吃多少蛋糕？

什么样的蛋糕乙占不着便宜？

有无一种形状的蛋糕，乙能得到比整个蛋糕的$\frac{3}{4}$还多的部分？

如果是中心对称形蛋糕，甲把“指定点”取在对称中心上，则乙只能把蛋糕等分，不会切出一块大一块小的情形，这样甲就迫使乙的贪婪企图落空，只能二人等分了；当蛋糕是圆形、椭圆形、正方形或正六边形等形状时，就会发生上述形势，这时乙占不到便宜。

对于正三角形的情形，甲把指定点取在三角形的重心是最佳策略，见图 2-67。

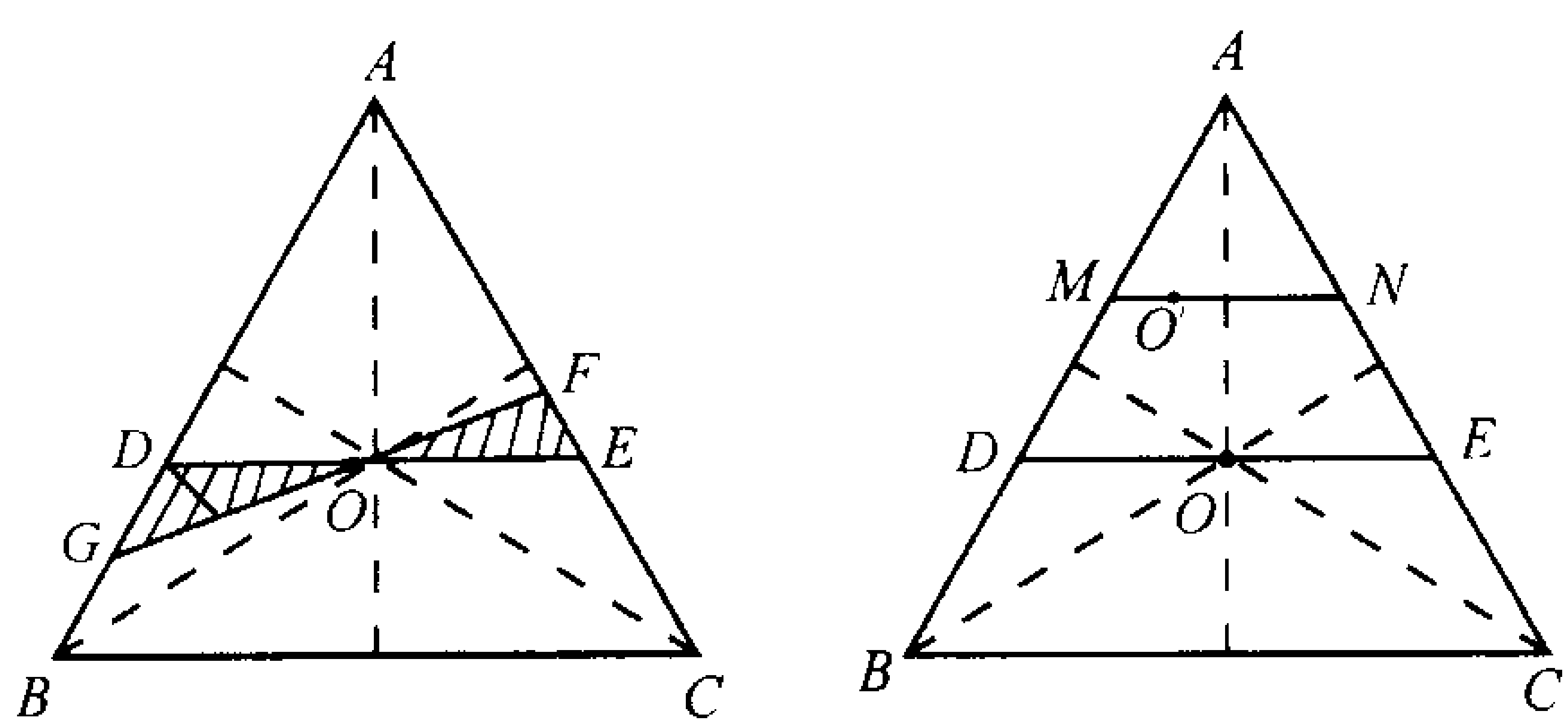


图 2-67

$\triangle ABC$ 是长边为 1 的正三角形，则乙只能过重心 O 平行于 BC 来切，不然，若过 O 点沿其他方向 GOF 来切，则他至多得到四边形 $BCFG$，这块蛋糕比梯形 $DECB$ 少，事实上，$\triangle OGD$ 的面积比$\triangle OEF$ 的面积大。

如果甲把指定点定在 O' 处，$O' \neq 0$，则乙过 O' 沿 BC 平行的方向 MN 来切分，则乙会多得到一块梯形 $MNED$。所以甲唯一的选择是把指定点取在 O 点。

无论什么形状的蛋糕，乙也得不到 75% 以上的蛋糕。事实上，任何形状的蛋糕，甲总能从其上指定一点及过此点的两垂直线，使得这两条垂线把蛋糕划分成各占 25% 的四块。如果把这两条垂线视为平面上的坐标轴，则乙过指定点(原点)怎么切，都有至少一个象限的那部分蛋糕未被切分，所以乙至多得$\frac{3}{4}$，不会超过 75%。

下面论证存在两垂直直线，把平面上任连通有界区域等分成四块，或曰，垂直切两刀，可把任意蛋糕等分成四块。

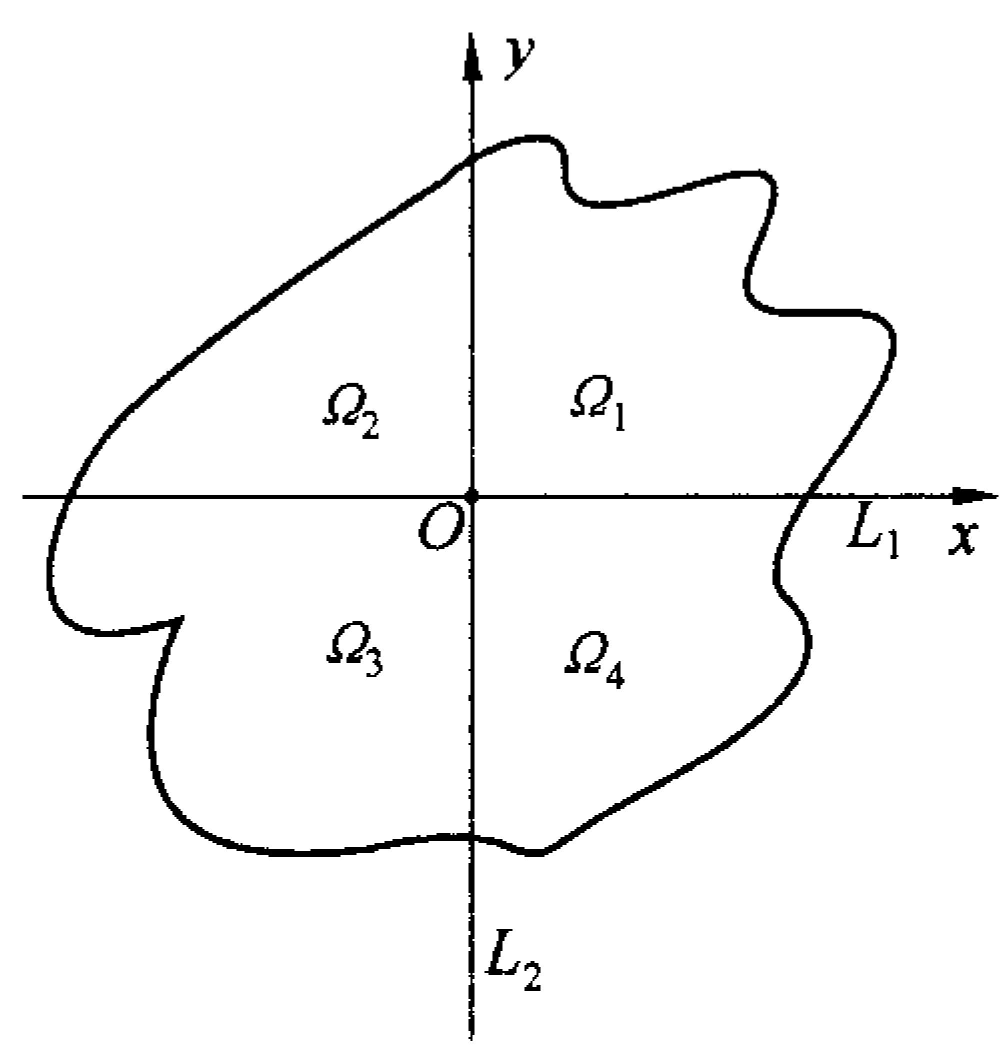


图 2-68

在平面上任意给定一个区域 Ω，见图 2-68，在 Ω 下方画一水平线 L，它与 Ω 无公共点，把 L 向上平移，存在 L_1 的一个唯一的位置，使得 Ω 在 L_1 的上方与下方的部分等积；再在 Ω 的左方画一条与 L_1 垂直的直线 L_2，把 L_2 向右方平行，则存在 L_2 的唯一的位置，使得 Ω 在 L_2 两侧的部分等积，于是

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3 + \Omega_4 \tag{2.11}$$

$$\Omega_1 + \Omega_4 = \Omega_3 + \Omega_2 \tag{2.12}$$

其中 Ω_1，Ω_2，Ω_3，Ω_4 表示 Ω 被 L_1，L_2 划分的四部分的面积。由(2.11)、(2.12)得 $\Omega_1 = \Omega_3$，$\Omega_2 = \Omega_4$。考虑差 $\Omega_1 - \Omega_2$，若 $\Omega_1 - \Omega_2 =$

0，则得 $\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=\Omega_4$，即蛋糕被四等分，若 $\Omega_1-\Omega_2\neq 0$，下面指出适当调整十字架(L_1 与 L_2 构成的垂线)的位置，可以使得(2.11)、(2.12)满足且 $\Omega_1-\Omega_2=0$。

不妨设 $\Omega_1-\Omega_2>0$，Ω_1 是第一象限的 Ω 部分，当十字架连续变动位置，在全过程中保持(2.11)、(2.12)成立，且最后原点仍落在原点上，x 正半轴落在原 y 轴正半轴的位置，则 Ω 在第一象限的部分为 Ω_2，第二象限的部分为 Ω_3，而这时 $\Omega_1=\Omega_3$，故 $\Omega_2-\Omega_3<0$；在十字架的位置连续变化时，Ω 的第一象限的面积与第二象限的面积差也连续变化，今此差可取正亦可取负，所以此差在十字架连续变动且(2.11)、(2.12)保持时，即第一、二象限之和与第三、四象限之和相等，第一、四象限之和与第二、三象限之和相等时，第一象限与第二象限的 Ω 之面积差可以取到零，这时四个象限的 Ω 的面积相等，即蛋糕被四等分。

2.20 人类首席数学家

作者认为欧几里得是开天辟地以来，人类首席数学家，他虽然并非最杰出的数学家，但他撰写的《几何原本》却是两千多年来人类智慧的乳汁，每位科学家的必修课本，欧几里得称为数学乃至整个自然科学的奶娘是不为过的。

欧几里得生于公元前330年希腊的亚历山大城(死于公元前275年)，受教于柏拉图学派，并在亚历山大城组建欧几里得学派。他与阿基米德、阿波罗尼奥斯是古希腊三大数学领袖，他们的成就是古希腊数学成就的巅峰。

欧几里得不是欧几里得几何的创始人，他的最大贡献是把前人的几何成果整理归纳，纳入了严密的从公理公设出发的逻辑体系之中，写成一部人类几何知识的集大成《几何原本》。可惜《几何原本》

的原作已失传，现在各种语言翻译的版本皆为后人修订、注释重新编撰的，其中公元四世纪赛翁(Theon)的修订本是《几何原本》的主要底本。《几何原本》是科学史上流传最广、影响最大的著作，至今世界各国中学数学教学当中仍然在讲授《几何原本》上的主要内容。《几何原本》早期只有手抄本，直至1482年才在意大利的威尼斯问世了第一部《几何原本》的印刷本，至今已有各种文字的一千多种版本的《几何原本》正式出版发行。目前最流行的是T. L. Heath的英译本《几何原本》。

欧几里得的为人是知识分子的表率，他专心致志，献身科学，拒绝当官，对统治者从不阿谀奉承，例如国王托勒密向欧几里得请教几何，这个愚笨的独裁者听不懂严格的证明，责令欧几里得把证明讲得通俗一些，欧几里得根本不把这位伟大的领袖放在眼中，不屑一顾地对君王说："几何之中没有皇上走惯了的那种康庄大路。"

欧几里得对名利十分厌恶，传说一位贵族公子来向欧几里得求学，他对欧几里得说："学会这个定理，将得到何种奖励？"欧几里得听后立刻吩咐一位仆人说："快给他三个钱币，让他走人！"

欧几里得开严密逻辑证明之先河，他示范了一切数学命题之证明必须从定义和公理出发引用已有的定理或公式，正确运用逻辑规则来进行推理，禁止有半点的含混和想当然。他写的《几何原本》就是这种"数学美"与数学文化的样板。事实上，如果不坚持欧几里得的这种"数学规矩"，数学的生命力就会丧失。

除了几何之外，欧几里得在数论、光学等多方面尚有不俗的成就。例如他是证明素数无穷的第一人；他的著作颇丰，除伟大经典《几何原本》外，还有《二次曲线》、《图形分割》、《曲面与轨迹》、《数据》、《辨伪术》、《光学》、《镜面反射》、《现象》，等等。

他在证明"两圆面积比等于两者直径平方比"时，首次使用"穷竭法"，是极限思想的原始形态。他说圆与边数足够多的内接正多边形

的面积差可以小于任何预先给定的量，这正是近代微积分中无穷小的原型。

欧几里得的另一个特点是对数学的实际应用并不热衷，他的《几何原本》中甚至连三角形的面积公式都未列入，大有为“几何而几何”，对日常事物超脱不顾的态度，这就不太好了！

2.21《几何原本》内容提要与点评

《几何原本》共 13 卷，其中的卷相当于今日数学著作中的章，书中共 119 个定义，5 条公理，5 条公设，465 条命题，是数学史上第一个数学公理体系。有的版本设 15 卷，但不少数学家认为后两卷非欧几里得所著。

卷一是基本定义及公设公理。

含 23 个定义，5 个公设，5 个公理和 48 个命题。

定义 1 点是没有部分的东西。

定义 2 线有长度没有宽度。

定义 3 线的两端是点。

定义 4 直线是这样的线，它关于在其上所有的点的位置是相等的。

定义 5 面只有长度和宽度。

定义 6 面的边缘是线。

定义 7 平面是这样的面，它关于在其上的所有直线的位置是相等的。

定义 8 平面角是在一平面内但不在一直线上的两条相交直线的相互倾斜度。

定义 9 当包含角的线是直线时，这个角叫做平角。

定义 10 当一条直线竖直在另一条直线上使得相邻的角彼此相

等时，每一个相等的角是直角，竖立在另一条直线上的直线称为垂直于它所竖立的直线。

定义 11 钝角是大于直角的角。

定义 12 锐角是小于直角的角。

定义 13 边界是物体的尽头。

定义 14 图形是被一个或多个边界包围的。

定义 15 圆是由一条曲线包围的图形，从其中一点出发落在曲线上的所有线段彼此相等。

定义 16 （定义 15 中的）那个点叫做圆心。

定义 17 圆的直径是过圆心且在两个方向上止于圆周的任意线段；这样的线段将圆二等分。

定义 18 半圆是直径和由它截得的圆周所围成的图形，半圆的中心与圆心相同。

定义 19 直线形是由线段围成的。三边形是由三条线段围成的，四边形是由四条线段围成的，多边形是由多于四条线段围成的。

定义 20 在三边形中，等边三角形是三条边相等的，等腰三角形是只有两条边相等的，不等边三角形是三条边都不相等的。

定义 21 在三边形中，直角三角形有一个直角，钝角三角形有一个钝角，锐角三角形有三个锐角。

定义 22 在四边形中，正方形是各边相等且各角都是直角的；长方形是角为直角但边不全相等者；菱形是边相等但角不都是直角的；长菱形是对边和对角彼此相等但也不全相等且角不是直角的；除这些之外的四边形称作不规则四边形。

定义 23 平行直线是在同一平面内向两个方向无限延伸，而在两个方向上彼此不相交的直线。

公设 1 假定从任意一点到任意一点可作一条直线。

公设 2 一条有限直线可以不断延长。

公设 3 以任意中心和直径可以画圆。

公设 4 凡直角都相等。

公设 5 若一直线落在两直线上所构成的同旁内角之和小于两直角，那么把两直线无限延长，它们将在同旁内角和小于两直角的一侧相交。

公理 1 等于同量的量彼此相等。

公理 2 等量加等量和相等。

公理 3 等量减等量差相等。

公理 4 彼此重合的图形是全等的。

公理 5 整体大于部分。

在第一卷里，欧几里得证明了 48 个命题。

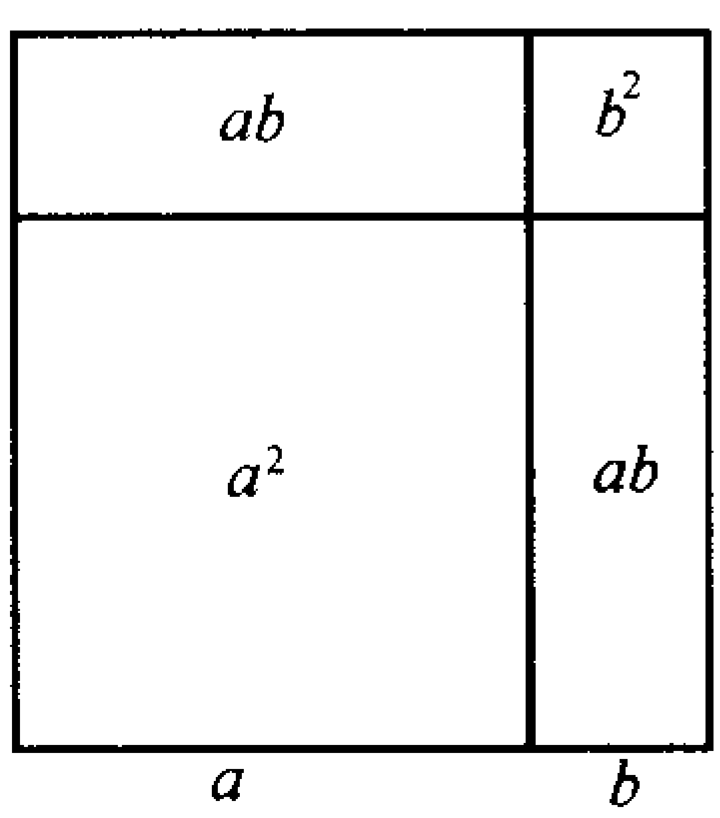


图 2-69

第二卷是 14 个代数恒等式的几何表述。例如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的几何表述如图 2-69。

第三卷是关于圆周、弦、切线和与圆有关的角的定义和命题，定义 11 个，命题 37 个。

第四卷有 16 个命题，讲圆的内接与外切多边形及正五边形、正六边形与正十边形的做法。

第五卷由 18 个定义和 25 个命题组成，叙述与几何相关的算术问题，主要是与相似形有关的比与比例的概念与性质。

第六卷是相似形的理论，运用比例算术进行研究。本卷有 5 个定义和 33 个命题。

第七卷有 23 个定义和 39 个命题。

第八卷有 27 个命题，无定义。

第九卷有 36 个命题，无定义。

第七、八、九三卷讲的是整数理论，由于欧几里得用线段表示数，所以他把这些内容写入几何书中、著名的定理质数无限性就收入第

九卷中。

第十卷是欧氏著作中最难的部分，讲述可通约与不可通约的理论。讲出了二次与四次根式，但欧氏未发现无理数。这些根式与几何运算有关。本卷有 4 个定义和 115 个命题。

第十一、十二、十三卷基本上是关于立体几何内容的讲述。

第十一卷有 31 个定义和 40 个命题，主要内容有球、圆锥、圆柱和五个正多面体，以及空间的直线与直线、平面与平面、直线与平面的位置关系，还有平行六面体的等积问题。

第十二卷由 18 个命题组成，讨论棱柱与棱锥以及球体体积等内容。

第十三卷由 18 个命题组成，主要讨论正多面体的理论。

第十四卷中有 7 个命题，讲多面体的性质。

第十五卷中有 7 个命题，讲正多面体内接于另一正多面体的问题。

不少史学家以为第十四、十五卷是亚历山大城的希伯西克尔(Hypsicles)续写的。

从以上摘要让我们突出地感到两点：一是《几何原本》内容丰富，名副其实的博大精深；二是整个著作充满着对概念和逻辑的庄严追求，它成了几千年数学教育的最佳教材，现代的中学几何课本不过是《几何原本》改写成现代形式而已，历史上的大科学家都是由《几何原本》受到启蒙教育而成为科学大师的，他们之中的代表人物有哥白尼、伽利略、笛卡儿、牛顿、罗蒙诺索夫、拉格朗日、罗巴切夫斯基、李雅普诺夫、茹可夫斯基等；事实上，一切伟大的学者，历史上的和现代的数学家，都学习过《几何原本》。

由于历史的局限，和两千多年前数学科学的幼稚，毋庸讳言，《几何原本》存在着许多明显的缺点，虽然我们不应苛求古人，但以科学的态度探讨它的短处，对数学科学的进步只会有好处。

第一个缺陷是全书从未涉及几何学的应用，甚至连画圆与画直线

的圆规和直尺这些用具也不提及，当时古希腊的大多数数学家有一种偏见，认为自由人从事应用和近似计算是可耻的事，真是岂有此理！

第二个缺陷是作为理论出发点的基本概念（即定义）不少是表述不清的，而且在全书中亦未全用到这些定义，例如“点是没有部分的东西”是何意？定义 4 中“直线是……关于在其上的所有点位置是相等的”又是何意呢?！让人不知所云。

第三个缺陷是《几何原本》中没有关于位置的公理，所以说不严格什么是“在……内部”，“在……中间”，“在……外部”，涉及这些概念时，只能诉诸直观来表述与推理。

第四个缺陷是《几何原本》中没有连续性公理，于是像以线段 AB 为半径，以 A, B 为圆心的两个圆为什么一定有公共点就不能从理论上讲清楚了！

第五个缺陷是关于平行线的第五公设的正确性是不明显的，无不证自明性。

2.22 黄金矩形系列

设一矩形的长为 a，宽为 b，则当 a, b 满足

$$b^2 = a(a-b) \tag{2.13}$$

时，此矩形称为黄金矩形，这种矩形的长宽比例协调，使得它的形象显得十分得当，不胖不瘦，美观匀称，见图2-70。$OABC$ 是一个黄金矩形，从上面切去一个正方形 OA_1B_1C，剩下的矩形为 A_1ABB_1，其宽为 $AA_1 = a-b$，长为 b，由(2.13)得

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 - ab) - ab + b^2\\ &= b^2 - ab + b^2 = 2b^2 - ab = b(2b-a)\\ &= b[b-(a-b)]\end{aligned}$$

即 A_1ABB_1 仍为黄金矩形，可见：

黄金矩形上剪一刀剪掉一个正方形，得到的矩形仍为黄金矩形，如此逐次剪掉正方形，会得到面积单调减少的一个黄金矩形的无穷序列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \tag{2.14}$$

由(2.14)式得

$$b^2 + ab - a^2 = 0$$

$$b = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{5a^2})(\pm\text{号取}+\text{号})$$

$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)a \tag{2.15}$$

即第二代黄金矩形的长是上一代黄金矩形长的$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$倍，$0<\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)<1$。记$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=q$，则黄金矩形序列的长组成的序列为

$$a, qa, q^2a, \cdots, q^na, \cdots$$

矩形之长趋于零，从而矩形之宽趋于零，S_n 的面积趋于零，若在图2-70中切割黄金矩形时，按“丢左”——“丢上”——“丢右”——“丢

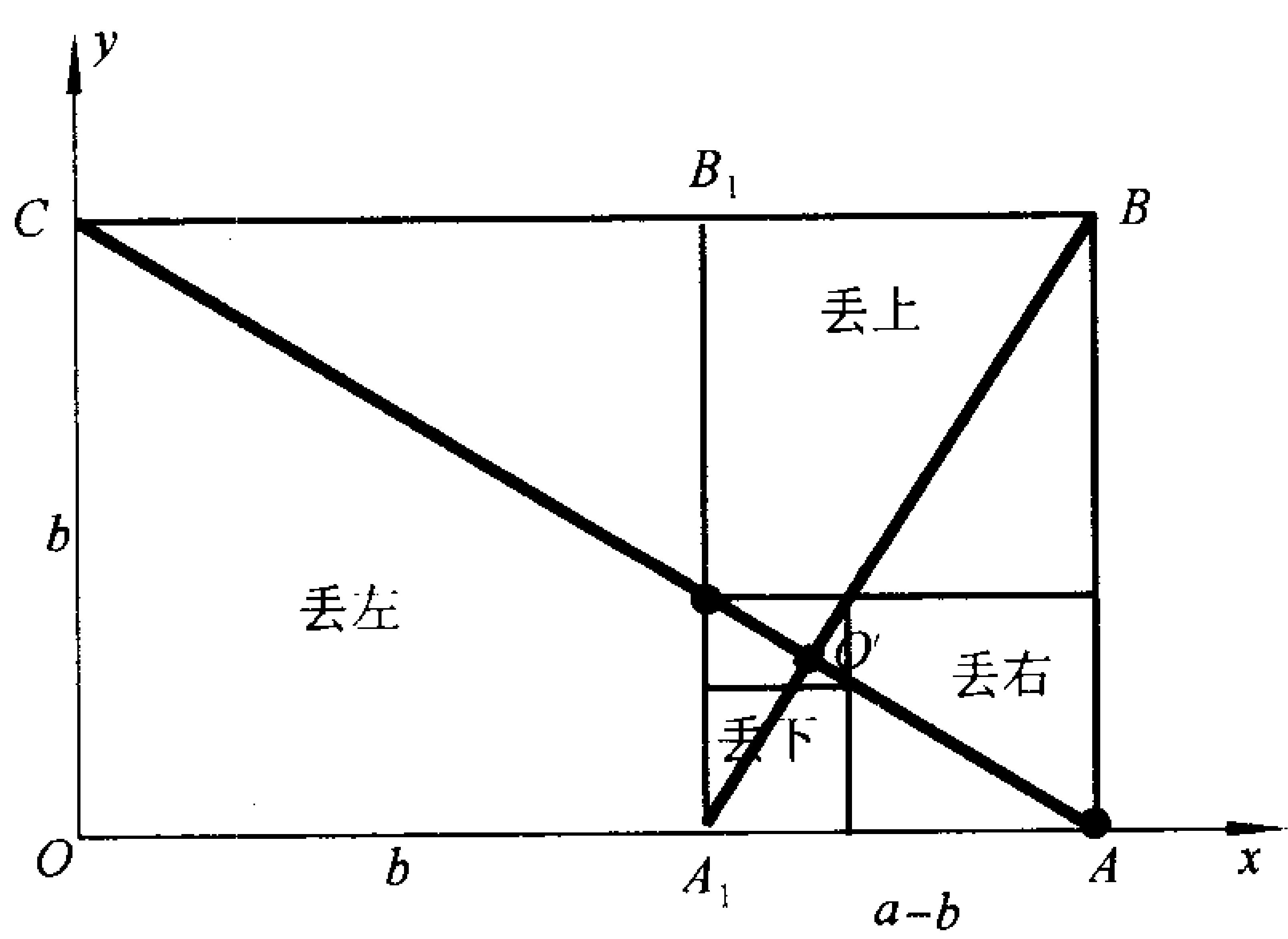


图 2-70

下”周期性地进行，最后趋于一点 O'。

下面确定 O' 点的坐标(x_0, y_0)

$$x_0 = aq + aq^5 + aq^9 + \cdots = \frac{aq}{1-q^4}$$

其中 aq 是第一次丢掉的正方形边长，aq^5 是第五次丢掉的正方形的边长，等等。

$$y_0 = aq^4 + aq^8 + \cdots = \frac{aq^4}{1-q^4}$$

其中 aq^4 是第四次丢掉的正方形边长。aq^8 是第八次丢掉的正方形边长，等等。

于是得知矩形序列(2.14)趋于点 $O'\left(\frac{aq}{1-q^4}, \frac{aq^4}{1-q^4}\right)$，

考虑直线 AC 与 A_1B，其方程分别为

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \tag{2.16}$$

$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{y-0}{b-0} \tag{2.17}$$

O' 点恰为直线(2.16)与(2.17)的交点。

在图 2-70 上看，点 O' 是按顺时针方向螺旋式地削去各代黄金矩形上的一端之正方形的极限点，有趣的是把这一极限过程反过来，则为从 O' 点按逆时针方向逐步培育出越来越大的黄金矩形，且随着这一逆时针过程的无限推进，黄金矩形会无限膨胀。我们似乎感悟到 O' 点似一种遗传物质繁衍着可爱的生物体。

2.23 捆绑立方体

有一玻璃制成的立方体，如果用橡皮筋来捆绑，若把橡皮筋套在一个顶点近旁，使此橡皮筋成一个三角形，见图 2-71，A 顶点近旁的三角形橡皮筋构成$\triangle EFG$，只要一松手，则$\triangle EFG$ 会向 A 方向滑过

去而脱落。而与此立方体底面垂直的平面截得的正方形 $MNPQ$ 若是一橡皮筋，将它弄成不与底面垂直，它仍然会凭它的“收缩成面积最小的特性”而恢复成一个与底面垂直的正方形，可见与底面垂直的正方形 $MNPQ$ 是稳定的捆绑。

上述这种垂直于底面的正方形橡皮筋共三族，每个面上有两族中的橡皮筋垂直地分布，立方体表面每个点上通过两条稳定(最牢靠)捆绑的橡皮筋。除此之外，是否还可能有牢靠捆绑的橡皮筋呢？有。

设立方体棱长为 1，考虑立方体表面上的六边形 $NOPKLM$，如图 2-72，这个六边形的六边分别在立方体的六个面上，设过两底上平行的对角线的平面与 NM，PK 分别交于 A，C 两点，连接 AC，连接 DE 与 GF 中点 O_1O_2，AC 与 O_1O_2 交于 B 点。设 $\angle CBO_2=\alpha$，若 $NOPKLM$ 是稳定的捆绑，则它的各边与所在的面上的一条对角线平行。于是

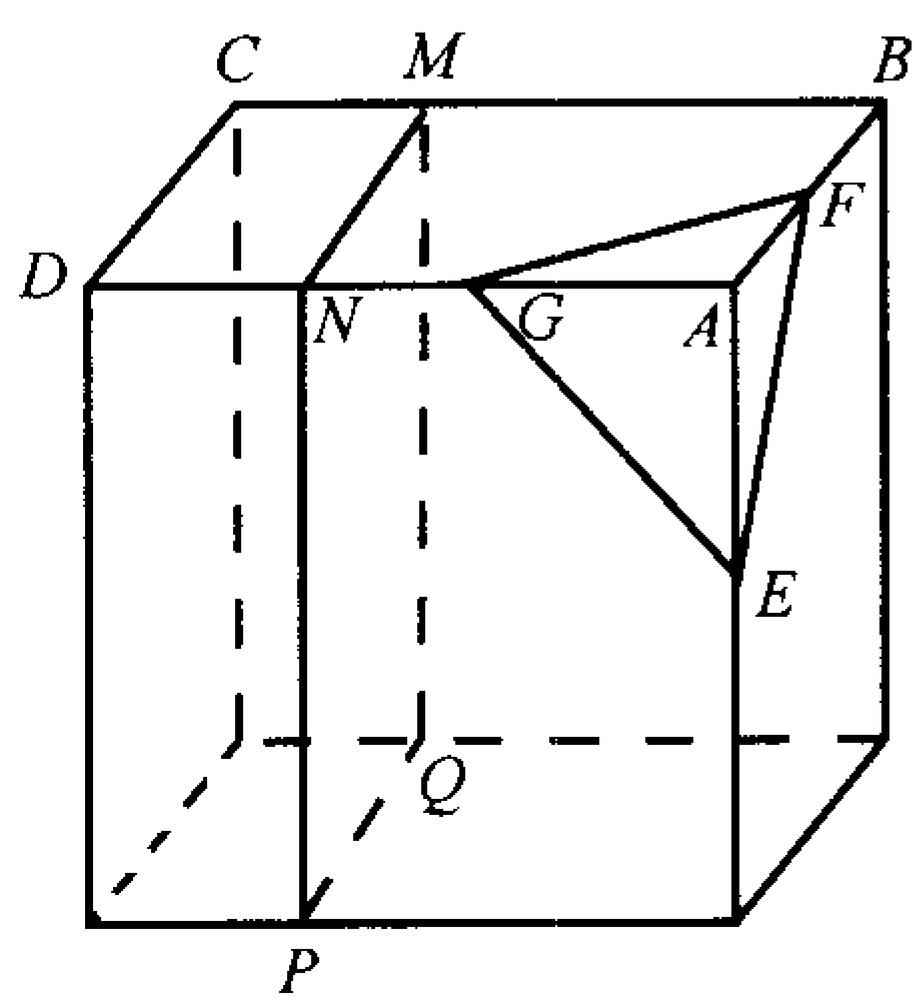


图 2-71

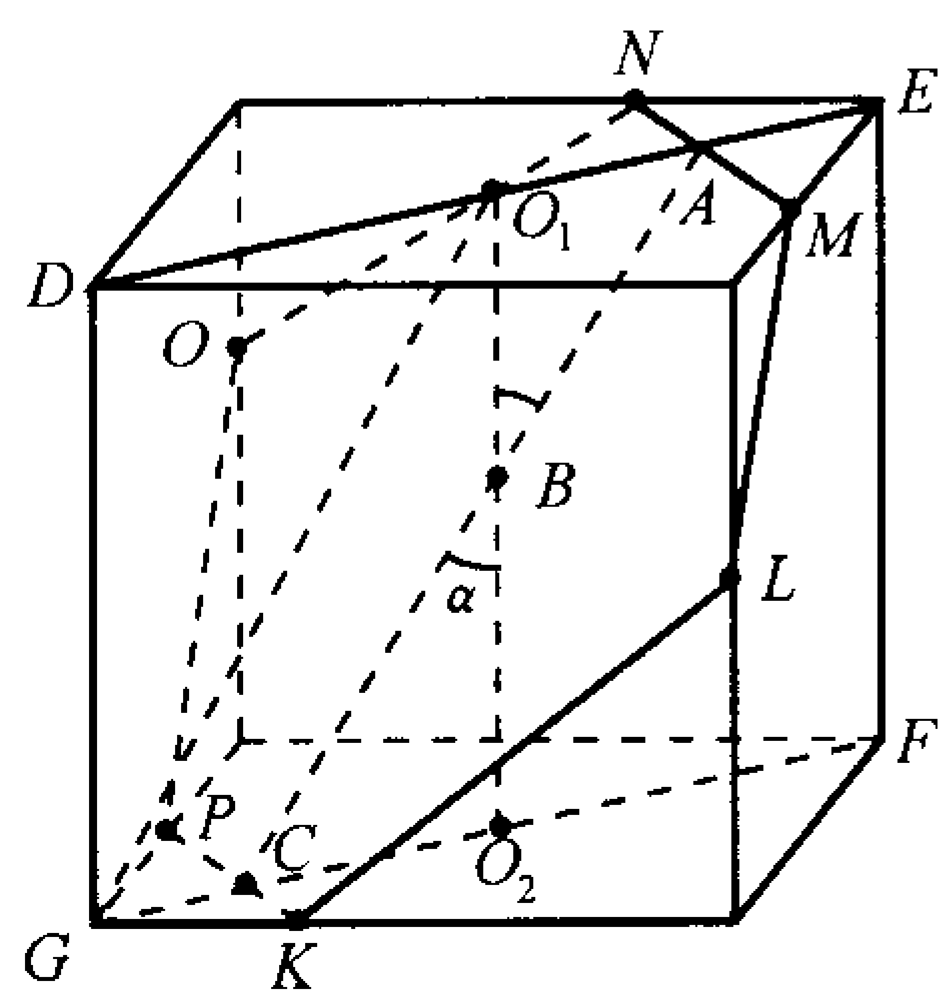


图 2-72

$$PK=\sqrt{2}-2BO_2\text{tg}\alpha$$

$$KL=BO_2\sqrt{1+2\text{tg}^2\alpha}=OP$$

$$MN=\sqrt{2}-2BO_1\text{tg}\alpha$$

$$LM=BO_1\sqrt{1+2\text{tg}^2\alpha}=ON$$

六边形 $NOPKLM$ 的周长为

$$F(\alpha)=2\sqrt{2}-2\mathrm{tg}\alpha+2\sqrt{1+2\mathrm{tg}^2\alpha}$$

当 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$F(\alpha)$最小，这时 α 恰为$\angle CBO_2$，可见有四族捆绑的六边形，每族六边形所在的平面互相平行，且与立方体的一个侧面的对角线平行，这四族捆绑线使得立方体侧面每一点上恰有两条直线段通过，与前面的三族捆绑线合起来，共有七族捆绑线，立方体侧面上每一点都有四条捆绑线通过，即立方体表面上编织了四层捆绑线。

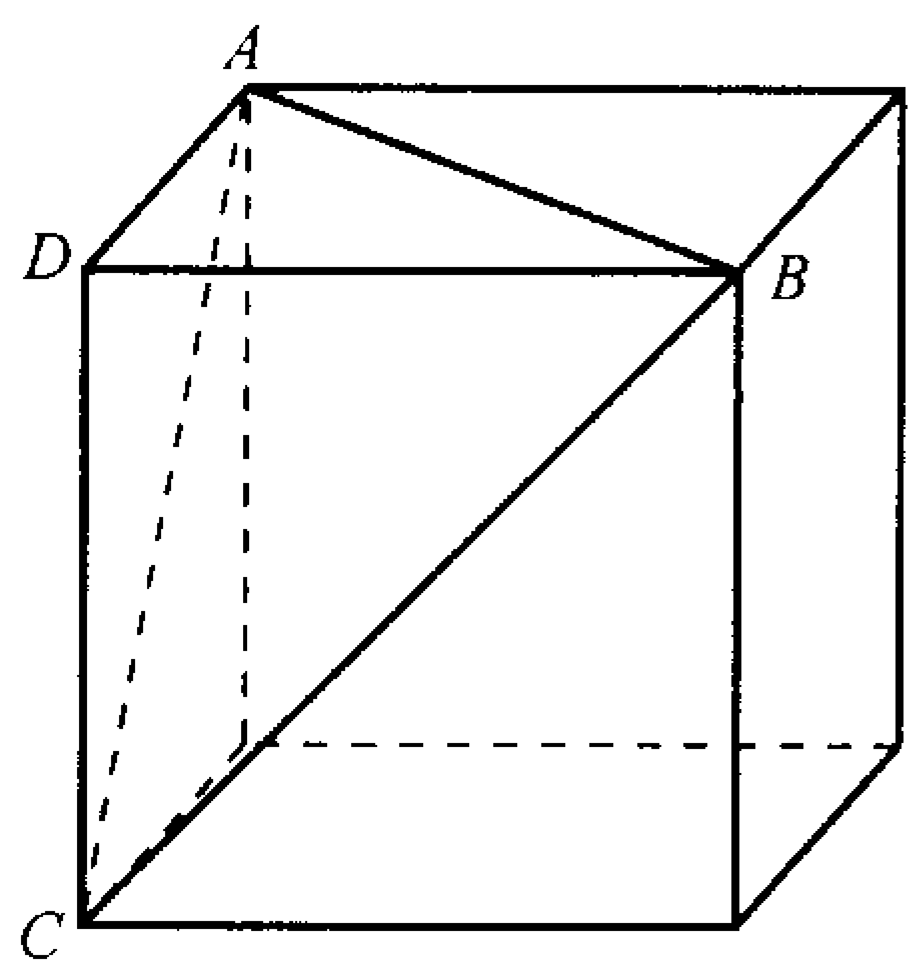


图 2-73

如果欲把棉纱绕在一个立方体上且不致使棉纱松脱，则应垂直于立方体的棱缠绕或如图 2-73 所示缠在以 D 为顶的三棱锥 $D-ABC$ 以外的表面上，每圈线与 $\triangle ABC$ 的平面平行；共七种方式；用垂直于棱的方式（三种）缠了两层之后改用平行 $\triangle ABC$ 等三角形的方式（四种）再缠两层，以后重复地（周期性）进行，缠绕成一个十分别致而结实的线团。

2.24 立方装箱与正方装箱问题

对于每个长方形箱子，问能否用有限个体积两两不等的立方块装满此箱子?

这个问题的回答是否定的，即不管用什么样的有限个两两体积相异的小立方体装填此箱，总会有空隙。

事实上，若能用这种有限个小立方体装满此箱，则箱底那一层小立方块中的最小者不会靠着箱子的侧面，见图 2-74，图2-75；若最小立方块 A 靠着箱子的侧面，则其外侧的 B 处必然要用比A 小的立方块来装填，这与 A 是底层中的最小立方块矛盾。于是第一层小立方

体中最小立方体 A 的上方形成一个凹洞，压在 A 的顶上的那些小立方体中的最小者必不与凹洞侧边接触。于是出现在凹洞的中间部位必有一个比 A 更小的立方体 B，在 B 的上方形成凹洞，依此递推，会出现一串无穷个越来越小的立方体装在箱内，与装入的立方体有限矛盾。至此知用有限个相异的小立方体来装长方箱子是装不满的，不管这只箱子的长、宽、高是多少。

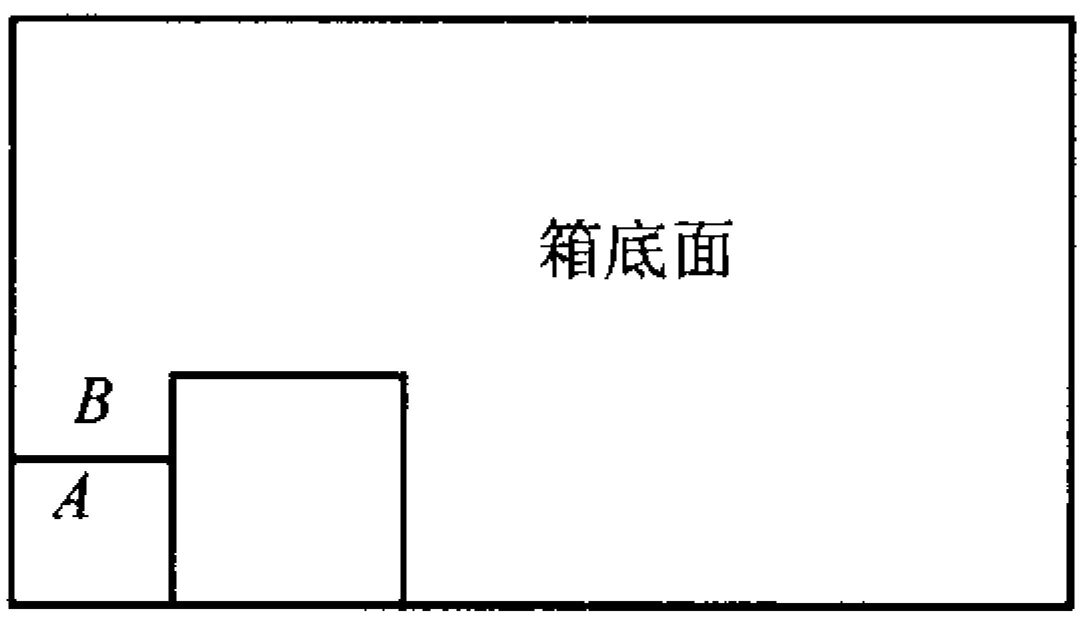


图 2-74

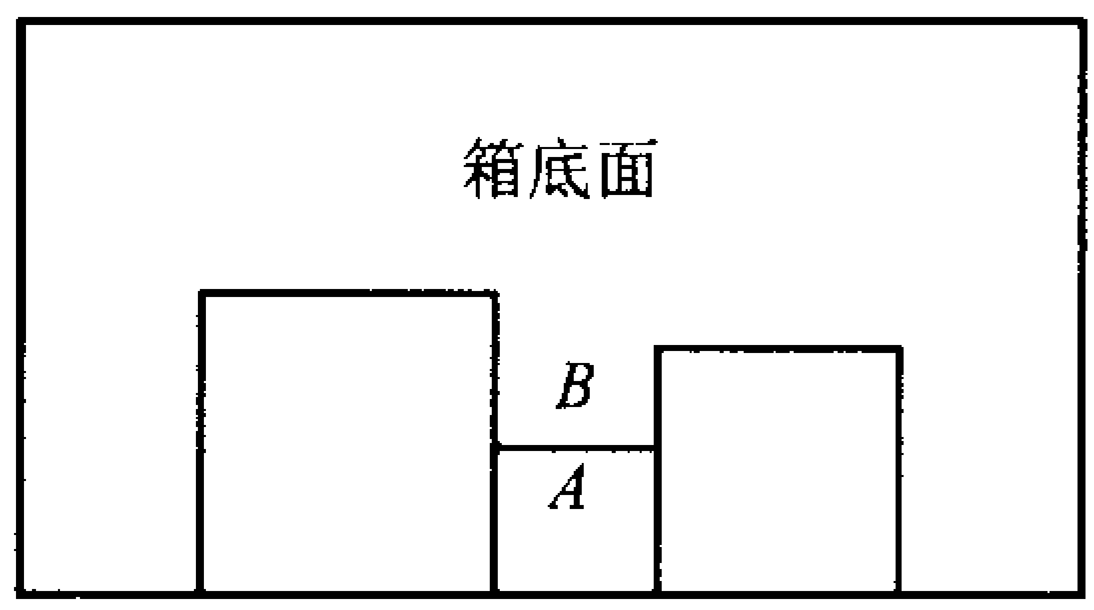


图 2-75

但对于二维情形，答案可以是肯定的。相应的，问题变成：把给定矩形划分成若干两两不相等的正方形。

1936 年，剑桥大学的布鲁克斯(Brooks)、史密斯(Smith)、斯通(Stone)和塔特(Tutte)给出下面两种实例，把 33×32 的矩形和 177×176 的矩形划成若干两两不等的正方形，见图 2-76，图 2-77，正方形内写的是其边长。

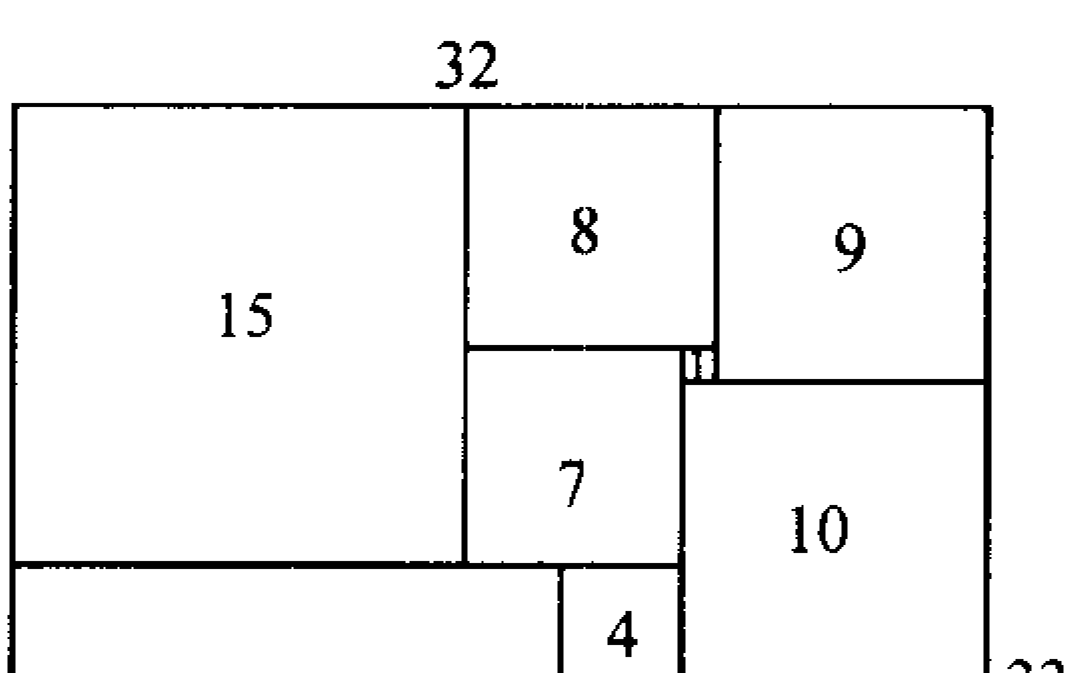


图 2-76

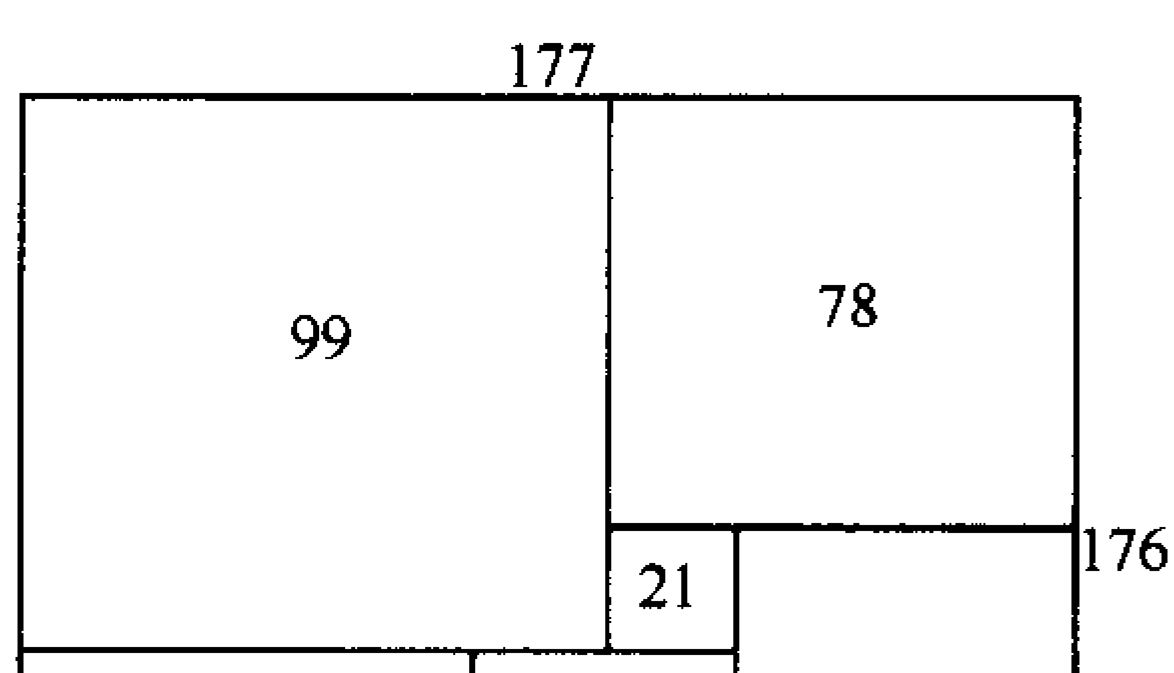


图 2-77

如果欲划分一个正方形成若干不等的小正方形，问题更困难一些。英国数学家威尔科克斯(Willcocks)发现了把 175×175 的正方形划分成 24 个相异的小正方形的结果，见图 2-78。

1964 年，滑铁卢大学的威尔逊(Wilson)博士(塔特的学生)用计算机找到了把 503×503 的正方形划分成 25 个两两互异的小正方形的结果，见图 2-79。

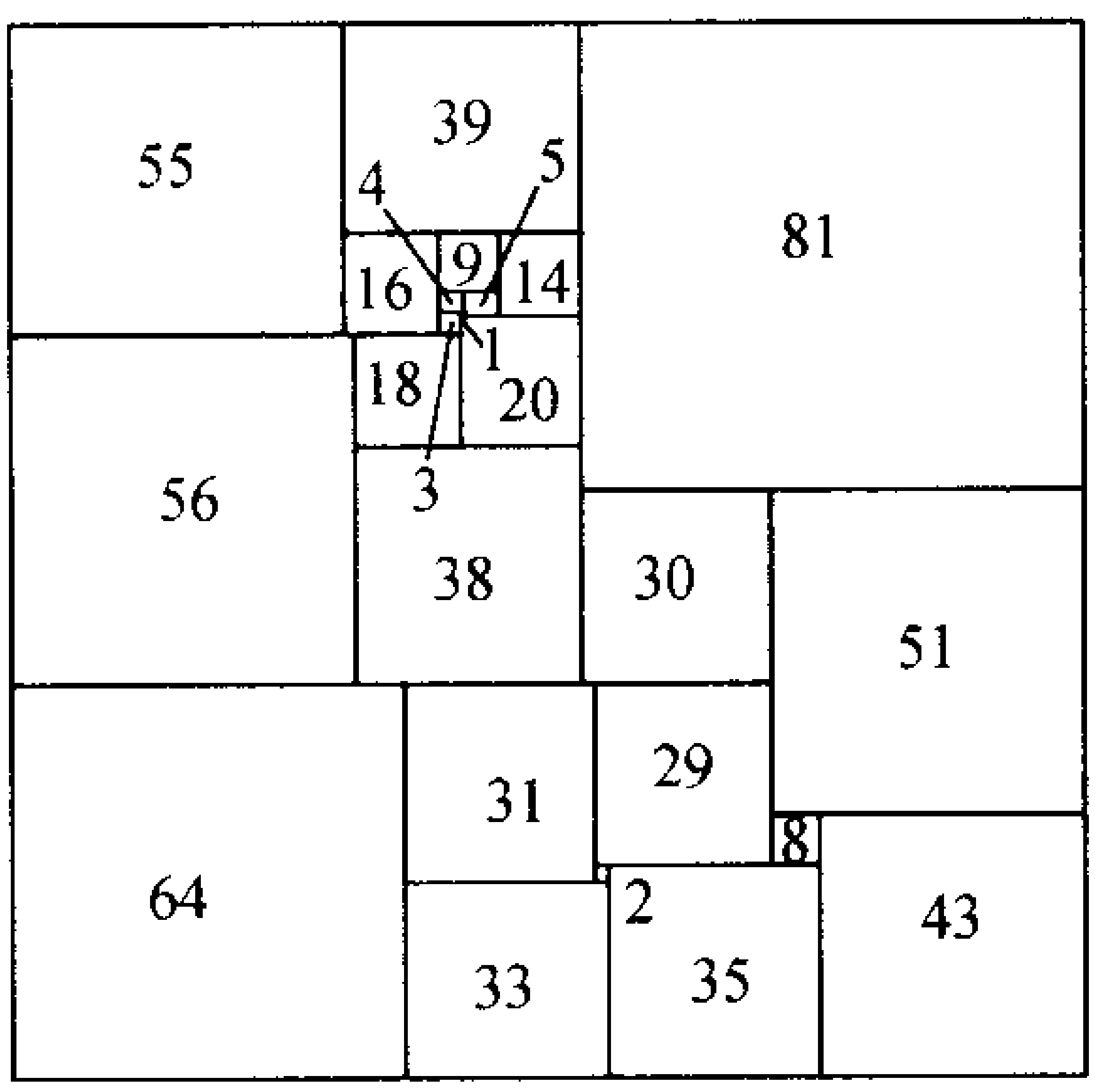


图 2-78

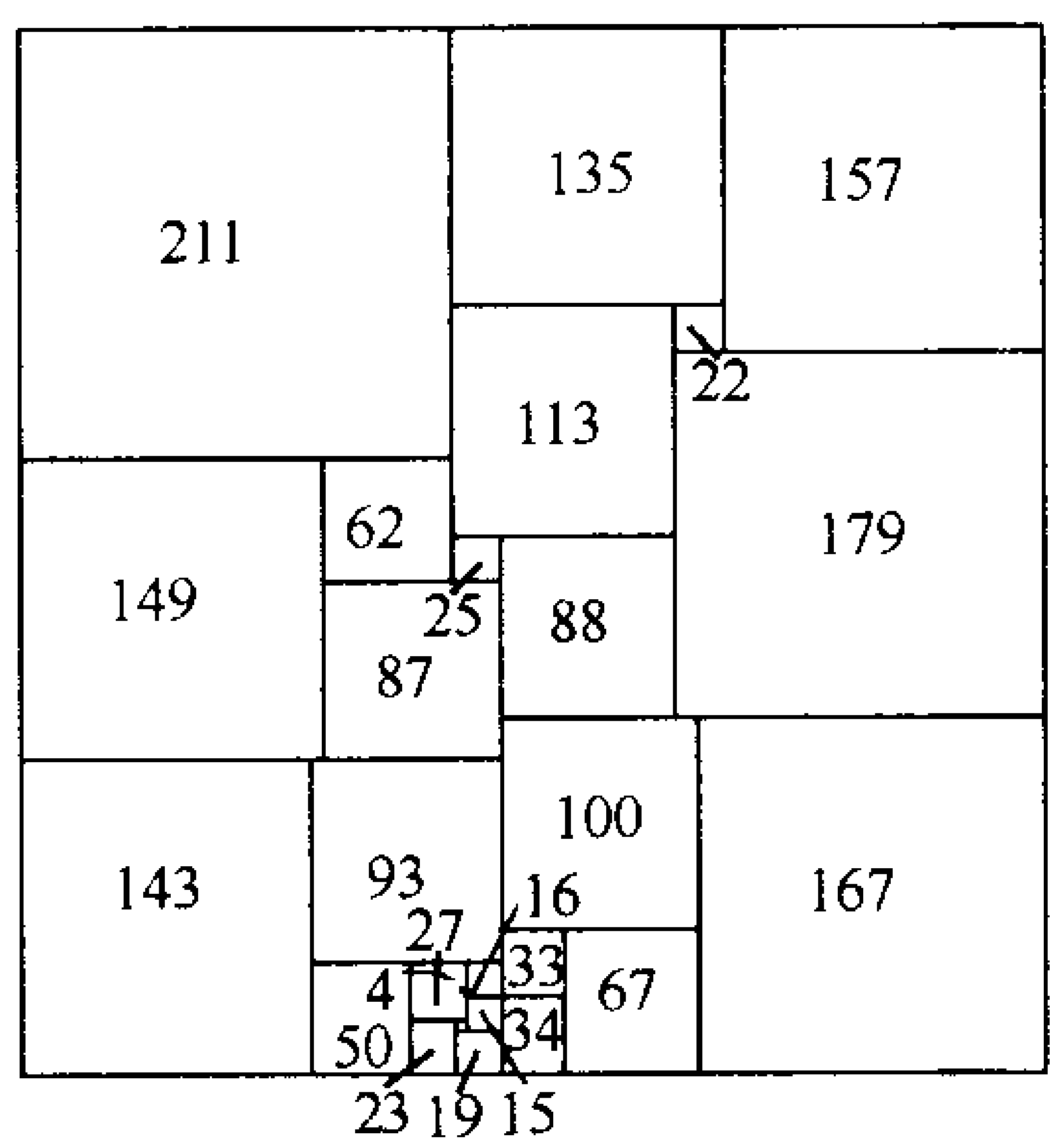


图 2-79

用计算机已经证实不可能把任何正方形划分成少于 20 个不同的小正方形，且这些小正方形中无排列组合成矩形的现象。

但对任意给定的正方形或矩形，把它划分成个数最少的不同的正方形，仍然是数学上有待进一步研究的课题。

2.25 巧测砖块对角线

工人师傅欲知砖头的对角线之长，根据勾股定理，可以测出砖的长、宽、高：x，y，z，再计算 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。这种办法往往受到工人师傅的讥笑，因为它需要测量三次，而且还要计算乘方与开方，工地上如果没有计算器呢?! 这个办法真的太笨。其实有两个

不用计算,只需用尺子一量便知的妙法。

①把一块砖平放,把另两块砖靠紧竖放在这块砖上面,使它们垒成五个竖直侧面如图 2-80,把顶部画了阴影的那块砖拿走,用刻度尺测量垫底的那块砖的顶点 A 与尚压在其上的那块砖的顶点 B 之间的距离即得砖的对角线之长度。

②把砖竖放于地面,在一木尺上,从端点起记两个记号(点),使得此两个点划分的线段与砖的顶部矩形对角线等长;如图 2-81。把木尺的边缘通过砖顶对角线,且尺的端点落在砖的顶点,用另一尺子测量 AB 的距离即得砖的对角线之长。

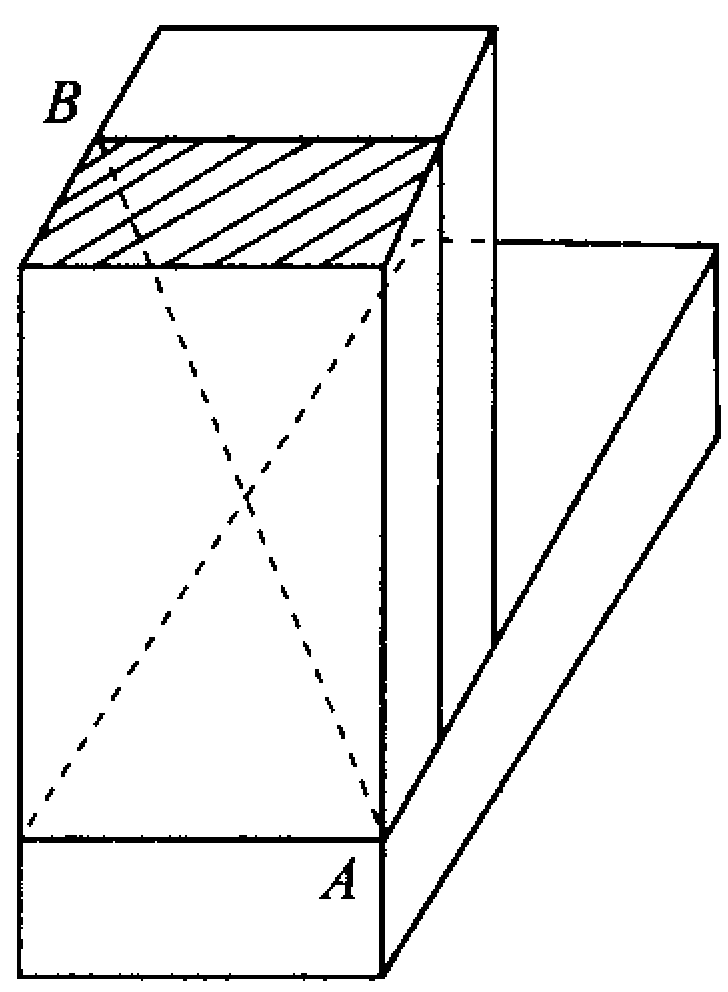


图 2-80

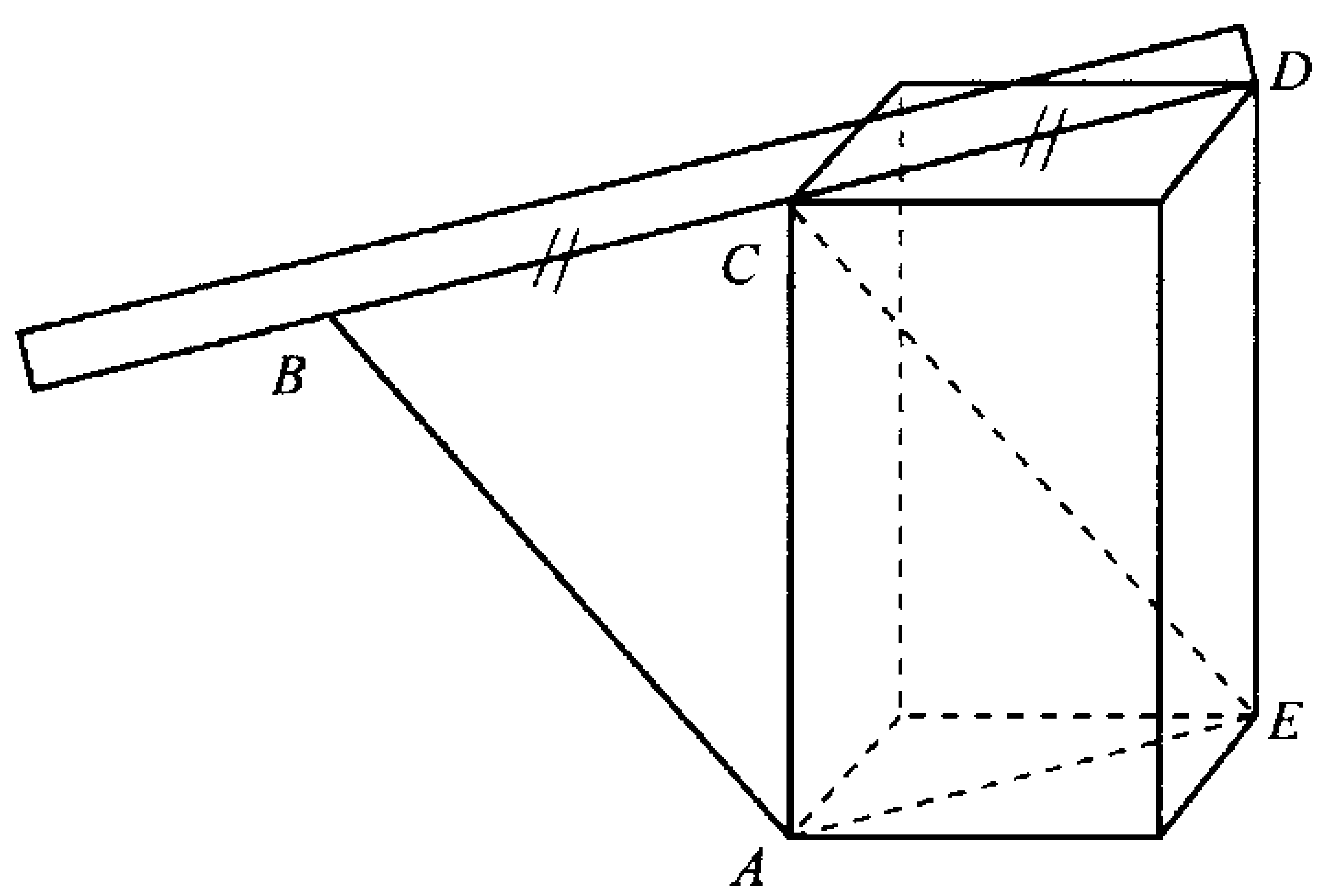


图 2-81

事实上,由于 $ACDE$ 是矩形,所以 $AE \underline{\parallel} CD$。又 $CD = CB$,则 $CB \underline{\parallel} AE$,$ABCE$ 是平行四边形,所以 $AB = EC$,EC 是砖的对角线。

2.26 糕点售货员的打包技术

顾客买了一盒点心,要求售货员把长方体点心盒用尼龙绳捆紧,以便提携。售货员至少有两种捆绑方式。

①正交十字法,如图 2-82。O_1,O_2 是长方体上下底对角线的交点,十字架形尼龙绳在 O_1 与 O_2,两点打了死结,两个短形绳套相互

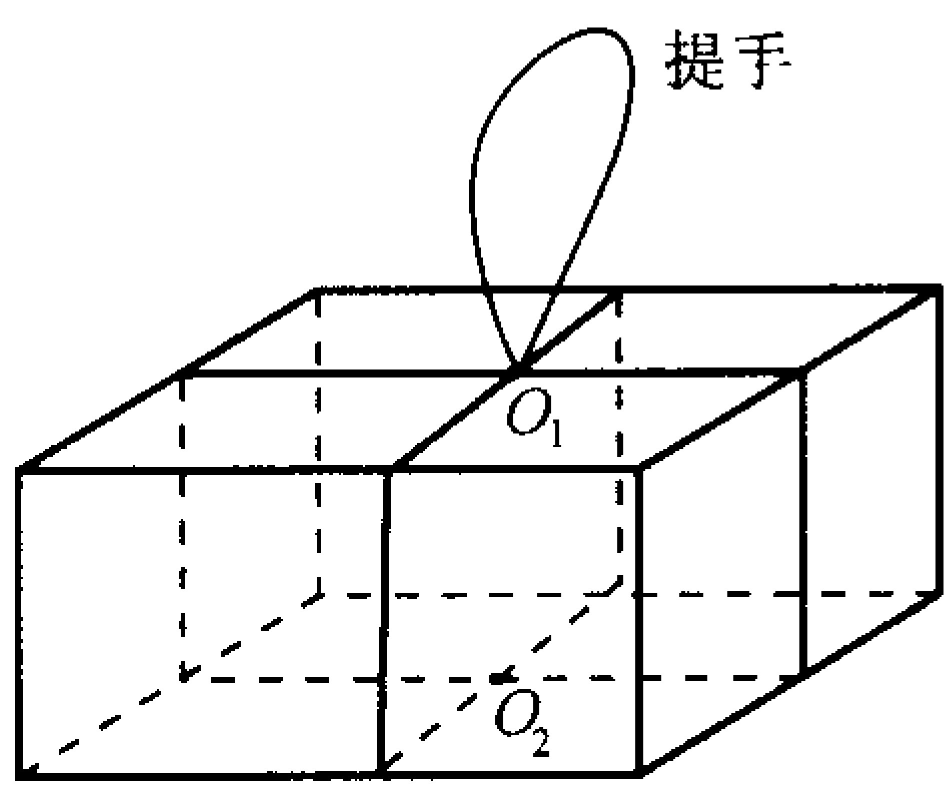


图 2-82

垂直地捆紧点心盒之后，O_1，O_2 点以及两矩形都已固定，它们的任何移动都会使捆绑的绳子变长，而尼龙绳是不易拉长的，所以这种包扎十分牢固。

② 上下压角法，如图 2-83。$ABCDEFGH$ 是捆扎的尼龙绳形成的空间八边形，EF 与 AB 两线段向下压角，CD 与 GH 向上压角，欲使捆扎最紧，必须使上述空间八边形之周长最短，下面从展开图上来讨论，见图 2-84。在展开图上，$ABCDEFGHA$ 应在一条直线上才能使所用尼龙绳最少，这条直线段“$A\cdots A$”的极限位置是 $A'\cdots A''$，且 $A\cdots A /\!/ A'\cdots A''$。设 x, y, z 是盒子的长、宽、高，$z<x$，$z<y$，则△$A'MA''$是直角三角形，$A''M=2(x+z)$，$A'M=2(y+z)$，于是捆扎的总长为

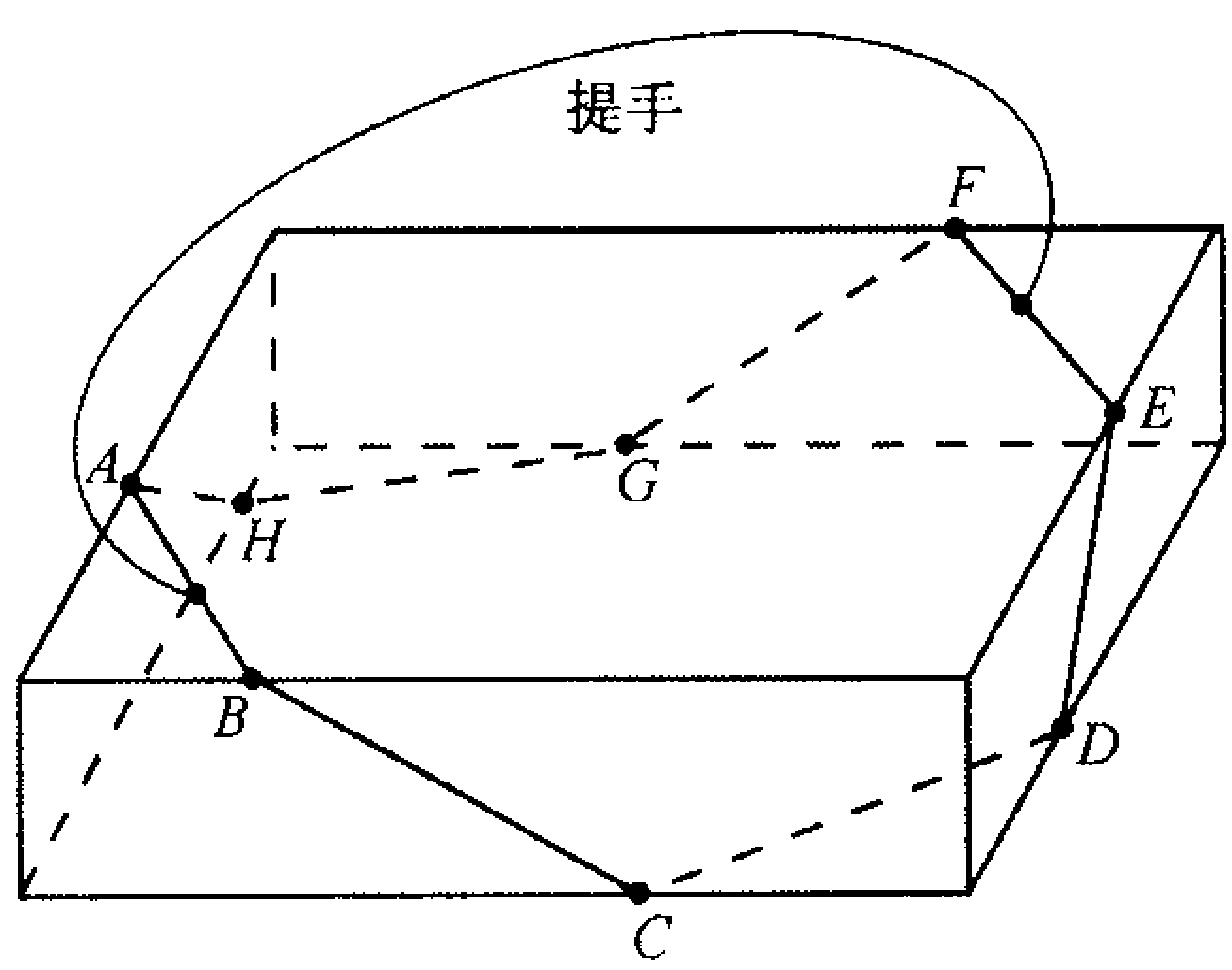


图 2-83

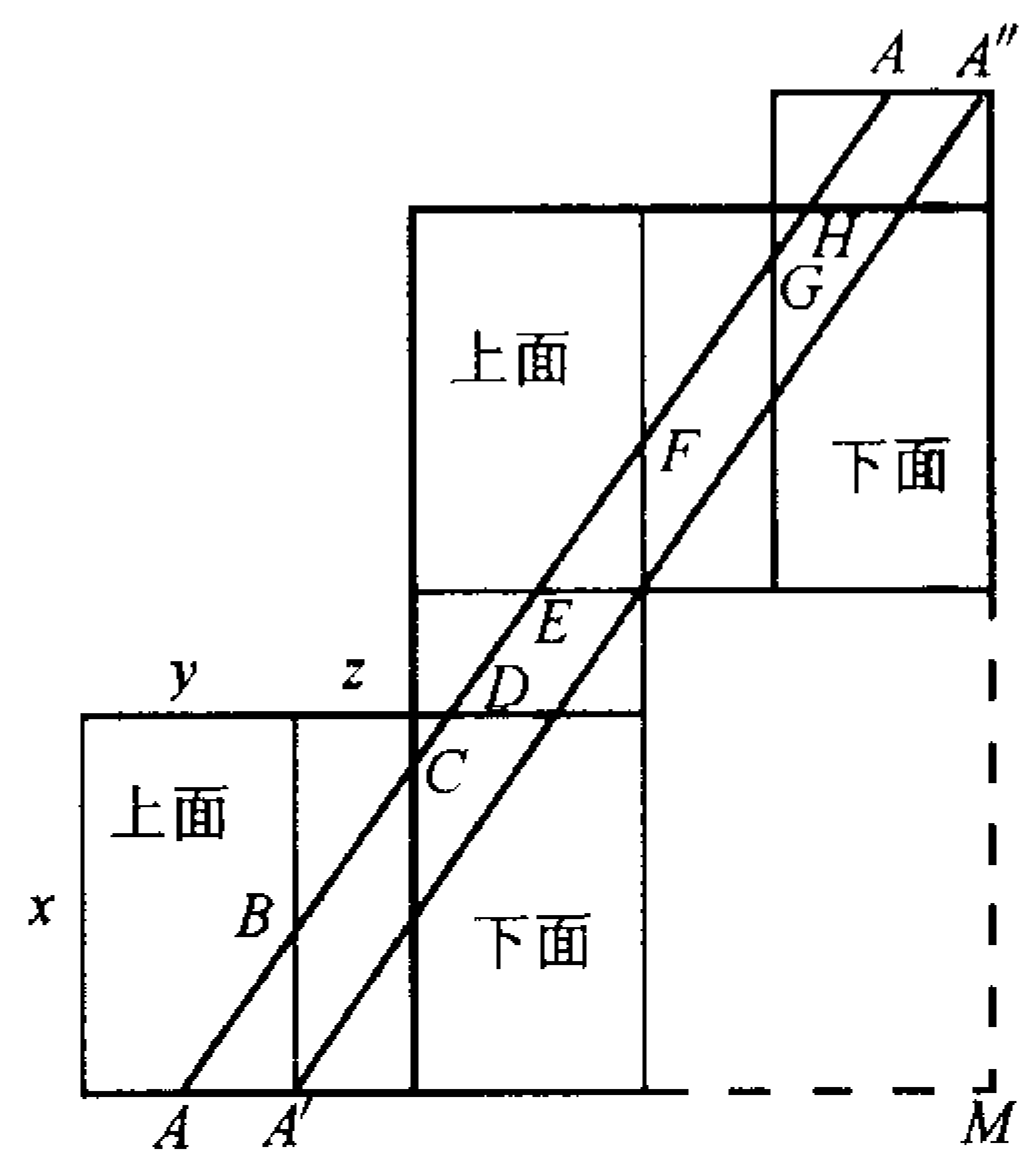


图 2-84

$$L=2\sqrt{(x+z)^2+(y+z)^2}$$

L 是最短(最紧)的捆扎用绳。$A\cdots A$ 捆扎线与盒子棱的夹角之正切为 $\frac{x+z}{y+z}$ 和 $\frac{y+z}{x+z}$。

这种最优捆扎方式,其捆绳不但可以沿着自己的走向窜动,而且可以在盒表面平行移动。当然平行移动时应该压住上下底面的角,平行移动时,绳子总长不会变化。

在正交十字捆扎中,用绳 $2x+2y+4z$,而 $2x+2y+4z>2\sqrt{(x+z)^2+(y+z)^2}$,即上下压角法不仅式样新颖,而且用绳较少,两种方式都是牢靠的。

2.27 三角形的内角和究竟多少度

1809年,俄国数学家尼古拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基(Н.И.Лобачевский,1792～1856)在他的名著《几何学》中证明了一系列重要定理,在证明这些定理时,他没有用到欧几里得几何的第五公设(又名平行线公理)。而这些思想,他早在1826年就在喀山大学数学物理系报告过,罗氏的一个惊天动地的公理是:

内角和小于 π 的三角形存在!

命题1 三角形的内角和不超过两个直角。

事实上,若△ABC 的内角和等于 $\pi+\alpha$, $\alpha>0$,下面用反证法找矛盾。设 BC 是最短边,D 是 BC 中点,作射线 AD,在△ABC 外取射线 AD 上线段 $DE=AD$,连接 EC,见图2-85。△ABD≌△CDE,于是∠ABD=∠DCE,∠BAD=∠DEC,故△ACE 之内角和亦为 $\pi+\alpha$,且∠BAC=∠EAC+∠AEC,由抽屉原理,∠EAC 与∠AEC 中,至少一个不大于△ABC 中最小角∠BAC 之半,另一个也小于∠BAC。如此继续取△AEC 最短边中点,作一个与△AEC 性质一致的三角形,它的内角和为 $\pi+\alpha$,有两个角都小于△AEC 的最小角,且其中至少一个角小于△AEC 最小角之半。可见,在这种造新三角形的过程中,会出现一个三角形,内角和为 $\pi+\alpha$,其中一内角不大于

π，另两个内角都小于$\frac{1}{2}\alpha$，于是其内角和小于 $\pi+\alpha$，矛盾。

命题 2 若存在一个内角和为 π 的三角形，则一切三角形内角和皆为 π。

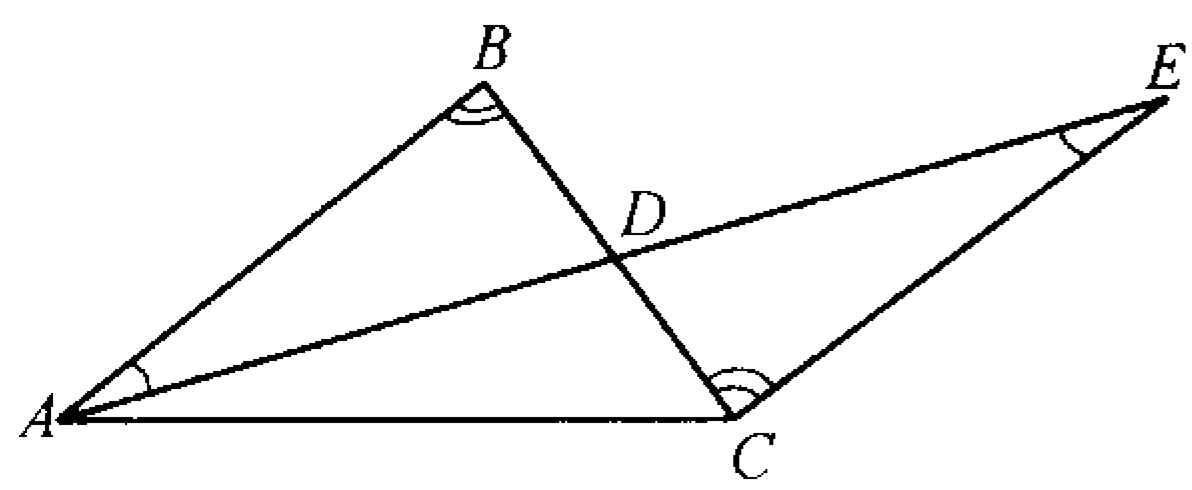


图 2-85

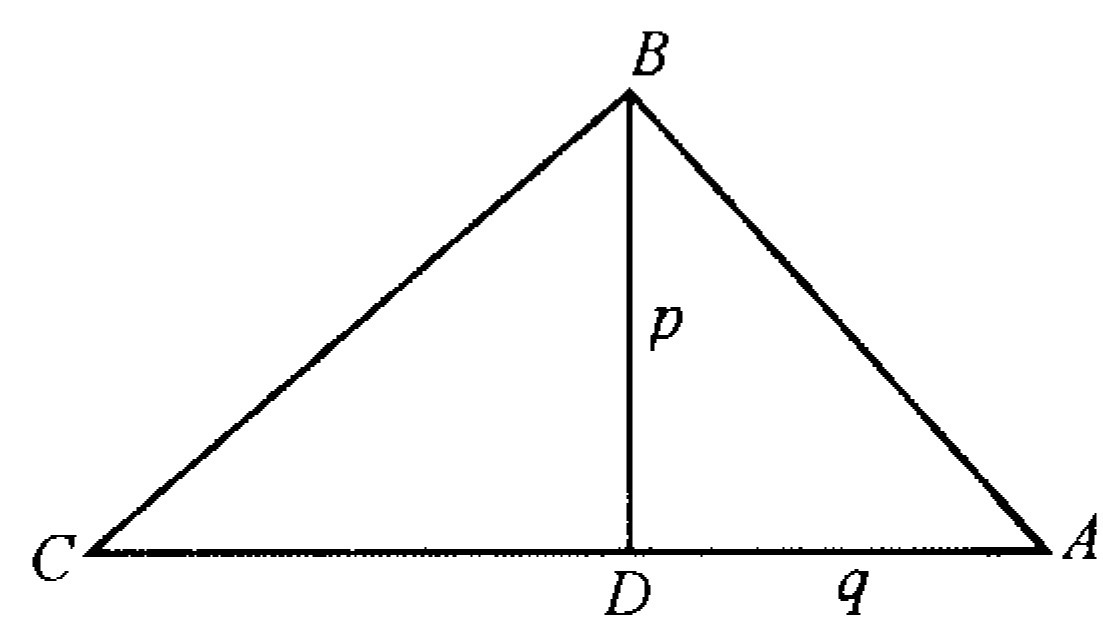


图 2-86

假设$\triangle ABC$ 的内角和为 π，则$\triangle ABC$ 中至少有两个锐角，设$\angle A$ 与$\angle C$ 是锐角，从 B 点向 AC 作高 BD，在直角$\triangle ABD$ 与$\triangle BCD$ 中，内角和皆为 π，不然，由于这两个三角形的内角总和为 2π，则会出现一个三角形的内角和大于 π 的现象，与命题 1 相违，至此得到一个内角和为 π 的直角三角形$\triangle BAD$，见图2-86，$BD=p$，$DA=q$。以 AB 为公共边，画出两个全等三角形$\triangle BAD$ 和$\triangle BAD'$，见图 2-87，$\angle 1+\angle 2=90°$，即四边形 $BDAD'$中，对边相等，对角皆直角。用四边形 $BDAD'$为基本原料，铺成 n 层 m 列的大四边形 $BMNQ$，如图 2-88，连接 MQ，则$\triangle BMQ\cong\triangle MQN$。于是$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，又$\angle 3+\angle 5=\angle 4+\angle 6=90°$，故$\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$，由命题 1，$\angle 4+\angle 5\leqslant 90°$，$\angle 3+\angle 6\leqslant 90°$，两式中的不等号皆不能成立，于是$\triangle BMQ$ 的内角和为 180°，即当一个三角形内角和为 180°时，可以找到一个直角边的长分别为 np 与 mq 的直角三角形，其内角和为 180°，其中 m，n 是任意正整数。

下面再证明，若存在一个三角形，内角和为 180°，则每个直角三角形，其内角和皆 180°。

事实上，对于任取的一个直角三角形$\triangle A'B'C'$，当 m，n 足够大时，可以把$\triangle A'B'C'$与 $\triangle BMQ$ 的直角重合如图 2-89，使 A'落在BQ

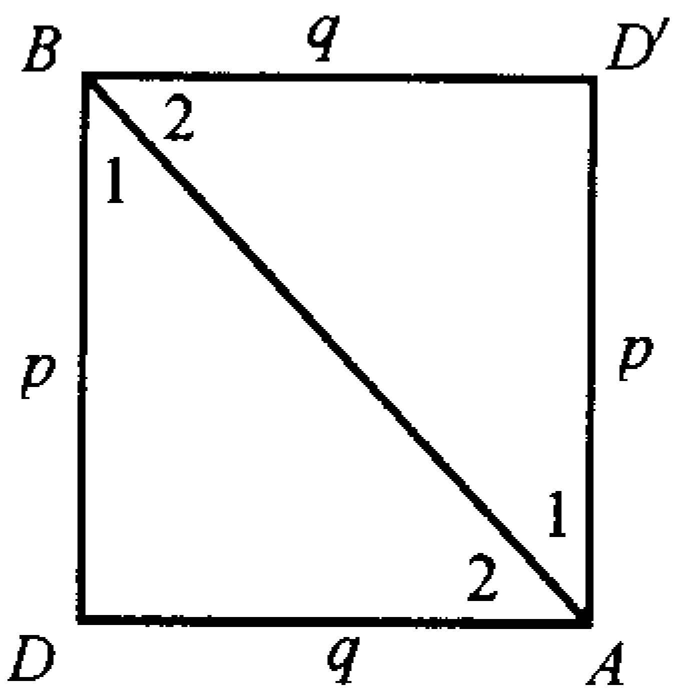


图 2-87

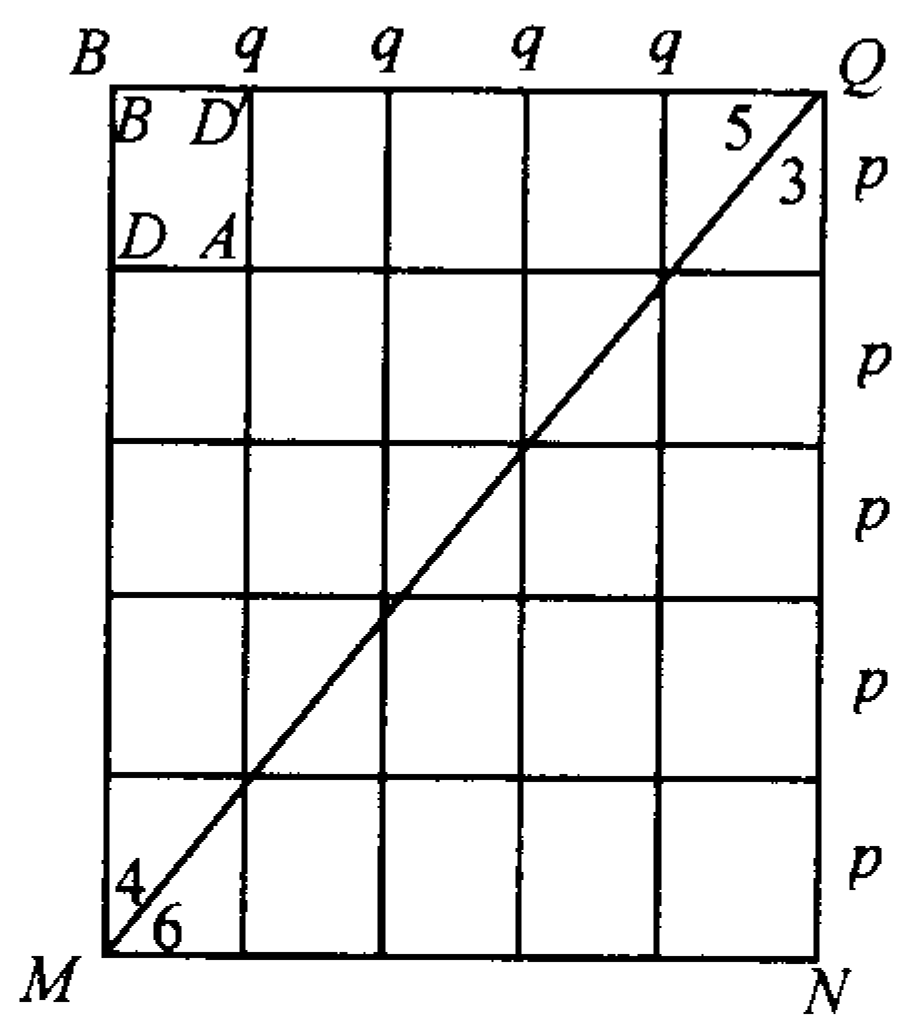


图 2-88

内，C'落在 BM 内，连接 $A'M$，直角三角形$\triangle A'MB$ 内角和为 $180°$。事实上，由于$\angle BQM+\angle A'MQ+\angle A'MB=90°$，$\angle BA'M+\angle MA'Q=180°$，若$\angle BA'M+\angle A'MB<90°$，则

$$\angle BQM+\angle A'MQ+\angle MA'Q>180°$$

即$\triangle A'QM$ 的内角和大于 $180°$，由命题 1，这是不可能的，所以$\angle BA'M+\angle A'MB\geqslant 90°$，进而$\triangle A'MB$ 的内角和$\geqslant 180°$，由命题 1，只能是等号成立，即直角三角形$\triangle A'MB$ 的内角和为 $180°$；同理，$\triangle A'B'C'$的内角和也是 $180°$。

考虑任一三角形$\triangle A''B''C''$，设$\angle C''$是最大的内角，做高$C''D''$，见图2-90，由上述论述，当$\triangle ABC$的内角和为$180°$时，$\triangle A''C''D''$与

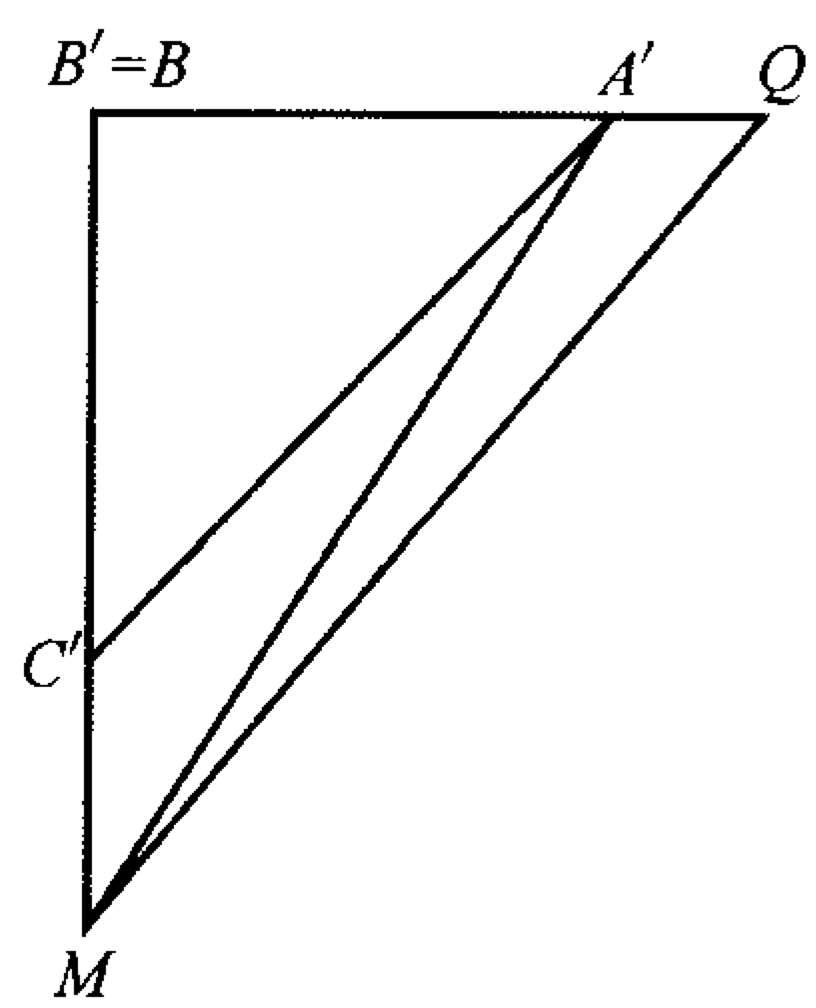


图 2-89

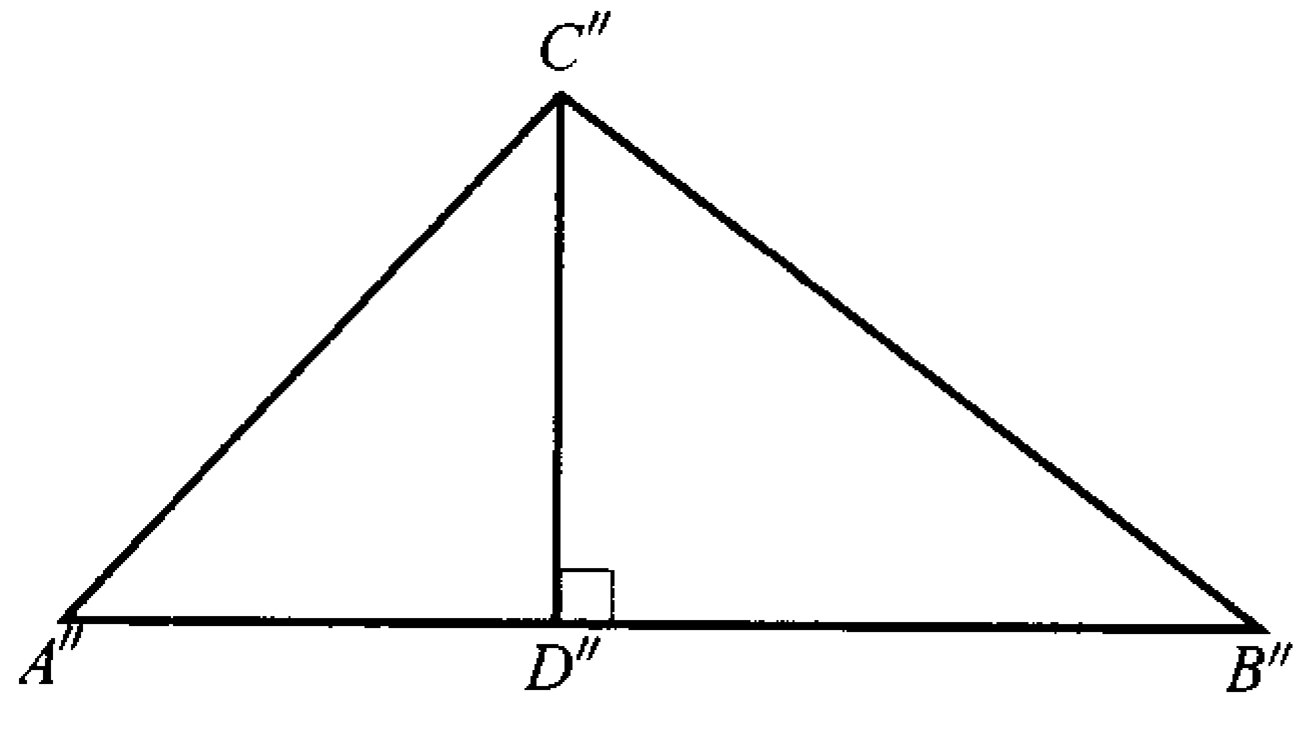


图 2-90

$\triangle B''C''D''$的内角和皆 180°，即$\angle C''A''D''+\angle A''C''D''+\angle C''D''A''+\angle C''D''B''+\angle D''C''B''+\angle C''B''D''=360°$，而$\angle A''D''C''+\angle C''D''B''=180°$，所以$\triangle A''B''C''$的内角和是 180°。

从命题 1,2 知下面两个结论成立：

命题 3 只有两种假定是可能的：或者所有的三角形内角和皆为 π，或者所有的三角形内角和都小于 π。

命题 4 如果所有的三角形内角和都相等，则它们的内角和都是 π。

事实上，若所有三角形的内角和为 φ，在任意取定的三角形 $\triangle ABC$ 中，D 是 AC 边上一点，连接 BD，如图 2-91，则

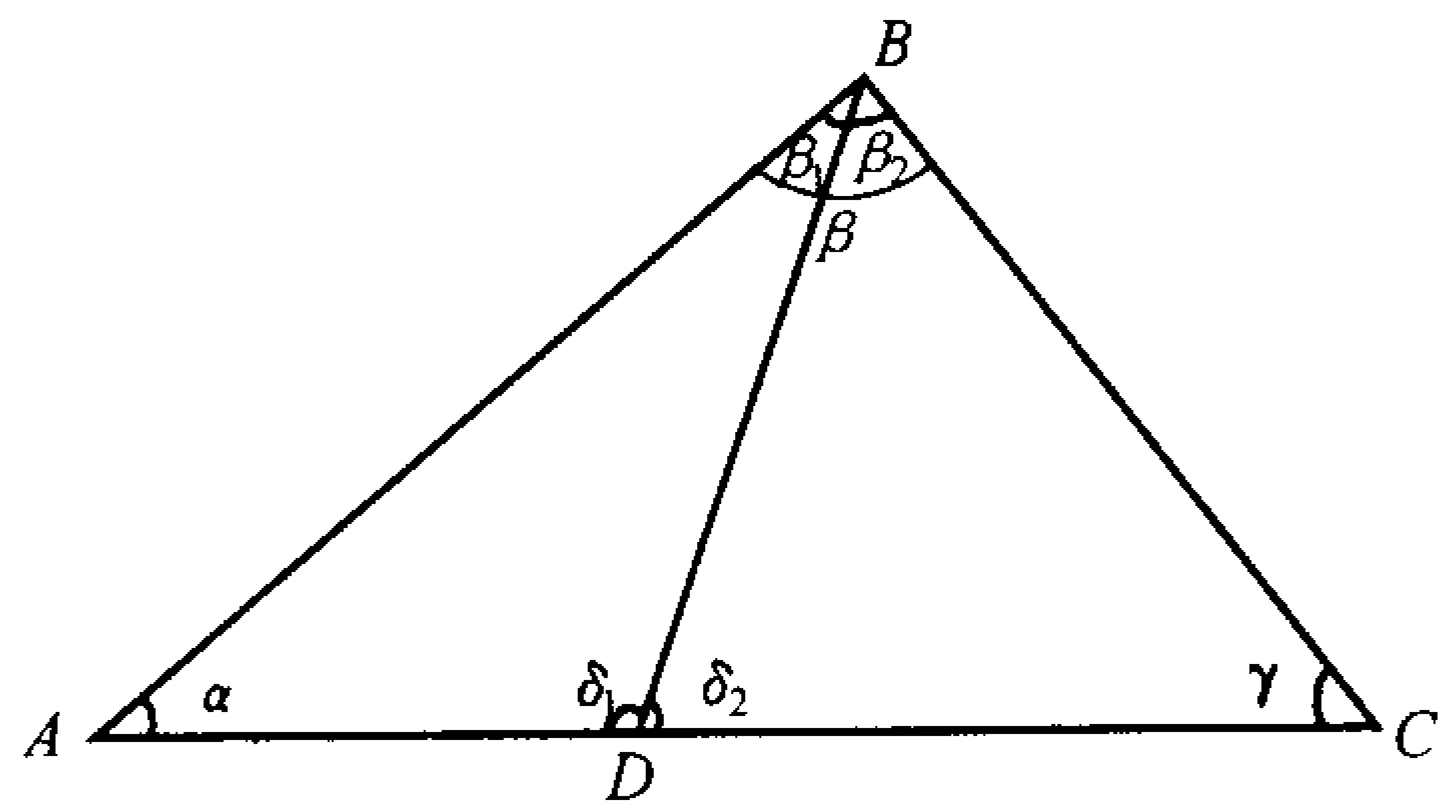


图 2-91

$$\varphi=\alpha+\beta+\gamma$$
$$\varphi=\alpha+\beta_1+\delta_1$$
$$\varphi=\gamma+\delta_2+\beta_2$$
$$\begin{aligned}2\varphi&=\alpha+(\beta_1+\beta_2)+\gamma+(\delta_1+\delta_2)\\&=\alpha+\beta+\gamma+\pi\end{aligned}$$

从而 $\varphi=\pi$。

命题 5 若所有的三角形内角和小于 π，那么在所有三角形中，其内角和不统一。

命题 6 若 A 是直线 a 外一点，过 A 存在唯一的一条与 a 平行的直线的充分必要条件是任何三角形内角和为 π。

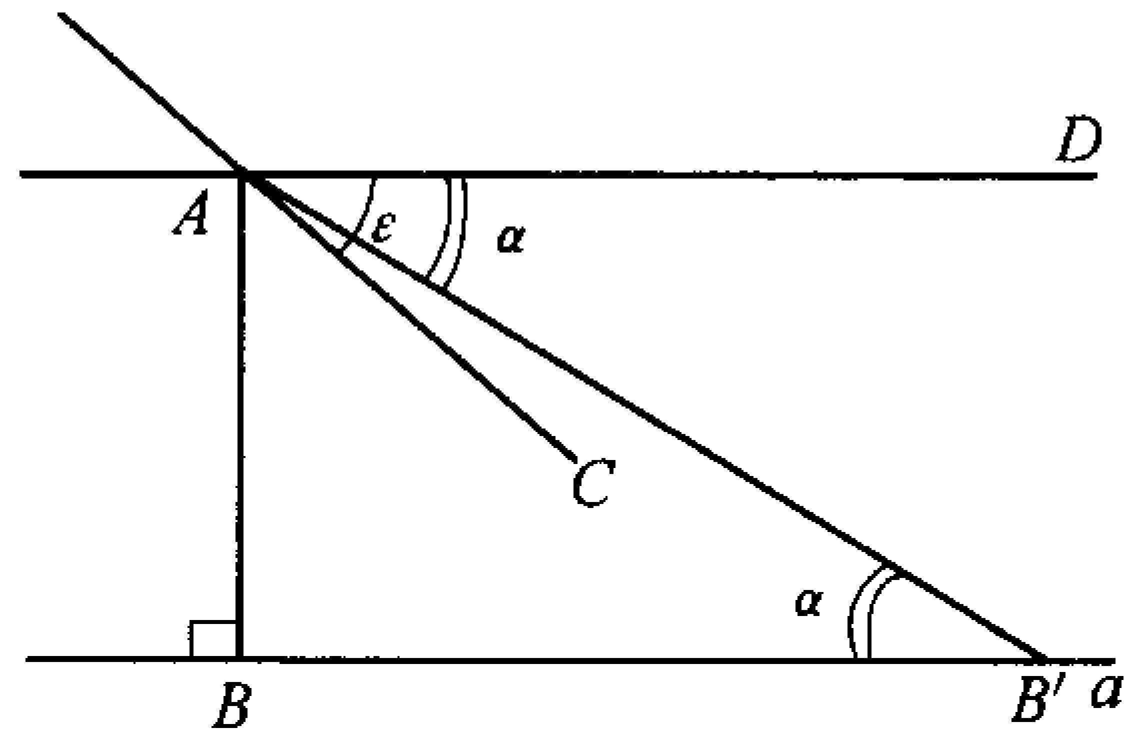


图 2-92

事实上，在中学平面几何当中，按欧几里得的五条公设已证明出上述的必要性。下证充分性，即若任三角形内角和为 π，则过 A 只有一条与 a 平行的直线。作 $AB \perp a$，$AD \perp AB$，见图2-92。则 $AD /\!/ a$。若直线 $AC /\!/ a$，设 $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$，在直线 a 上取一点 B' 使得 $\angle AB'B = \alpha < \varepsilon$，且使 B' 与 $\angle BAC$ 在 AB 的同一侧。由已知，$\triangle ABB'$ 的内角和为 π，于是

$$\angle BAB' = \frac{\pi}{2} - \alpha > \angle CAB = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

即直线 AC 过 $\triangle ABB'$ 内部，与 BB' 交于一点，即 AC 与 a 相交，与 $AC /\!/ a$ 矛盾。

命题 7　三角形内角和小于 π 的充分必要条件是过直线 a 外一点 A 可以引至少两条与 a 平行的直线。

通过上述分析，我们看到，一旦存在一个三角形，它的内角和小于 π，则过直线外一点可引不止一条直线与原来那条直线平行，这当然与我们已经笃信无疑的一般平面几何理论相对立。难道可以允许谈三角形内角和小于 π 吗？允许。

2.28 罗巴切夫斯基的想像几何学

1840 年，罗巴切夫斯基在他的名著《平行线理论的几何研究》中说："三角形内角和小于 π 是允许的，由于由它推导出的结果当中不存在矛盾，它可以作为一种新几何的理论基础，我把这个新几何学称为'想像几何学'。"罗巴切夫斯基的这种观点和言论，对于两千多年来人们坚信欧几里得《几何原本》的几何学原则是现实空间的唯一正

确的描述,这种似乎是天经地义的理论是一种背叛、挑战和革命;大数学家高斯、鲍耶等也与罗巴切夫斯基几乎同时发现了有悖于欧几里得第五公设的新几何,只是由于高斯胆小怕事、明哲保身而不能如罗巴切夫斯基那样公开打出反旗。这种新几何学的诞生源于众多数学家对欧几里得第五公设证明的失败。

欧氏第五公设的文字表述和内容都显得复杂和不易接受,不像其他的公理(公设)那样自明而易于理解。自古以来就有不少学者怀疑第五公设是否是多余的,它能否由其他公设、公理逻辑地推导出来?人们付出了大量的精力去证明它,在欧氏抛出第五公设后的两千年间,很难举出有哪一位大数学家没有试证过第五公设。为什么这么多大数学家谁也证明不了第五公设呢?罗巴切夫斯基领悟到,第五公设本来就是独立于其他公理公设之外的一条公理,是只能接受而无需也不可能证明的真理;另外,既然我们可以承认这条并无自明性的命题为公理,为什么它的反面,即第五公设不成立的时候,不可以建立一种新几何呢?于是罗氏大胆地从几何中删去第五公设,用“存在内角和小于 π 的三角形”来替代它,建立了他称之为想像几何学的罗巴切夫斯基几何。罗氏之所以称自己的新几何学是想像的几何学,是因为在这种几何当中,推导出种种与人们的世俗观念和直观感觉相反的定理,在 19 世纪和 20 世纪初,人们还认为那些结果是不能采用只是可以自圆其说的一种逻辑结构而已,但现代物理学的研究表明,罗氏的想像几何学中的“想像”在物理现实中确有其事,都是真的。通过非欧几何的建立过程中的是非演变,使得现代科学工作者变得聪明了,大家的共识是,对于科学当中的不同的言论应持慎重的态度,用已知的知识系统去禁止新观点新技术的探索是一种反科学的态度。

为了讨论罗巴切夫斯基几何的基本事实,我们首先讨论欧几里得第五公设的充分必要条件。

命题 1 第五公设成立的充要条件是过直线外一点存在唯一的与该直线平行的直线。

事实上，设直线 b 是过直线 a 外一点 A 的与 a 平行的唯一直线，在 a 直线上取一点 B，则直线 AB 与直线 a，b 构成的内错角相等，这时若直线 c 与 AB 构成 β 角，且 $\alpha+\beta<\pi$ 时，如图2-93所示，则 c 与 a 不是同一条直线，由于过 A 点与 a 平行的直线只有 b 直线，所以 c 与 a 不平行，相交于 AB 右侧，即第五公设成立；必要性亦易证明。

命题 2 第五公设成立的充分必要条件是三角形内角和为 π。

由命题 1 及 2.27 节的命题 6，命题 2 的成立是显然的。

命题 3 第五公设成立的充分必要条件是同一直线的垂线与斜线相交。

命题 4 第五公设成立的充分必要条件是存在两个相似而不全等的三角形。

命题 4 的必要性平面几何中已有证明。

下面证明命题 4 中的充分性，即假如有两个不全等的相似三角形，则第五公设成立。设 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等，设 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$AB>A'B'$；在 $\triangle ABC$ 的两边 AB 与 AC 上分别取 $AD=A'B'$，$AE=A'C'$，如图 2-94。

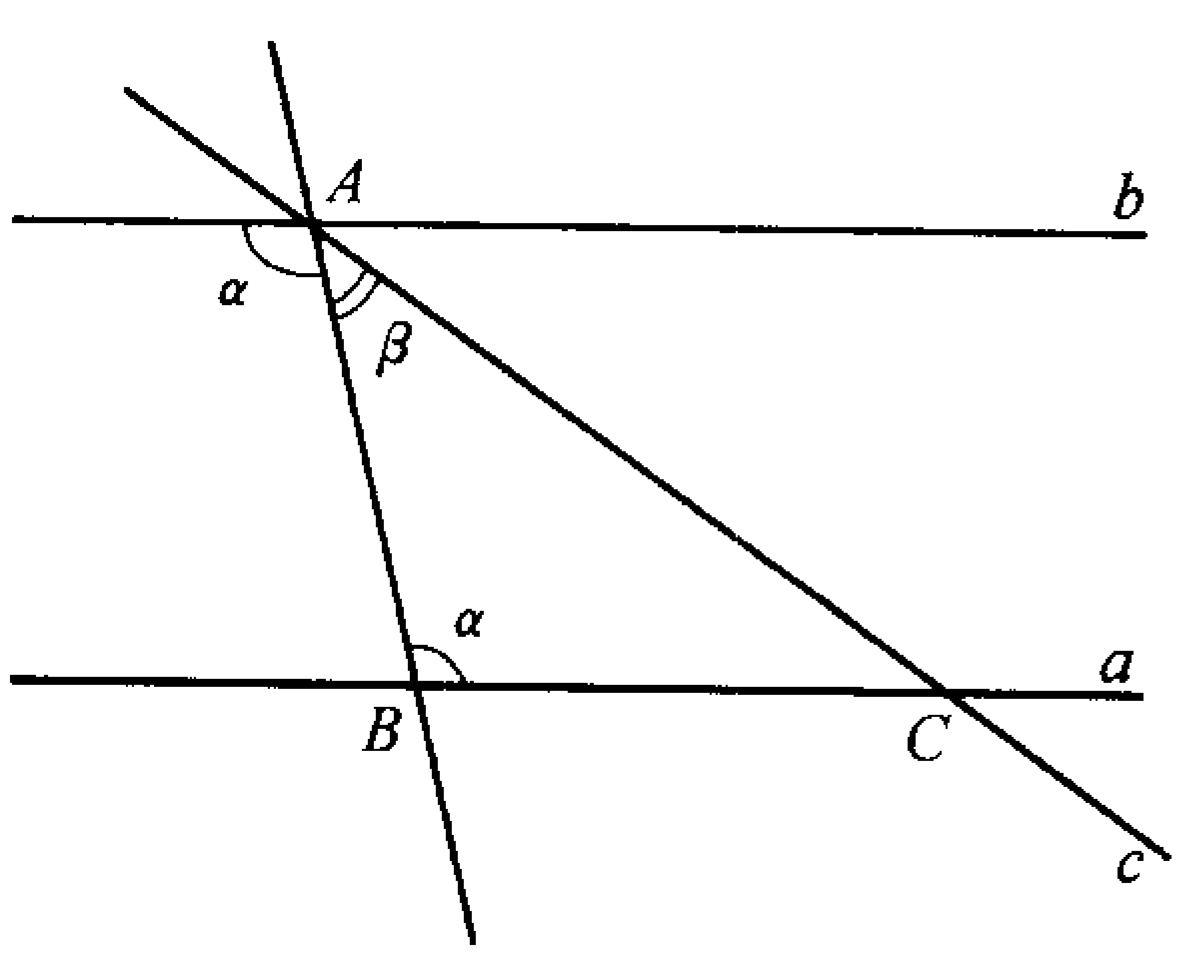


图 2-93

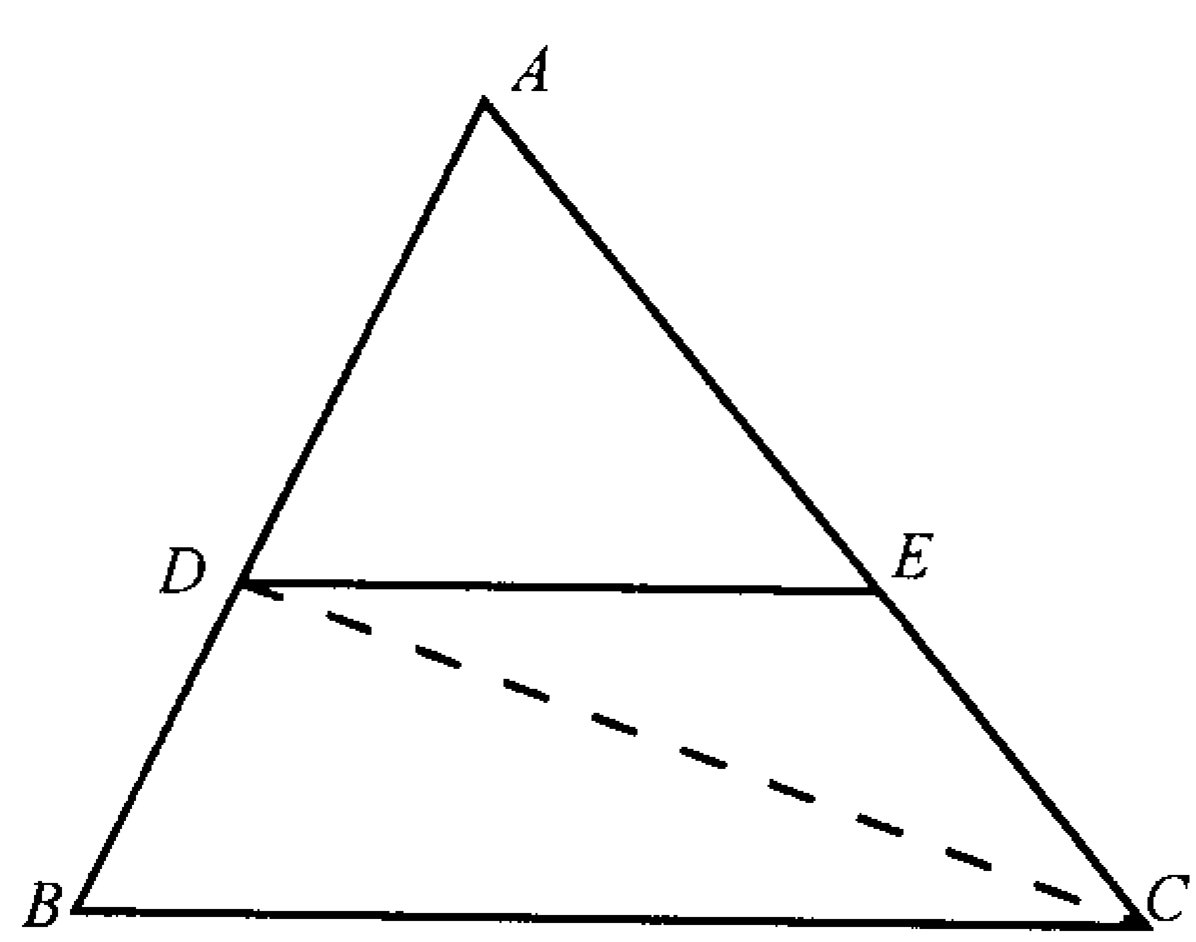


图 2-94

由于 $AD=A'B'<AB$，所以 D 点落在 A 与 B 之间。E 点不与 C 点重合，不然与$\angle C=\angle C'$相违，同理 E 点也不能落在 AC 的外边，E 点落在 A 与 C 之间。这时四边形 $BCED$ 的内角和为 2π，故$\triangle BDC$ 与$\triangle DCE$ 的内角和皆为 π，这是因为三角形内角和不能大于 π。而三角形内角和为 π 的充要条件是第五公设成立。

命题 5 第五公设成立的充要条件是任一三角形存在外接圆。

必要性已在中学几何课中证明。下证充分性，即任一三角形有外接圆，则第五公设成立。由命题 3，只欠证明，任一三角形有外接圆，则直线 AB 的垂线与斜线相交，设过 B 的直线$BC\perp AB$，而 AD 是AB 的斜线，如图 2-95。M 是线段AB 上任一点，设 L，N 分别是M 点关于AD 与BC 的对称点，$ML\perp AD$，而 ML 对于直线MA 是倾斜的，所以直线 ML 与MA 是不同的两条直线，于是 L，M，N 不在同一直线上，又直线 AD 是与$\triangle LMN$ 的顶点M 与L 等距的点之轨迹，所以这个三角形的外接圆圆心在 AD 上，又直线 BC 是与$\triangle LMN$ 的顶点M 与N 等距的点之轨迹，所以$\triangle LMN$ 的外接圆圆心在BC 上，可见 BC 与AD 相交，即直线 AB 的垂线与斜线相交。

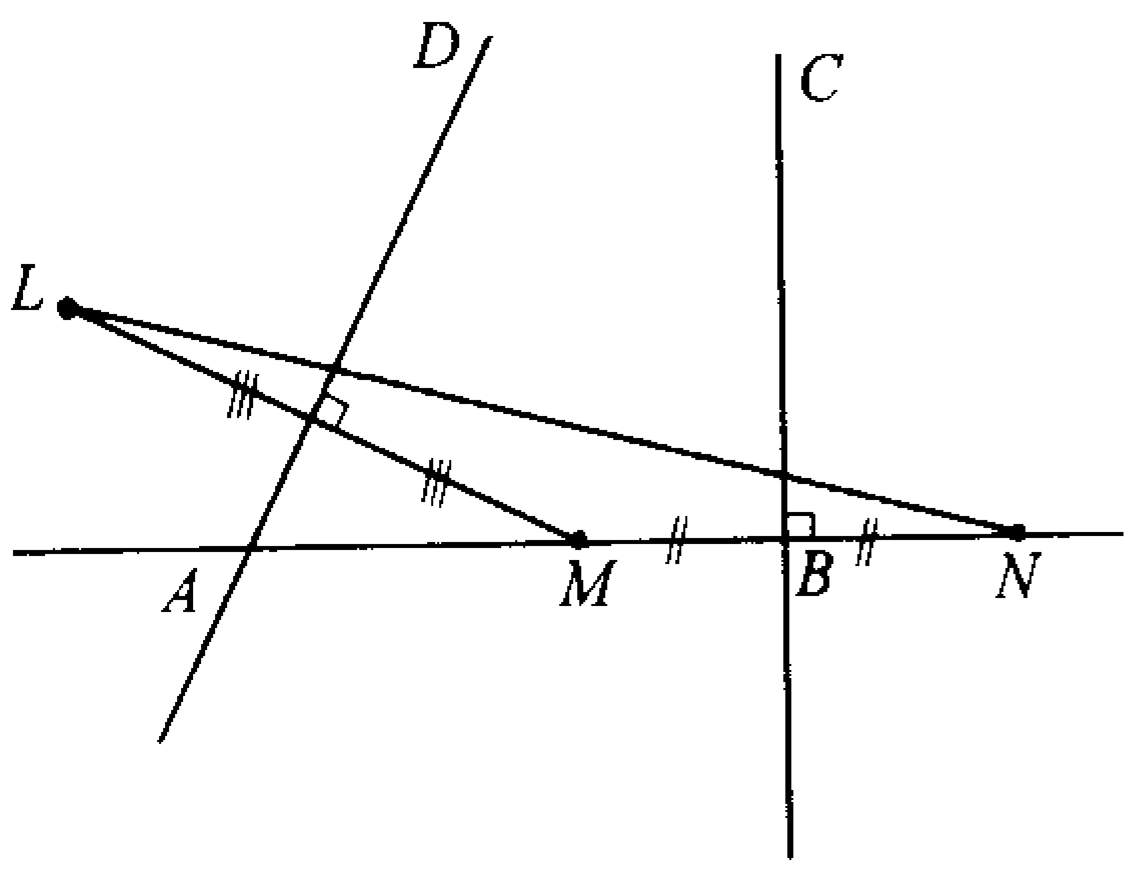


图 2-95

命题 6 第五公设成立的充要条件是与已知直线等距且在该直线同侧的三点在同一直线上。

必要性已经在中学平面几何中证明，下证充分性。设 A，B，C 三点在直线 a 同侧，且到 a 等距，即 $AA_1=BB_1=CC_1$，其中 $AA_1\perp a$，$BB_1\perp a$，$CC_1\perp a$，A_1，B_1，C_1 是垂足，见图 2-96。于是$\triangle A_1BB_1\cong\triangle A_1AB_1$，$A_1B=B_1A$，又 $AA_1=BB_1$，故$\triangle A_1AB\cong\triangle B_1AB$，$\alpha=\beta_1$；同理 $\alpha=\gamma$，$\beta_2=\gamma$，进而 $\beta_1=\beta_2=90°$，即四边形 A_1B_1BA 中四个内角皆

直角，由三角形全等可以得到$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6=\angle 7=\angle 8$，而$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4\neq\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=2\pi$，见图 2-97，于是$\angle 1+\angle 4+\angle 7+\angle 8=\pi$，即$\triangle AA_1B_1$ 的内角和为 π，故第五公设成立。

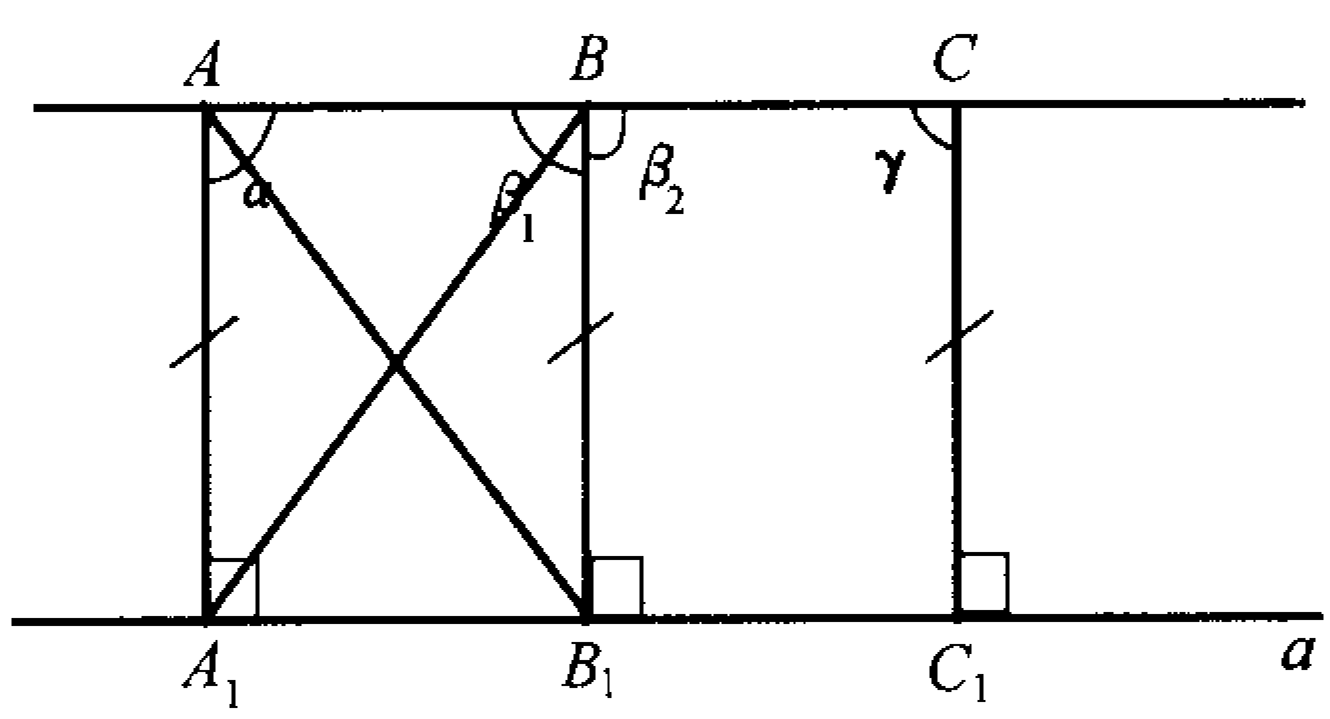


图 2-96

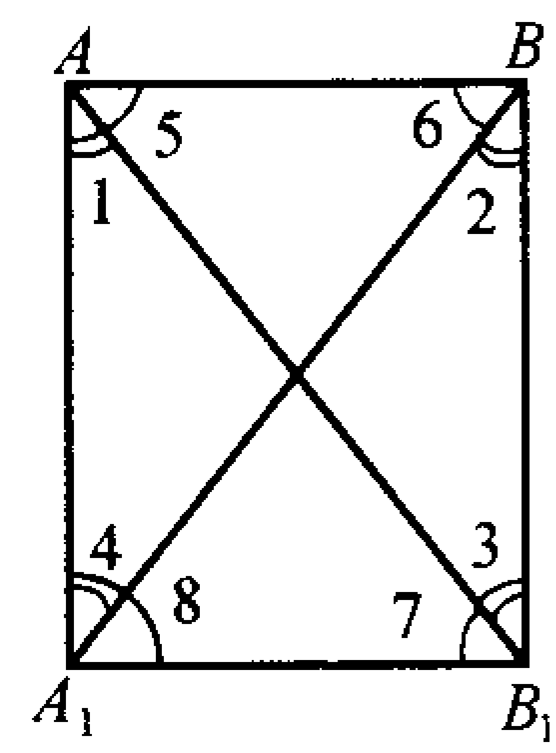


图 2-97

命题 7 第五公设成立的充分必要条件是角度数在大于0小于 π 之间的任一角内部的任一点可以引一直线，使此直线与该角的两边相交。

作任一角$\angle AOB$ 的角平分线OC，$\angle AOB<\pi$，设 P 是$\angle AOB$ 内任一点，过 P 作OC 的垂线PQ，见图 2-98，PQ 是OC 的垂线，而 OA 是OC 的斜线，由命题 3，当第五公设成立时，PQ 与OA 相交；同理 PQ 与OB 相交。

下面证明充分性。设过$\angle AOB$ 内任一点P 可以引出一条与此角两边相交的直线，但第五公设不成立，则每个三角形内角和小于 π，记

$$\delta(\triangle ABC)=\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)>0$$

设$\triangle ABC$ 中$\angle A$ 是最大的内角。设 A'是A 点关于BC 的对称点，见图 2-99。延长 AC，AB 成射线，A'在$\angle CAB$ 内部，于是过 A'点可以引直线EF 与AC，AB 分别相交于E，F 点。连 $A'C$，$A'B$，则有

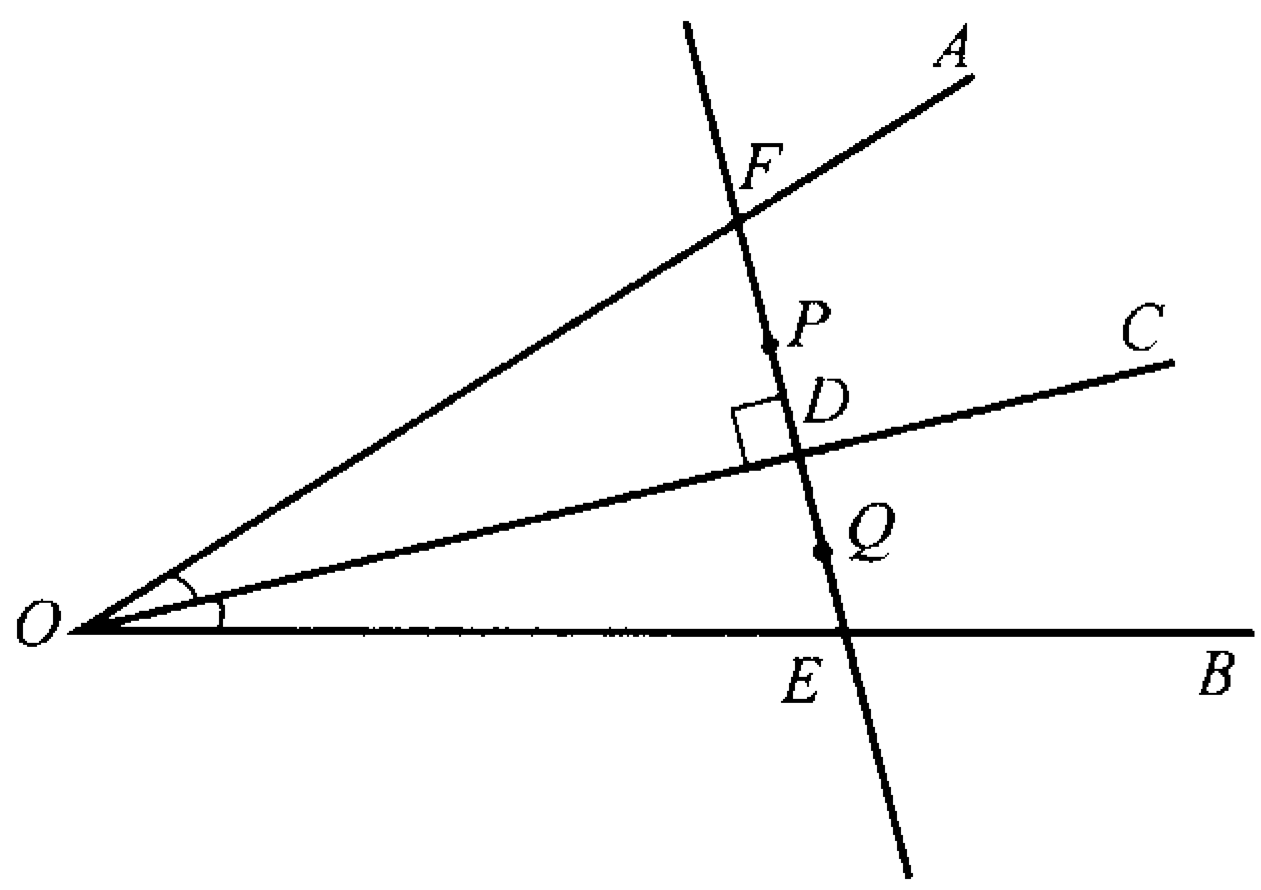


图 2-98

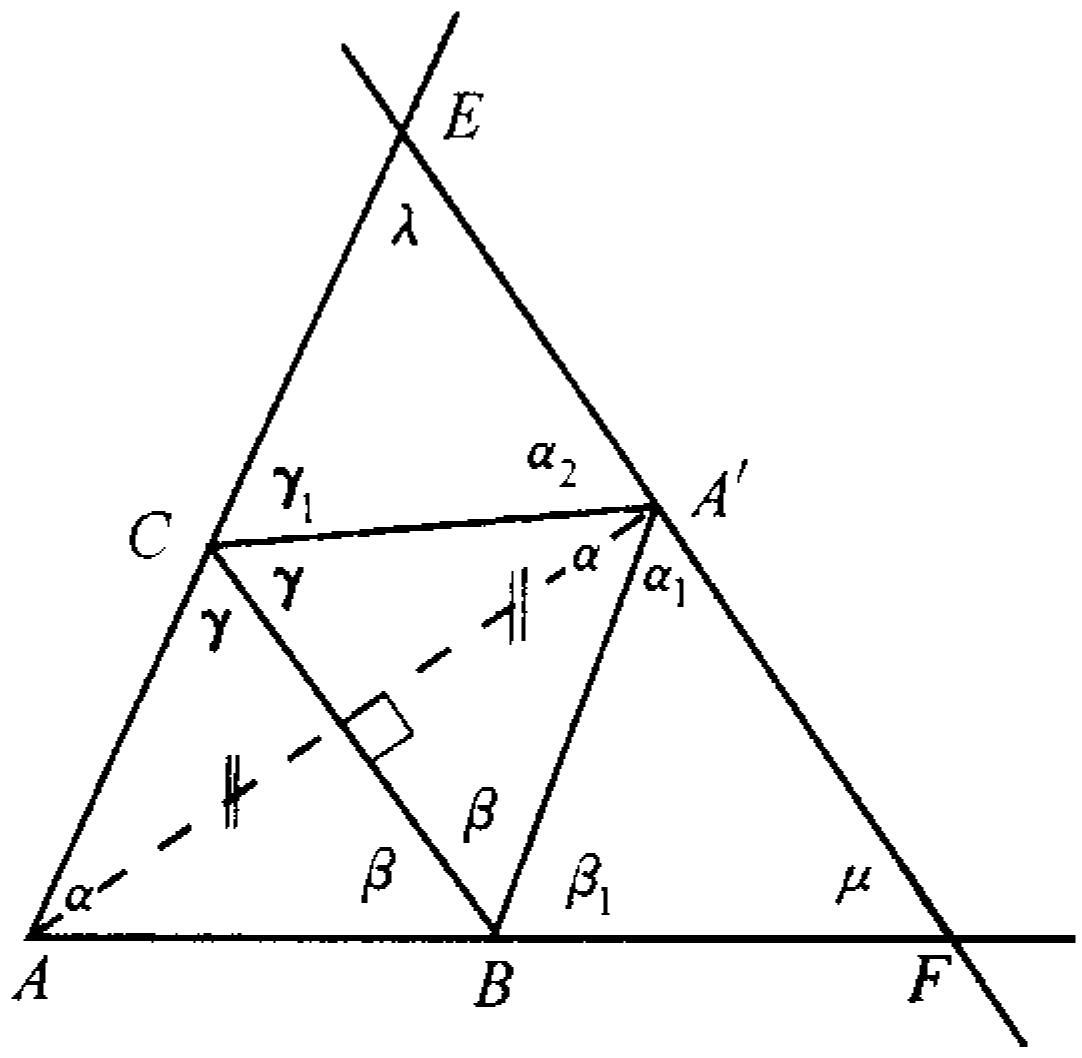


图 2-99

$$\delta(\triangle ABC)=\delta_0=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)>0$$
$$\delta(\triangle BCA')=\delta_0=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)>0$$
$$\delta(\triangle A'BF)=\delta_1=\pi-(\alpha_1+\beta_1+\mu)>0$$
$$\delta(\triangle A'CE)=\delta_2=\pi-(\alpha_2+\gamma_1+\lambda)>0$$
$$\begin{aligned}2\delta_0+\delta_1+\delta_2&=4\pi-\pi-\pi-\pi-(\alpha+\lambda+\mu)\\&=\pi-(\alpha+\lambda+\mu)\end{aligned}$$

于是

$$\delta(\triangle AEF)=\pi-(\alpha+\lambda+\mu)=2\delta_0+\delta_1+\delta_2$$
$$\delta(\triangle AEF)>2\delta(\triangle ABC)$$

对于$\triangle AEF$，仿上可以构造出另一三角形$\triangle_1$，使得$\delta(\triangle_1)>2\delta(\triangle AEF)>4\delta_0$，对$\triangle_1$，可以得到$\triangle_2$，使得$\delta(\triangle_2)>2\delta(\triangle_1)>8\delta_0$，依此知，存在$\triangle_k$，使得$\delta(\triangle_k)>2^{k+1}\delta_0$，当$k$足够大时，$\delta(\triangle_k)>\pi$，这是不可能的。

命题 8 第五公设成立的充分必要条件是圆内接正六边形的边长等于该圆半径。

必要性已在中学平面几何中得证，下证充分性。设 AB 是圆内接正六边形的一条边，且 $AB=OA=OB$（图 2-100），不用第五公设可以证明等边三角形三个内角相等。又$\overset{\frown}{AB}$是圆周的$\frac{1}{6}$，故$\angle AOB=$

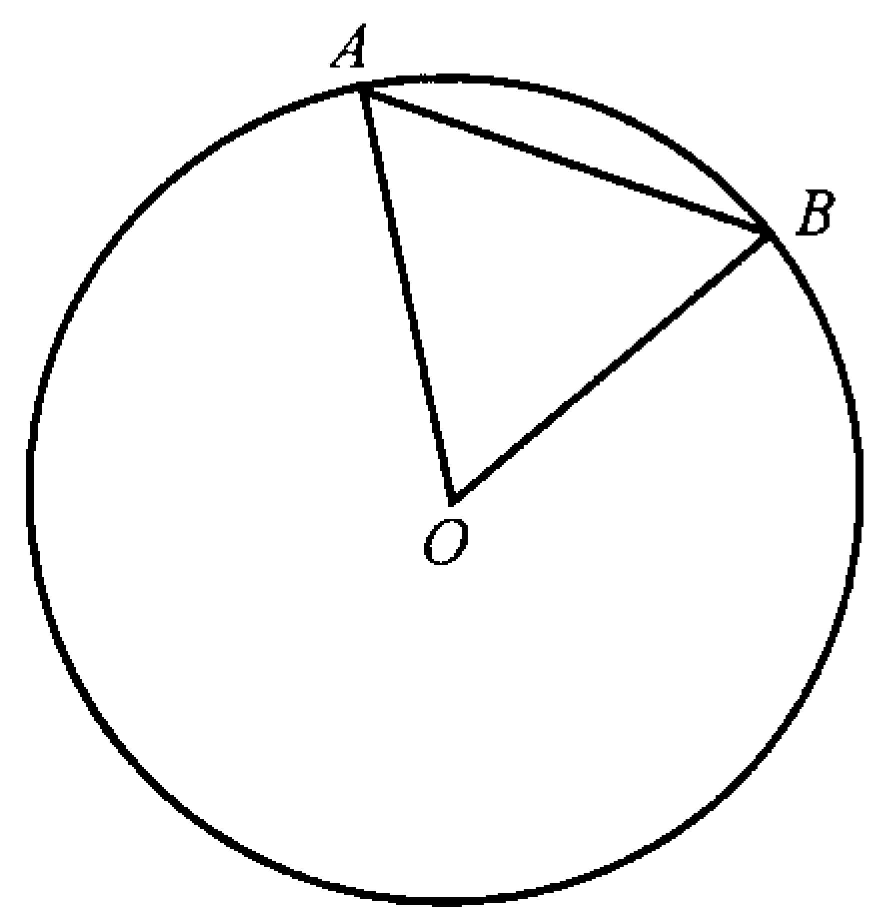


图 2-100

$\frac{\pi}{3}$，于是$\angle AOB=\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{3}$，$\triangle OAB$ 的内角和为π，进而第五公设成立。

以上建立的命题 1，命题 2，……命题 8 八个充分必要条件，是欧几里得几何中与第五公设等价的八个命题，如果否定欧几里得第五公设，代之以相反的公理，则上述八个已为每个中学生视为几何金律的命题将全被否定，出现人们不情愿接受但又不得不接受的一种新几何。

罗巴切夫斯基用下面的公理替代第五公设：

设 a 是任一直线，A 是a 外一点，在 A 与a 确定的平面上，过 A 而不与 a 相交的直线至少有两条。

这条公理等价于：

存在内角和小于 π 的三角形。

在上述罗氏公理和欧几里得公理系统中删去第五公设所组成的公理系统中，建立的几何称为罗巴切夫斯基几何，与上述八个充要条件对应的，有以下八条命题。

命题 1′ 在平面上任一直线 a 外任取一点A，过 A 点与a 平行的直线至少两条。

命题 2′ 任一三角形内角和小于 π。

命题 3′ 平面上一直线的垂线与斜线并不一定相交。

命题 4′ 相似而不全等的三角形不存在。

命题 5′ 存在无外接圆的三角形。

命题 6′ 在平面上一直线的同侧与此直线等距的点的轨迹是一曲线，它上面任何三点不在同一直线上。

命题 7′ 过每一锐角的一边存在不与另一边相交的垂线。

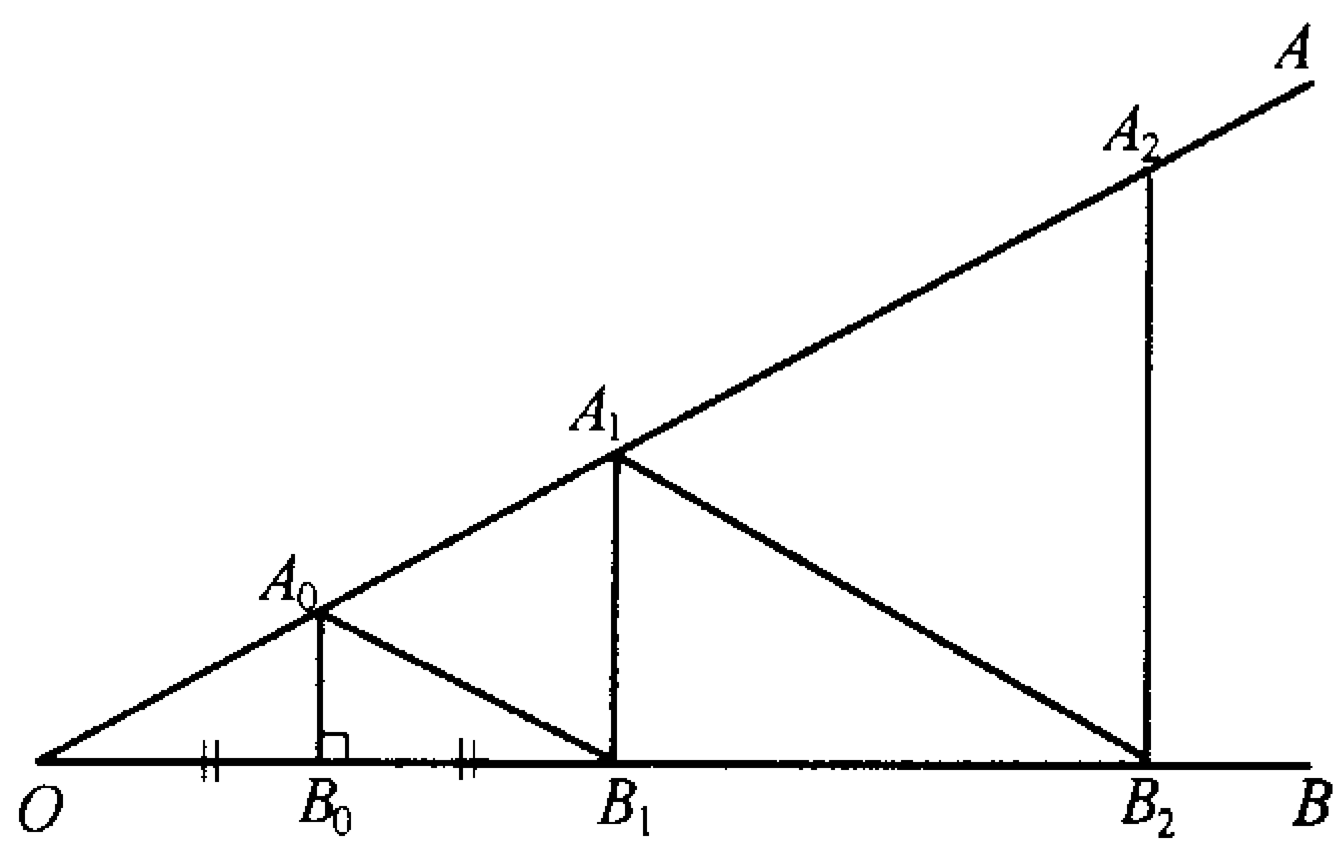


图 2-101

设$\angle AOB$是锐角，若过OB边的每一垂线皆与OA边相交，从OA上任一点A_0向OB作垂线A_0B_0，B_0是垂足，在OB上取O点关于$A'B'$的对称点B_1，从B_1点向上作OB的垂线，它与OA交于A_1，如图 2-101，与命题 5 相似地可以证出

$$\delta(\triangle OA_1B_1)>2\delta(\triangle OA_0B_0)$$

作O点关于A_1B_1的对称点B_2，则得

$$\delta(\triangle OA_2B_2)>2\delta(\triangle OA_1B_1)$$

依此类推得

$$\delta(\triangle OA_nB_n)>2\delta(\triangle OA_{n-1}B_{n-1})>\cdots>2^n\delta(\triangle OA_0B_0)$$

由于$\delta(\triangle OA_0B_0)>0$，故$\delta(\triangle OA_nB_n)>\pi$，这是不可能的。

命题 8′ 圆内接正六边形的边大于该圆半径。

事实上，在图 2-100 的$\triangle AOB$中，内角和小于π，而$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$\angle AOB$是$\triangle AOB$中的最大的角，而$\triangle AOB$中大角对大边，所以$AB>OA$。

从欧几里得几何的观点来看，上述命题 1′，命题 2′，……命题 8′这八个命题似为荒唐的假命题，而从罗巴切夫斯基几何的观点来看，它们却是数学科学不可或缺的严肃真理。

真理与假理都是相对的！从罗巴切夫斯基几何的观点看欧氏几何，例如“三角形内角和为π”，“正六边形边长等于其外接圆半径”等等，我们早已奉为金科玉律的几何信条，却不能得到承认！

2.29 伟大的数学革新派罗巴切夫斯基

罗巴切夫斯基生于俄国诺夫哥罗德市一个土地测量员家庭，1807年入喀山大学，时年仅15岁，毕业后留校任教，1822年晋升教授，1827～1846年任喀大校长。

罗巴切夫斯基学生时代是一位活泼好动，思想开放，主持正义，有创新精神和独立思考习惯的无神论者，常常违犯束缚学生思想和自由的校规。他从青年时代起就具有反传统反保守的品质，这种品质一直延续到他任喀大校长时仍然坚持不变，对于违背教育规律的政府指令，不管下令的部门有多高，官职有多大，他都一律反对和抵制，对传统势力和封建忠君思想从不同流合污，所以到了1846年，虽然他在任期间喀大的教学科研工作成绩斐然，但当权者仍然免除了他的校长职务。

性格即命运，罗巴切夫斯基的叛逆性格虽然不能明哲保身，但在学术上却成为一位伟大的革命性数学家。

1815～1817年，在罗巴切夫斯基的教学笔记中发现，他当时也希望证明欧几里得第五公设，而且他发现了过去人们对第五公设的证明都因不严格而失败；1823年，他在几何讲义中写道："这个真理的严格证明到现在为止什么地方都找不到。"

1826年2月11日，罗巴切夫斯基在喀山大学数学物理系宣读了他的开创性论文《关于几何原理的议论》，提出了罗巴切夫斯基公理，这一天公认为"非欧几何"的诞生之日。

取不同的几何公理系统为基础，数学家得到了不同的几何学，但是无论罗巴切夫斯基公理本身还是由它推导出来的几何定理，从旧几何的观点看，人们对其非常陌生甚至觉得它是假的！罗巴切夫斯基同时代的人对他的几何不信任甚至有敌意者大有人在！当时几乎

无人理解罗巴切夫斯基几何深远的科学价值，连当时俄国最伟大的数学家奥斯特罗格拉德斯基也不理解罗氏几何，甚至著文在《祖国之子》上发表，称罗巴切夫斯基的几何是“笑话”，是“对有学问的数学家的讽刺”云云。布特列洛夫 1878 年写道：“对罗巴切夫斯基的‘想像中的几何’，大家都用对待科学家中的怪人宽容惋惜的态度来谈论。”

科学界当时对待罗巴切夫斯基的不公正评价并未摧毁他对新几何的信念，他不顾个人所受到的一切侮辱而骄傲地高举革新几何的大旗，替天行道；他的理想终于得胜，被历史承认；罗巴切夫斯基最终被认定为俄国和全世界科学家的优秀代表。高斯于 1846 年写给友人的信中说：“罗巴切夫斯基是作为专家以真正的几何精神来解释世界，我劝你把注意力转向他的名著《关于平行线理论的几何研究》，研读它，一定会使你感到很大的满意。”

无矛盾的罗巴切夫斯基几何的建立表明，任何几何公理都不是牢不可破放之四海而皆准的教条，它们是可以改变的。人类活动的空间里的几何学和存在需要上千光年才能达到的点的太空的几何学是有区别的。

W. 克利福特说：“哥白尼和罗巴切夫斯基之间有着有趣的相似性，他们都是斯拉夫人，各人在科学上的见解都为人类文明带来了革命，两人的革命都具有巨大的意义，他们是人类宇宙观革命的领袖人物。”

罗巴切夫斯基不断地完善非欧几何，由于长期的钻研和创作，晚年双目失明，许多著作是他口述由别人代笔写成的，主要著作有《虚几何学》、《泛几何学》、《虚几何学在一些积分上的应用》、《平行线理论的几何研究》等。

罗巴切夫斯基向人类几千年确信不疑的欧几里得几何系统挑战，他的理论成功地否认了欧氏几何是唯一可能的空间形式的观点。

罗巴切夫斯基几何帮助科学家解决了相对论中的数学困难，在

天体物理和原子物理中得到了重要应用，在质量很大速度很高的超宏观世界和原子内部的微观世界当中，欧氏几何已不适用，我们感谢罗巴切夫斯基开创了新几何，它为我们提供了探索宇宙空间的有力的数学武器。

2.30 细胞几何学

在一个玻璃杯里调制比较浓的肥皂水，用一根饮用饮料的吸管去吹，杯内生出互相拥挤的肥皂泡；把电视机包装箱内的防震泡沫塑料块掰开，便会看到白色泡沫塑料的颗粒与上述肥皂泡相似的结构；如果把中午吃剩的米饭倒入凉水放在灶上煮成稀粥，等开锅时，也会看到升腾起来的状似肥皂泡的泡沫挤压在一起；在平面上，也有相应的情形发生，例如春夏大旱，稻田土地龟裂的形状，等等。这些几何形象具有数学上的统一性。我们看到，在平面的情形，是一些状似杂乱无章的凸多边形，在空间的情形，是一些状似杂乱无章的凸多面体，所以人们称诸如此类的结构为“无序结构”。早年大科学家牛顿和虎克等曾研究过肥皂泡。事实上，在化工、冶金、地质、物理等众多领域，这种无序结构有广泛应用。系统地数学地研究这种结构的第一人是 20 世纪俄国数学家沃热诺伊(Voronoi)，所以这种结构亦称 Voronoi 网络。

下面以二维情形如例，用平面几何的方法讨论 Voronoi 网络。

平面上任取定 n 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，把每对点间用直线段连接，以 v_i 为端点的线段组成的图形称为“星”，记成 $S(v_i)$；若 $S(v_i)$中任一线段所在直线的两侧，皆有 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 中的点，则称 $S(v_i)$为“正星”，否则称为“偏星”；$S(v_i)$的一些线段的垂直平分线围成的凸多边形当中，仅含 V 中的一个点 v_i 且其面积最小者，称为以 v_i 为细胞核的细胞。

v_i 为细胞核的充要条件是$S(v_i)$是正星。

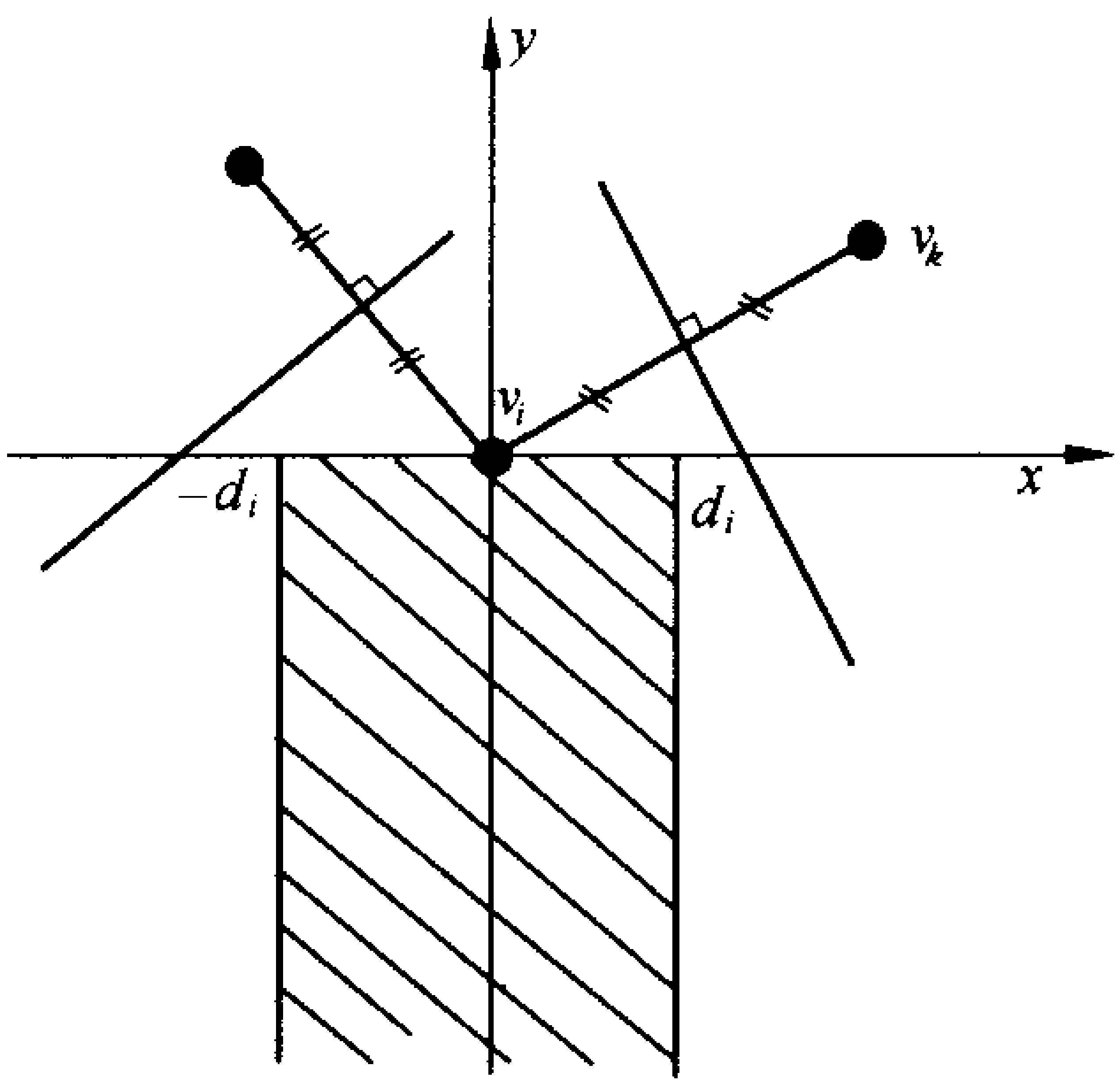


图 2-102

事实上，若 $S(v_i)$是偏星，则存在 $v_j\in V$，$v_i\neq v_j$，直线 v_iv_j 的一侧无 V 中的点；取 v_i 为坐标原点，v_iv_j 所在的直线为 x 轴，取 y 轴的方向，使得第三四象限内无 V 中的点，构成平面直角坐标系，于是对每个 $k\neq i$，$1\leqslant k\leqslant n$，线段 v_iv_k 的垂直平分线与 x 轴的交点与原点的距离 $d_{ik}\geqslant\frac{|v_iv_k|}{2}$，见图 2-102。令 d_i 是$d_{i1}, d_{i2},\cdots, d_{in}$中的最小值，显然，在 x 轴下方以 y 轴为中位线相距为 $2d_i$ 的平行线间的带形区(阴影区)内无 v_iv_k 垂直平分线上的点，其中 $k\neq i$，所以 v_iv_k 的垂直平分线族不能围成内含 v_i 的凸多边形，即 v_i 不是细胞核。

反之，若 $S(v_i)$是正星，我们来论证 v_i 是细胞核。作与 v_i 距离足够大的直线l，使得 l 的一侧无V 中的点。平移 l 使其与v_i 距离缩小，一定存在一个时刻，此时首次发现 V 中的点与 l 接触，设这第一批与 l 接触的点在l 上以正向排列为$v_{1_1}, v_{1_2},\cdots, v_{1_m}$(皆异于 v_i)，所谓正向是指沿此方向在 l 上行进时，l 左侧有V 中之点。由于 $S(v_i)$是正星，以 v_{1_1}为中心按顺时针转动 l，转过某一角度 $\alpha_1>0$，使得直线 l 扫过的区域内无V 中之点，这时 l 转到l_1 的位置，且 l_1 上有一点 $v_2\notin l$，但 $v_{2_1}\in V$，$v_{2_1}\neq v_i$。不妨设 v_{2_1}是 l_1 上按其正向而论的第一个 V 中的点；以 v_{2_1}为中心顺时针转动 l_1，转过某角度 $\alpha_2>0$，得直线 l_2，l_1 扫过的区域内无 V 中的点，但 l_2 上第一个 V 中的点是v_{3_1}，$v_{3_1}\neq v_i$，$v_{3_1}\notin l_1$。依此类推，这种转动至少会发生两次。又 V 中点

是有限的，故存在有限条直线 $l, l_1, l_2, \cdots, l_k(k\geqslant 2)$，其上分别有点 $v_{1_1}, v_{2_1}, \cdots, v_{(k+1)_1}=v_{1_m}$，这些点为顶构成内含 v_i 的凸多边形 $v_{1_1}v_{2_1}\cdots v_{(k+1)_1}$（顺时针序）。作 $v_iv_{1_1}$ 的垂直平分线 l_1'，作 $v_iv_{2_1}$ 的垂直平分线 l_2'，则 l_1' 与 l_2' 相交于 $\angle v_{1_1}v_iv_{2_1}$ 内部，见图2-103。$\angle 1+\angle\alpha_1'=\pi$，所以 $0<\angle 1<\pi$。同时，$v_iv_{2_1}$ 的垂直平分线 l_2' 与 $v_iv_{3_1}$ 的垂直线平分线 l_3' 相交于 $\angle v_{2_1}v_iv_{3_1}$ 内部，且 $0<\angle 2<\pi$，依此类推，得到一个由 $v_iv_{1_1}, v_iv_{2_1}, v_iv_{(k+1)_1}$ 的垂直平分线围成的内含 v_i 的凸多边形 K，可见以 $S(v_i)$ 的一些边的垂直平分线围成的凸多边形存在，又由于 V 的元素有限，故这种凸多边形的个数有限，从中挑选面积最小者，即为以 v_i 为细胞核的细胞。

我们已经知道，当 $S(v_i)$ 是偏星时，v_i 不是细胞核；这时，会存在一个无界平面区域，其中内含 V 的唯一点 v_i，其边界由 $S(v_i)$ 的某些边之垂直平分线上的部分线段或射线组成，而此无界区域内不含 $S(v_i)$ 上的边的垂直平分线上的点。我们把 V 装入一个盒子里，则上述无界区域在盒子里的部分称为"皮肤细胞"。

皮肤细胞存在的充分必要条件是 $S(v_i)$ 是偏星，这时称 v_i 是皮肤细胞核。

可以证明，以 v_i 为细胞核的细胞至多一个。对于三维空间的情形，只需把平面情形的垂直平分线改成垂直平分面，凸多边形由凸多面体代替，面积由体积代替，则可把上述论证推广到三维空间，建立相似的一套概念与结论。

上述数学模型反映的实际模型是：每个细胞核都以相同的速度向各个方向均匀生长，直至细胞间互相接触挤压而停止生长，于是构成了一块细胞的无序结构或称机体。肥皂泡或泡沫塑料等形成的数学机制正是如此。图 2-104 画的是二维细胞群的局部示意图。

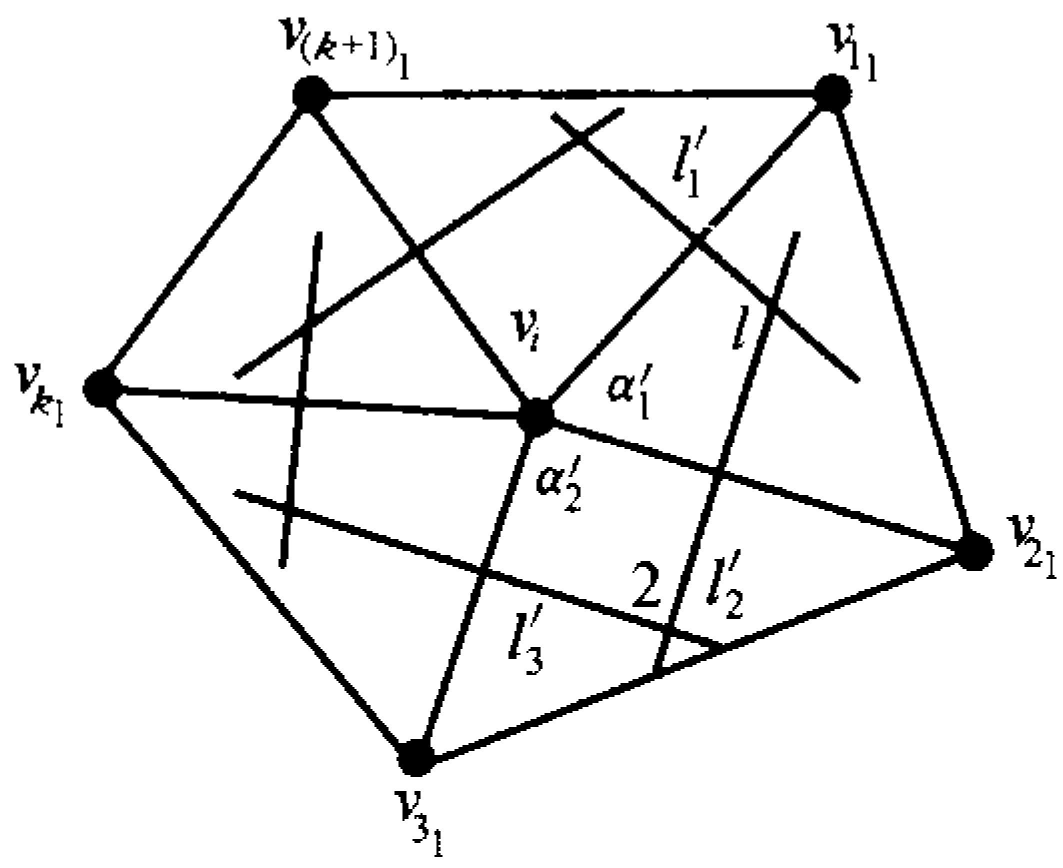


图 2-103

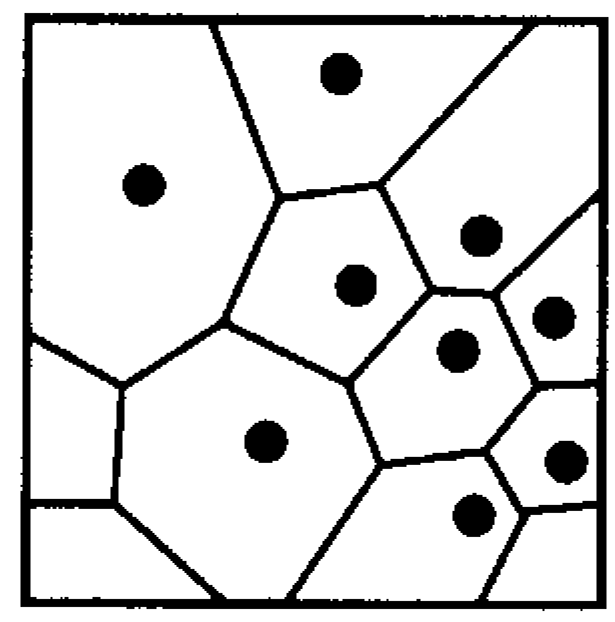


图 2-104

2.31 蚂蚁的最佳行迹

一只蚂蚁从一块砖的一个顶点爬向这块砖的对角顶点，它应沿怎样的路线爬行，才使其行迹最短(最省时间)?

设此砖为长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，三条棱长 $AB=a$，$AD=b$，$AA'=c$，$0<c<b<a$，蚂蚁从 A 点爬向 C' 点，见图2-105，作长方体的展开图如图 2-106。从展开图上看，蚂蚁应从直线段 $AA'B'C'$，AEC'，AFC'，AGC'，AHC'中挑一条最短者作为它的爬行路线。

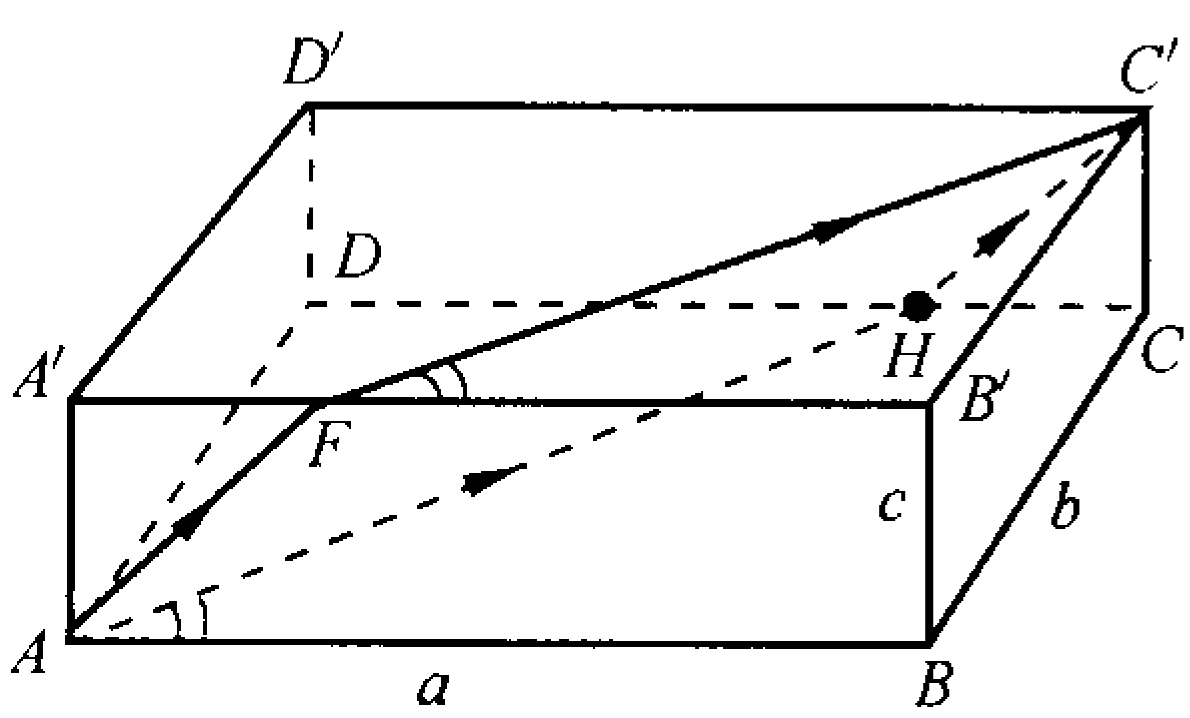


图 2-105

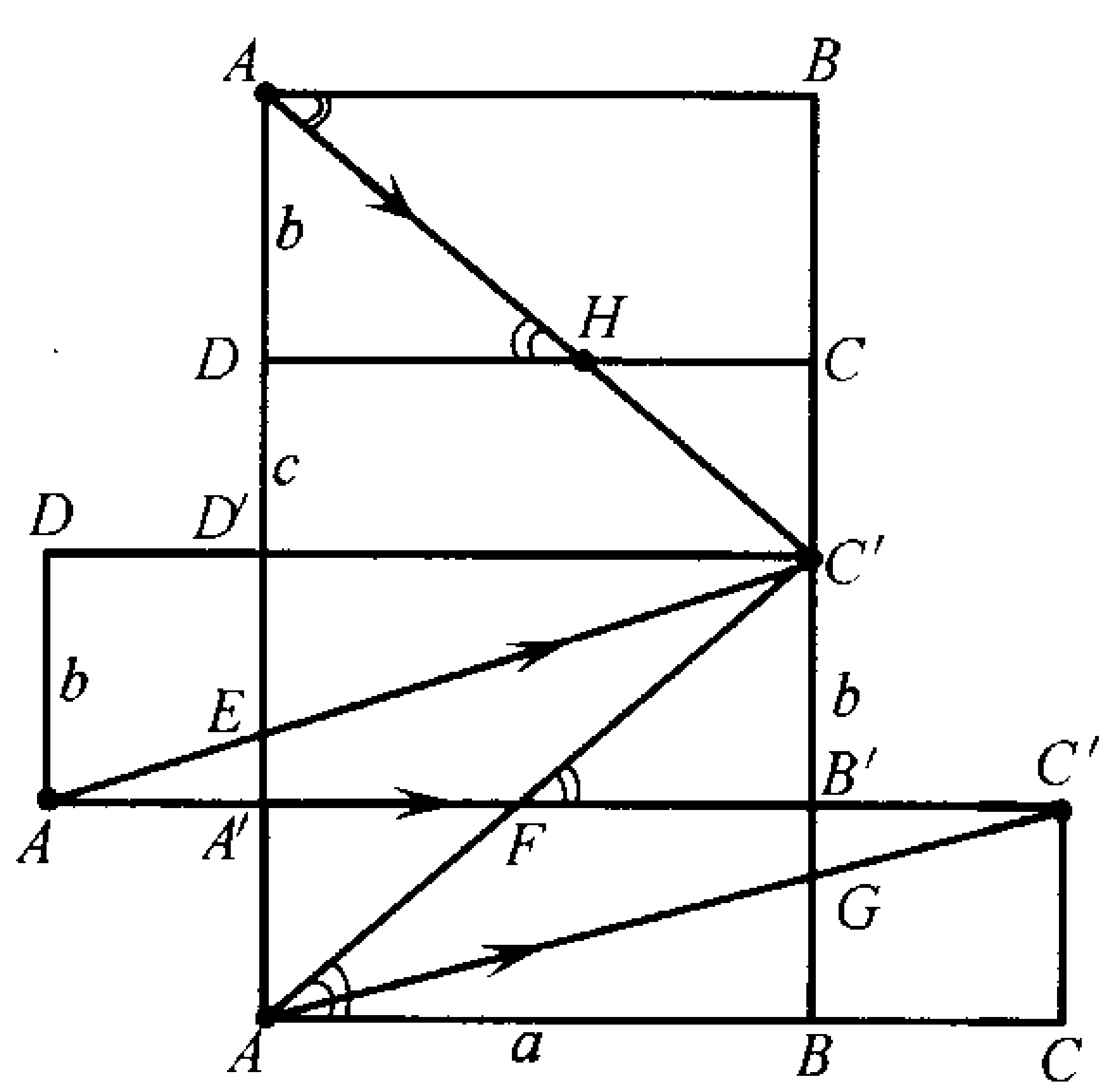


图 2-106

由勾股定理容易算出

$$AA'B'C' = a + b + c$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$$

$$AEC' = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}$$

$$AFC' = \sqrt{a^2 + (c + b)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$$

$$AGC' = \sqrt{(a + b)^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$$

$$AHC' = \sqrt{a^2 + (b + c)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc} = AFC'$$

由于$0 < c < b < a$,故有

$$bc < ac < ab < ab + ac + bc$$

所以以上五种路线以 AFC'与AHC'最短,蚂蚁应沿着这两条路线之一爬向 C'点。

在图 2-106 中$\triangle AAC'$是等腰三角形,故

$$\angle BAH = \angle DHA = \angle BAC' = \angle B'FC'$$

$$\triangle ADH \cong \triangle B'C'F,\ FC' = AH$$

由图 2-105 可以看出,由于$\angle B'FC' = \angle BAH$,故 $FC' \mathrel{\underline{\parallel}} AH$,于是 $AHC'F$ 是平行四边形,蚂蚁是从 A 出发沿此平行四边形的任一组邻边爬到C'的。因为

$$\frac{B'F}{a} = \frac{b}{b + c}$$

所以

$$B'F = \frac{ab}{b + c}$$

可见，可以用规尺作图法找到 F 点和 H 点，从而确定蚂蚁的最佳行迹。

在其展开图是平面图形的立体表面上，蚂蚁从一点爬向另一点时，其最省时的行迹皆为展开图上连接此两点的各直线段中的最短者对应的立体上的那条曲线段。

例如在圆柱上，见图 2-107，从 A 点爬向 B 点，把此圆柱的侧面展开成 $AMNP$，见图 2-108，若 B 落在展开图的中位线 FE 上，则蚂蚁应按 AB' 或 MB' 两条线段在圆柱上的对应曲线段爬行，一条在圆柱的可视部分(即前面)，一条在此圆柱的背后；如果 B 点落在侧面展开图的左(或右)半部，则蚂蚁按此半部中的直线段 AB'' 所对应的曲线爬行才最省时间。蚂蚁是在圆柱上盘旋着上升到 B 点的，如果盘旋的角速度是匀速的，则上升的速度是匀速的。角速度与上升速度之比是一个常数。

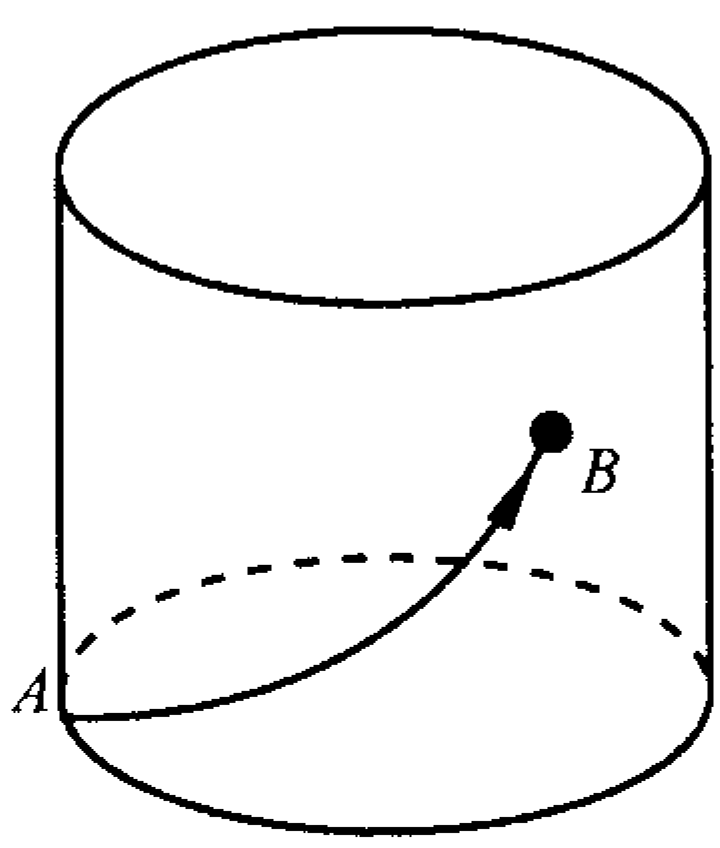


图 2-107

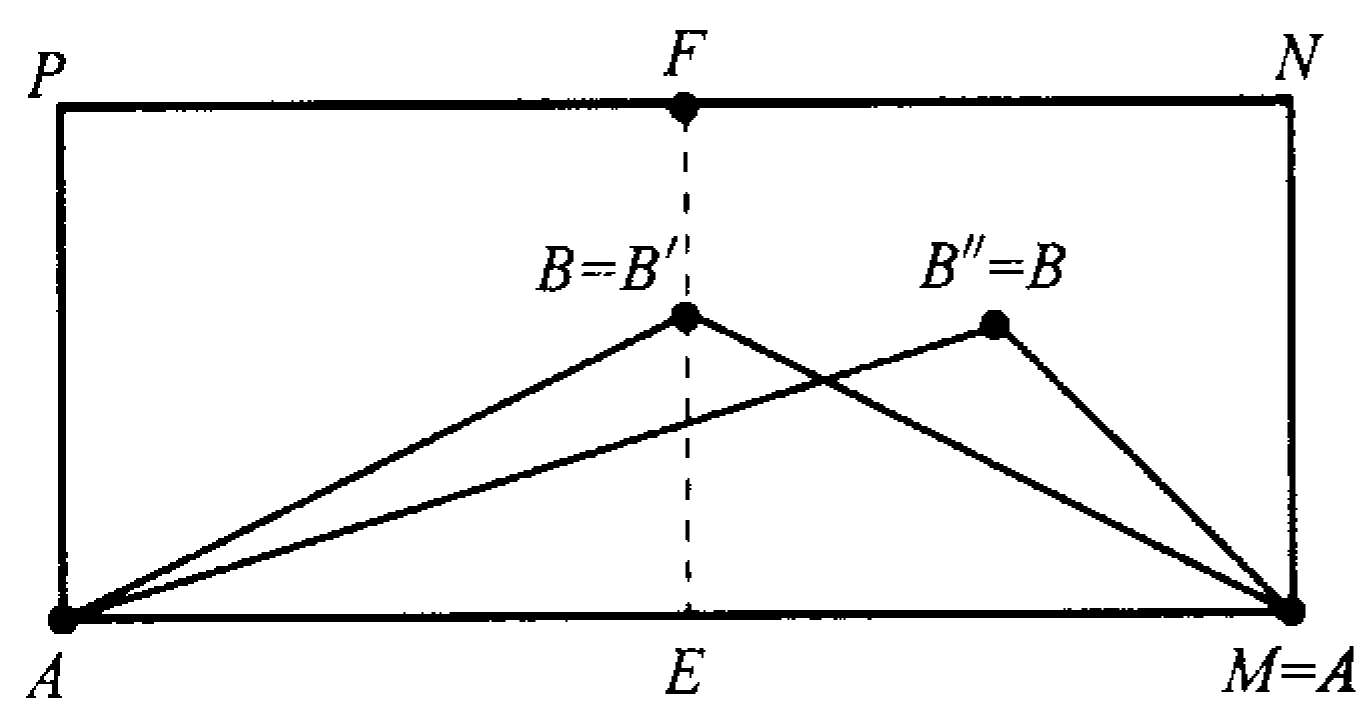


图 2-108

蚂蚁在圆锥上爬行的最佳路线也可用前面的展开图方法加以解决；有趣的是，如果它是从圆锥底面圆周上一点爬向此圆周的另一点，则不是沿圆周爬行，而是立刻向上爬，到达一个最高点后再向下爬行，见图 2-109，图 2-110，其最佳爬行路线曲线段 AB 在展开图(图 2-110)上是直线段 AB($\overset{\frown}{AB}$在底面圆周上是劣弧)。

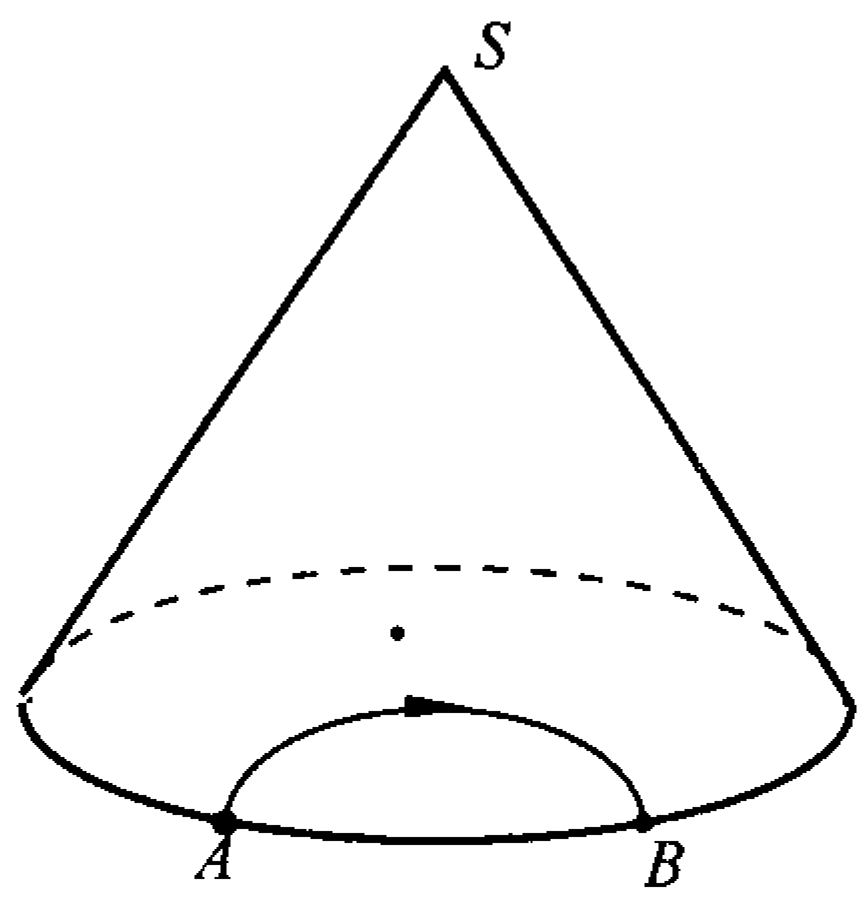


图 2-109

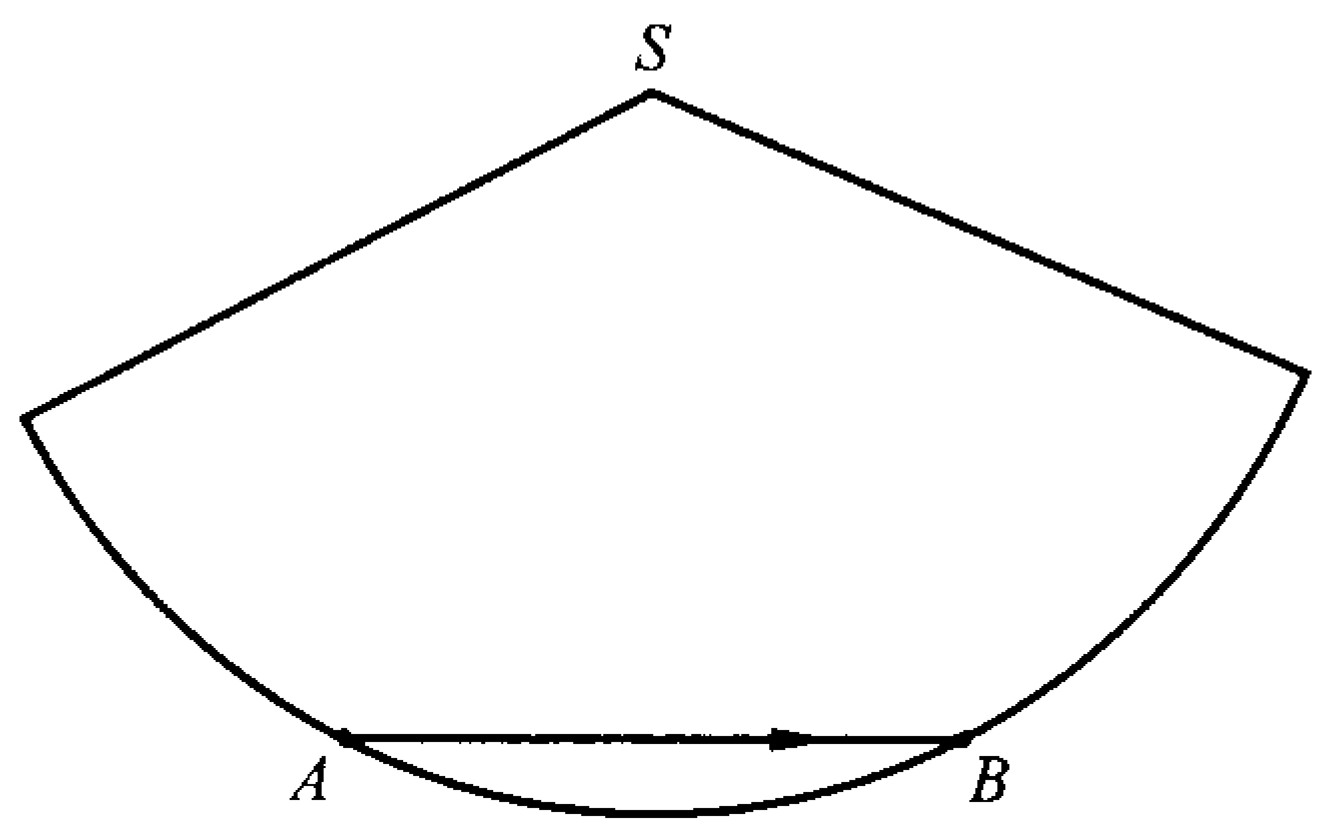


图 2-110

对于没有平面展开图的曲面，寻求蚂蚁从其上一点爬向另一点的最佳路线就不像上面的解法那么方便了，一般而言，不能用初等数学的方法来讨论。例如在球面上，蚂蚁从一点 A 爬向另一点 B，则应沿 A，B 所在的“大圆”上的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 爬行。所谓大圆，是其中心在球心的球面上的圆。沿大圆爬行时，路径弯曲的程度最小，最接近直线段 AB，但证明这一点并非易事。

另一个值得注意的问题是，如果在某曲面上有一个洞（把此洞视为一个点），若没有这个洞，存在一条蚂蚁最佳行迹，使它从 A 点爬到 B 点；有了这个洞，需要另寻佳迹。可惜这时可能不存在最佳行迹了！ 事实上，如果无洞时最佳行迹是唯一的，它爬到洞附近时必须绕行，绕行的半径（以洞为中心）可以是 $\frac{1}{n}$，$n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots\cdots$ 有无穷条行迹，都与无洞时的最佳行迹相差无几，越来越接近原最佳行迹，但哪一条也不是最佳的，都可以再缩短，可见这时已找不到最短行迹了。

3 图论篇

千言万语不及一张图。

——民谣

3.1 美丽图论

在这一篇当中，我们将向读者展示图论的若干美丽画卷，从而领略它诸多引人入胜的特色。图论强有力的逻辑、漂亮的图形和巧妙的论证，定会使你陶醉。图论在民间故事中诞生，在现代数学、工程技术、优化管理等科学技术领域中应用极为广泛，在数学科学当中，图论异军突起，迅速发展，已经发展成十分有趣、十分有用的重要数学分支，它是离散数学的组成部分，而离散数学是计算机科学技术的理论基础。事实上，计算机是机械地处理离散事物的工具，例如处理棋弈的布子，1997年，人造机器“深蓝”计算机竟然在国际象棋盘上战胜了国际象棋头号大师卡斯帕罗夫！计算机与图论联姻，解决了和将要解决大量优化决策问题，这就是图论日益受到青睐的主要原因。微积分在数学当中一贯处于领袖地位，可以预期，有朝一日这种地位将被离散数学夺走。

图论问题看似简单，例如家喻户晓的四色问题：“把任意给出的一张地图染成彩色的，使得邻省异色，用四种颜色足够用。”这个问题已于1976年由美国科学家阿佩尔(Appel)和哈肯(Haken)用计算机证实是成立的。他们用了100亿多个逻辑判断，耗用1200个机时，使难倒过许多大数学家的四色猜想(4CC)终于在人类面前就范。4CC是1852年伦敦大学学生高思利(Guthrie)提出的，1879年，伦敦数学

会的数学家肯普(Kemple)发表了极为精巧的证明,宣布他证出了4CC为真,可惜过了十年就被人找出证明中不可修正的漏洞! 1890年,希伍德(Heawood)沿用肯普的技巧证明了五色定理,即把4CC中的四改成五则可以成立。

阿佩尔他们的机器证明是一种不可视证明,拿不出用自然语言写在纸上的书面文字证明,存在用肉眼看不清其真伪的缺点。至于用手和笔写出的证明,作者认为离问世的时间尚有不少时日,不是一朝一夕可以被几个聪明人攻克的。

粗看四色猜想,它平易近人到这种程度,可以把它向大街上和我们随机而遇的市民用不了三分钟就能讲清楚,使得即使是文盲,也可以用树棍在地上画出验证4CC成立的实例,但欲写严格的数学证明,则肯定不是一般数学家可以胜任之事了! 图论问题大都具备通俗简单、直观活泼,实质上却很难解决的特点,向人们的机敏性和逻辑性进行挑战! 在图论问题面前,我们必须严肃谨慎地思考,不可掉以轻心,有些图论问题,百思方得其解,把人锻炼得更为足智多谋。有的图论问题则不是百思一定可以得解的,例如4CC的可视证明就是一例。

3.2 人们跑断腿,不如欧拉一张图

普瑞格尔河流过哥尼斯堡城(原名加里宁格勒)市中心,河中有岛两座,筑七座古桥,如图3-1所示,每逢节假日,市民纷纷上岛消遣,老幼携扶,游玩散步,不知何日何人提出下面问题:请过每座桥恰

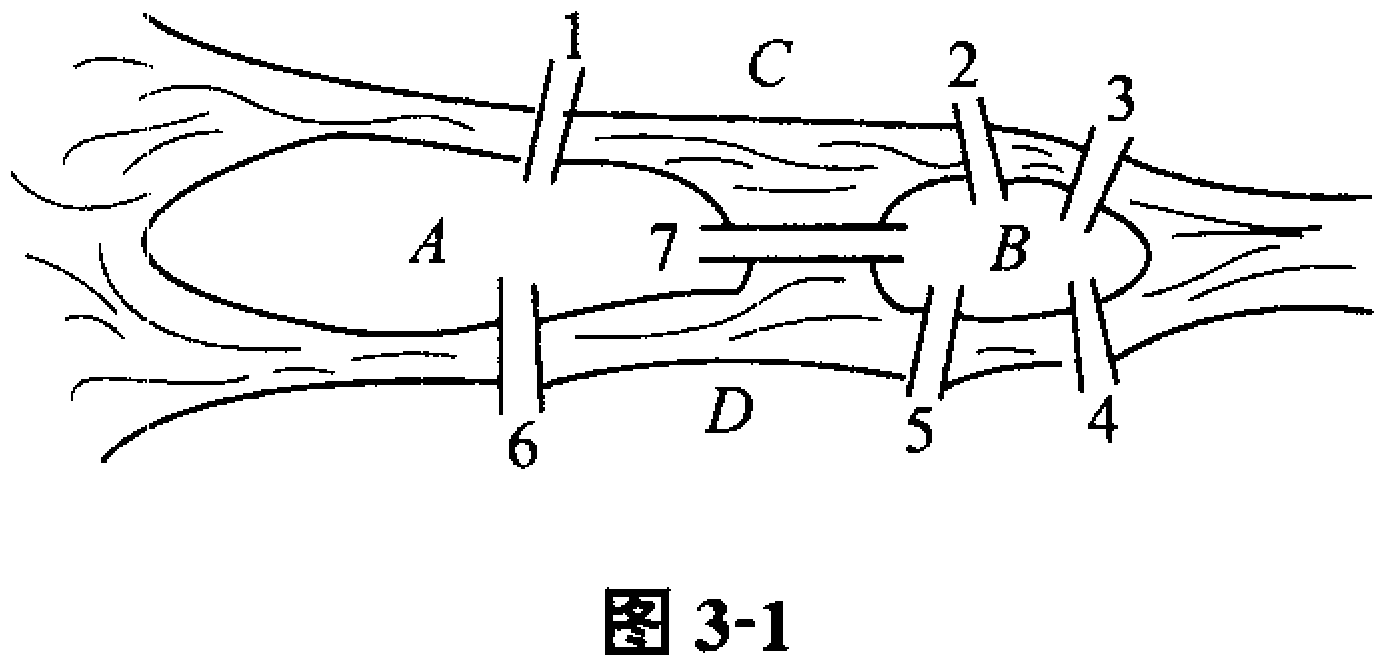


图 3-1

一次，再返回出发点。

反复的奔走试行和失败，使人们对成功的可能发生疑惑，猜想问题无解，但又谁也说不清其中道理，于是有好事者去请教年轻的数学家欧拉(Euler)，刚开始欧拉也看不出这是一个数学问题，1736 年，29 岁的欧拉把这一问题化成数学问题，严格地论证了上述“七桥问题”无解，并由此开创了图论与拓扑学的思维方式和诸多概念与理论，1736 年遂被公认为图论学科的历史元年，欧拉被尊为图论与拓扑学之父。

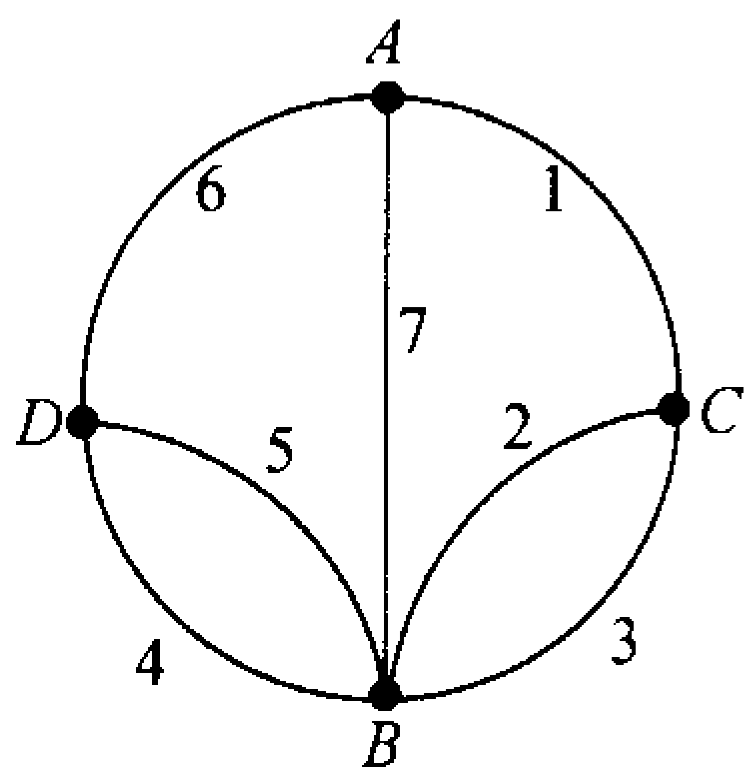


图 3-2

欧拉把 A, B, C, D 四块陆地抽象成四个点，当两地有一桥相通时，在两地相对应的点间连一曲线，此曲线之长短曲直并不介意，于是把图 3-1 的地图抽象成图 3-2 这种几何图形。把桥编号为 1 号桥，2 号桥，……，7 号桥。上岸记成 C，下岸记成 D，两岛分别为 A, B，如图 3-1，图 3-2。从图 3-2 我们看到，每个点 A, B, C, D 都和奇数条线段相连接。以 A 点为例，设 A 是出发点，不妨设通过 1 号桥远行，过一些时间通过 6 号桥返回 A，再通过 7 号桥远行，这时与 A 连通的 1 号桥，6 号桥和 7 号桥都已通行了一次，于是想回 A 已无桥允许通过了(因为约定每桥恰过一次)，所以 A 点不能做出发点，不然与 A 连接的桥都通过一次后是离开了 A 点，不能再返回 A 点了；对 B, C, D 也相似论证，可以知道这四点 A, B, C, D 都不能作为出发点，即七桥问题无解。

如果提议再建一些桥，最少建几座？建在何处？才能使每桥恰过一次又能返回出发点。

上面分析告知，如果某点与奇数条线段相连接，则该点不可做出发点；而一个点如果是“中转”点，则“进”“出”的次数要相等，所以与奇数条线段相连接的点也不能做“中转”点，可见，若从一点出发每桥

恰过一次再返回出发点必须每点处相连接的线段是偶数条；所以 A，B，C，D 之间要至少修两座新桥，才能使每点处都有偶数条线段相连。共有三种方式：A 与 C 之间，B 与 D 之间各建一桥；或 A 与 D 之间，B 与 C 之间各建一桥；或 A 与 B 之间，C 与 D 之间各建一桥即可，见图 3-3。

在图 3-3(a)上，例如从 A 出发再回到 A 的路线为：134682597，其中每个数码表示桥，这种路线不是唯一的，例如还可以按下面路线旅游：827134596，等等，还有哪些路线，请读者找一找。以其他点为出发点的路线可相似地找到；在图 3-3(b)、图 3-3(c)两种情形也可类似解决。

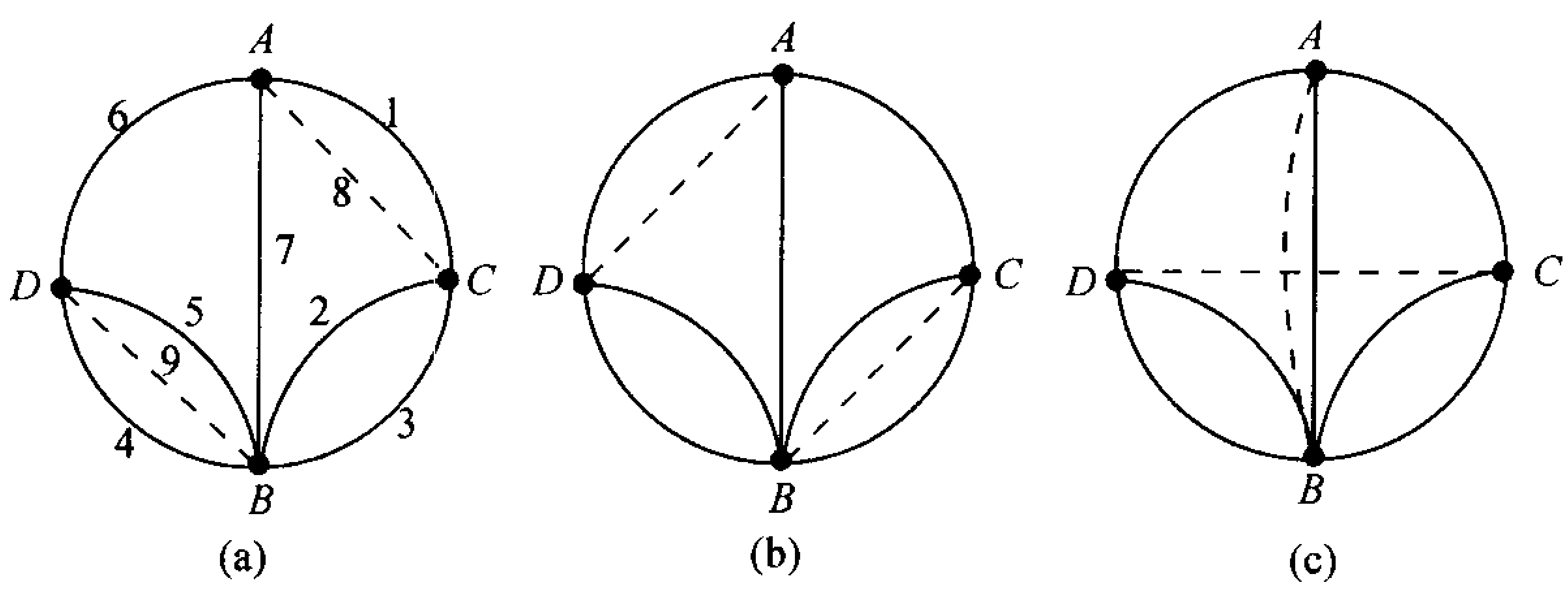


图 3-3

如果不要求一定返回出发点，但要求每桥恰过一次，这时的必要条件是至多一对点与奇数条线段连接。事实上，“中转”点皆与偶数条线段相连，如果仅有两个点与奇数条线段相连，则这两点可作为起止点，所以原来的七座桥即使不要求返回出发点也不能满足每桥恰过一次的要求，因为有四个与奇数条线段连接的点。但若取图 3-3 中那六条虚线中的一条作为新桥，则会满足要求。相应的旅游路线由读者标出。

如果不采用上面所述欧拉创立的方式来讨论，那么需要普查

七座桥的所有排列，即要审查$\frac{1}{2}\times 7! =2520$种情形，如果真的去考查这2520种方案每种旅游方案是否可行，真的要跑断腿累死人了！就是在地图上观察判断，也够费时和烦人的了。还是欧拉的招数绝妙！

3.3 数学界的莎士比亚

欧拉(L. Euler, 1707～1783)，生于瑞士的一个牧师家庭，18岁开始发表数学论文，19岁巴塞尔大学毕业，是约翰·伯努利的学生，但他的工作很快就超过了老师。1733年领导俄国彼得堡科学院高等数学研究室，一生为人类留下886篇科学著作或论文，是古今最多产的作家，所以人称欧拉是数学界的莎士比亚。他的论文于1911年开始出版全集，需要出100大卷以上。与高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)齐名而被公认是近世三大数学家。几乎数学的每个领域都留有欧拉的足迹。他的文章表达得轻松易懂，总是津津有味地把他那丰富的思想和广泛的兴趣写得有声有色，法国物理学家阿拉哥(Arago)谈到欧拉举世无双的数学才能时说："他做计算和推理毫不费力，就像人们平常呼吸空气或雄鹰凭空展翅翱翔一样。"

他在科研中因观测太阳时间过长而使右眼失明，1766年左眼也瞎了！在双目失明的17年当中，只凭记忆和想像加上他人帮助把他的口授笔录下来，完成了众多科学成果著述。

欧拉对数学教育影响之大超过任何人，他的三部教材《无穷小分析引论》、《微分学》和《积分学》犹如初等数学中欧几里得的《几何原本》，有句老话说得准：自1748年以后，所有微积分教科书，基本上都是抄袭欧拉的书，或者抄袭那些抄袭欧拉的书。他的三部大作，把前人关于微积分的发现加以总结定型，并且充满了欧拉自己的见解。

欧拉是彼得堡科学院院士和柏林科学院院士；除数学之外，还深谙文学、生物学、医学、地理以及他那个时代的全部物理学。不过他不擅辞令和口才，和伏尔泰在腓特力大帝宫廷里多次辩论总是输家，他一生心平气和，生活安静平淡，是 13 个孩子的慈父，他是图论、拓扑学、变分法、复变函数论和流体力学的开山鼻祖。

3.4 图是什么

图(graph)这个字在我们这里与平日说的工程设计图、美术图画等所用的图字含义不同；图是一个数学名词，直白而言，所谓一个图是指在纸上画了 n 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，这些点的位置可以任意选定，则称 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为顶点集合，把 V 中的一些顶对用曲线或直线段连接，这些连线的曲直长短并不计较，设这些连线为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$，则称 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 为边集合，顶集与边集作为一个整体结构，称为一个图，记成 $G(V,E)$。

例如七桥问题中的图 3-2 就是一个图 $G(V,E)$，其中 $V=\{A, B, C, D\}$，$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$，$e_i$ 就是第 i 座桥，图 3-2 中用数字 i 表示之，$i=1,2,\cdots,7$。为了明确 V 是 G 的顶集，有时把 G 的顶集写成 $V(G)$，$E(G)$亦相似理解为 G 的边集。

把图上的每边都加上表示方向的箭头，则称此图为有向图，每边皆无方向者为无向图，一些边有向另一些边无向的图叫做混合图。例如七桥图图 3-2 是无向图，而图 3-4 中的图是有向图。

在有向图中，一条有向边箭头所指的顶叫做该边的头，此边另一端点叫做该边之尾，例如图 3-4 中㉚是顶，边⑯→㊽中，⑯是尾，㊽是头。

在无向图中，边的两个端点称为邻顶，每个顶都与其余的顶相邻时，称该图为完全图，意指把一个正多边形的对角线完全画出的

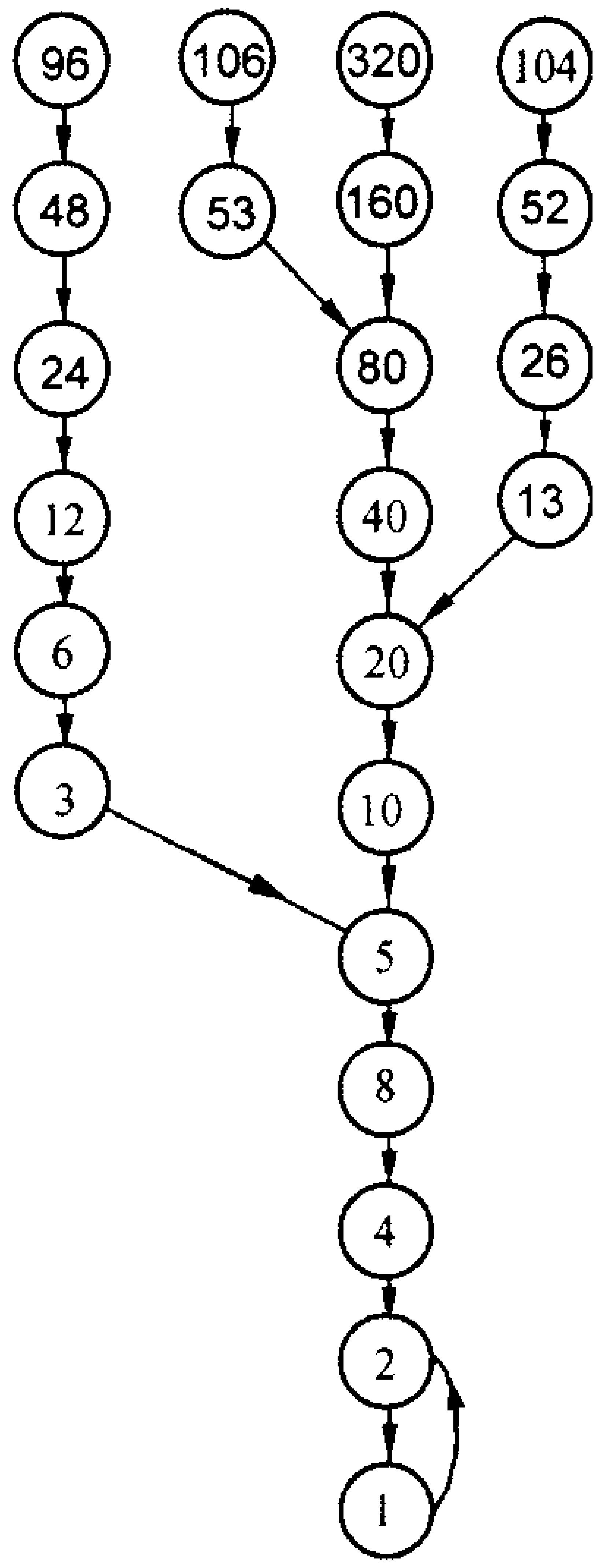


图 3-4

图;如果把$V(G)$划分成X与Y两个非空子集,X中每对顶不邻,Y中每对顶不邻,则称此图为二分图,意指例如人群划分成男女两性,仅在异性间结对儿跳舞,如果X中的每个顶皆与Y中每顶相邻,则称此二分图为完全二分图,意指每女与每男都全跳过舞。完全图记为K_n,n是顶数,完全二分图记为$K_{m,n}$,m,n分别是X与Y中顶数。例如图3-5中画的是K_5,图3-6画的是$K_{3,3}$,其中●顶组成X集,○顶组成Y集。

把图看成一个橡皮绳结成的网,可以随意拉伸摆布,这时,如果两图可以做到完全重合,即双方顶对应地两两重合,边对应的两两重合,则称两图全等或同构,记成$\cong$。例如图3-5中$G_1\cong G_2\cong G_3\cong K_5$,图3-6中$G_4\cong G_5\cong G_6\cong K_{3,3}$。

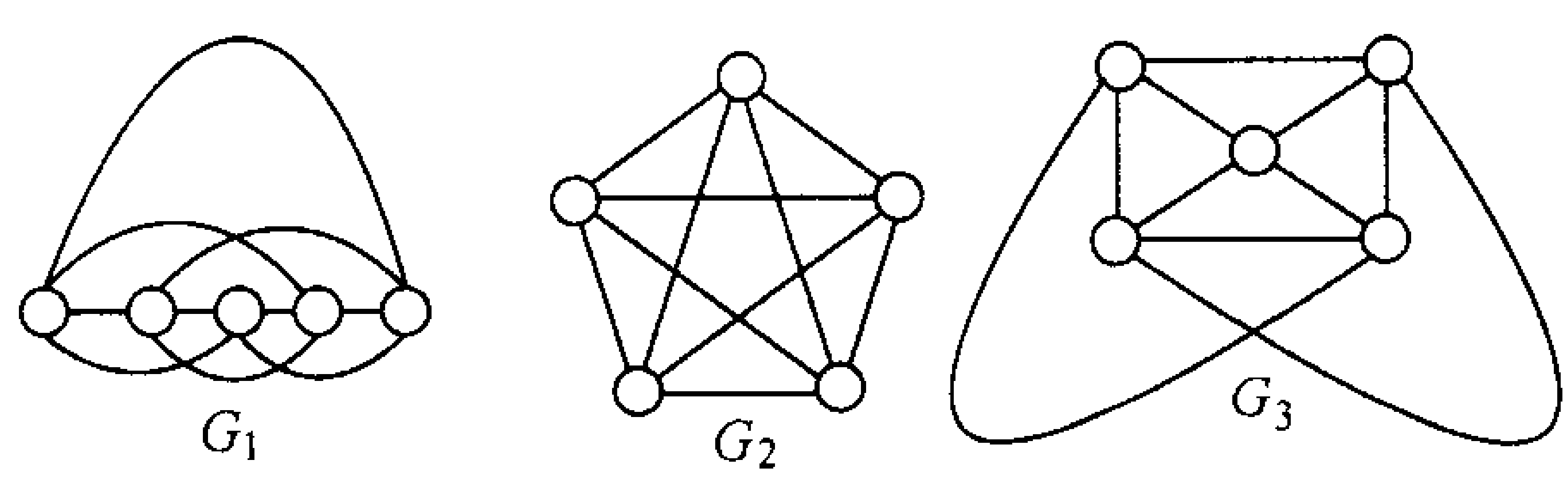


图 3-5

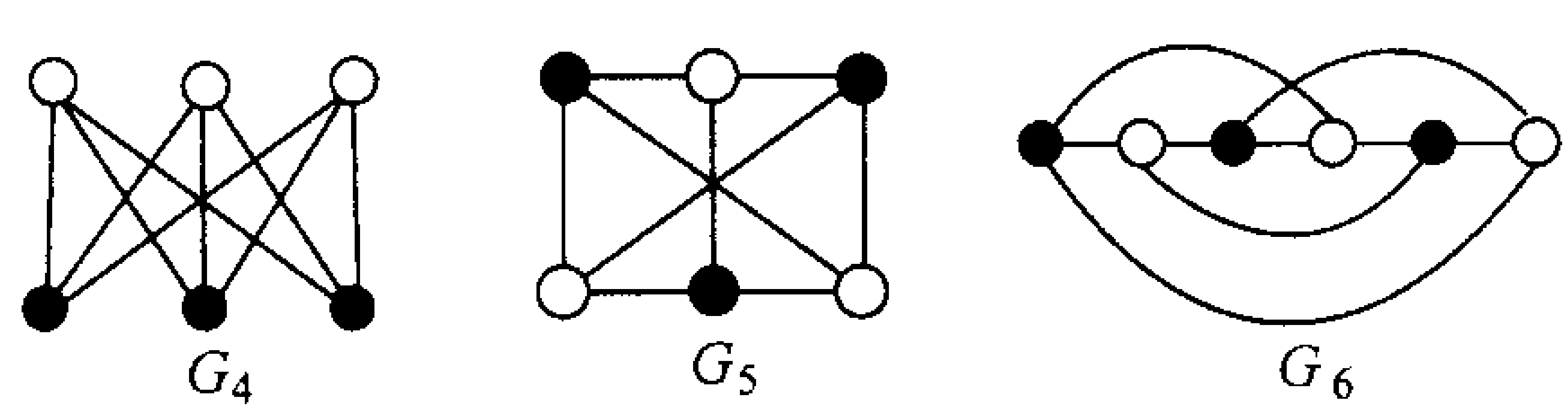


图 3-6

3.5 两个令人失望的猜想

(1) 乌拉姆(Ulam)猜想

G_1, G_2 是两个图, $V(G_1)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $V(G_2)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $n\geqslant 3$, 且 $G_1-v_i\cong G_2-u_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $G_1\cong G_2$, 其中 G_1-v_i 是从 G_1 中删去顶点 v_i 及与 v_i 相关联的边所得之图。

乌拉姆猜想的实际模型是:两张相片,用左手捂住左边那张相片的一部分,右手捂住右边那张相片的相应部分,例如都捂住左眼,能看到的相片的大部分形象一致,再用左右手分别捂住两相片的另一对相应部分(例如右耳),结果能看到的相片的大部分仍然一致,如此轮番地观察各次相应的暴露部分,都会看到相同的形象,则谁都相信两张相片是同一人或孪生兄弟的留影。

乌拉姆猜想是 1929 年提出的,也许正因为它过于直观可信,证明反而十分之难,又不能拿它当公理来对待,这就给数学家们出了一道难题,很多知名数学家都无法解决这一猜想! 虽然它未必难到令人绝望的程度,但想用手和笔轻易写出其证明,恐怕目前还是不现实的。

(2) $3x+1$ 问题

20 世纪 30 年代汉堡大学的卡拉兹(Callatz)提出一个猜想:

$x_0=n_0$, n_0 是自然数,若 n_0 是偶然,则取 $x_1=\frac{x_0}{2}$,若 n_0 是奇数,则取 $x_1=\frac{3x_0+1}{2}$; x_1 是偶数,则取 $x_2=\frac{x_1}{2}$, x_1 是奇数,则取 $x_2=\frac{3x_1+1}{2}$,如此进行,则到某一步, $x_k=1$。

东京大学的 N. 永内达(Nabuo Yoneda)用计算机检验了所有不超过 $2^{40}\approx 1.2\times 10^{12}$ 的自然数,结果都符合卡拉兹的猜想。这个问题

在数学史上闹得沸沸扬扬，1950 年，卡拉兹在马萨诸塞州召开的世界数学家大会上向与会的数学家公布了这一问题，后来，耶鲁大学的师生纷纷讨论这一貌似初等的猜想，但谁也证明不了它，弄得很多学生不专心上课，一心冲击 $3x+1$ 问题，有人戏称抛出这个“鬼猜想”的人是蓄意延缓美国数学教学与研究工作的一个阴谋。著名的图论学家厄尔多尔(Erdös)指出：“数学还没有发展到能解决这个问题的水平。”

如果把一批自然数放在最高层，用 $3x+1$ 问题的规则算出第二层的值，继而算出第三层的值，每层的㊫都是顶，甲数算出乙数时，则在图上画有向边㊙→㊁，得到的有向图称为卡拉兹有向图，图 3-4 就是一个卡拉兹图；$3x+1$ 问题即猜想说卡拉兹图的最底层是顶①。

3.6 握手言欢话奇偶

(1) 晚会上大家握手言欢，握过奇次手的人数一定是偶数

事实上，让参加晚会的每个人都报告出自己握过手的次数，设参加晚会的人为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，他们分别报告说握过 $d(v_1), \cdots, d(v_n)$ 次手，则 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 是偶数，这是因为每当有两人握手，则他们对总和 $d(v_1)+\cdots+d(v_n)$ 恰提供了数值 2。不妨设 $d(v_1), \cdots, d(v_n)$ 中 $d(v_1), \cdots, d(v_k)$ 是奇数，$d(v_{k+1}), d(v_{k+2}), \cdots, d(v_n)$ 是偶数，则 $d(v_{k+1})+d(v_{k+2})+\cdots+d(v_n)$ 是偶数，于是 $d(v_1)+\cdots+d(v_k)$ 也是偶数，而 $d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_k)$ 每个皆奇数，所以它们的个数不能是奇数，不然其总和得不出偶数，即 k 是偶数，从而证明了握奇次手的人数是偶数。

若把 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 视为一个图的顶集，仅当 v_i 与 v_j 握手时，在 v_i 与 v_j 之间加一边 v_iv_j，则得到一个图 $G(V, E)$，v_i 握手的次数即与它关联的边的条数，我们称 $d(v_i)$ 是 v_i 的“次数”或“度数”，于

是由上述论证知

$$d(v_1)+\cdots+d(v_n)=2\varepsilon \tag{3.1}$$

其中 ε 是$G(V,E)$的边数。公式(3.1)是 Euler 1736 年给出的。从此还可以得出奇次顶的个数是偶数。

(2) 碳氢化合物中氢原子个数是偶数

以每个原子为顶，每条化学键为边，构成一个图，在碳氢化合物中碳是四价，氢是一价，故只有“氢原子顶”是奇次的，所以这些奇次顶个数是偶数，即碳氢化合物中氢原子个数是偶数。

(3) 是否有这样的多面体，它有奇数个面，每个面有奇数条棱

假设有这种多面体，以其每个面为顶，使当两面有公共棱时，在此二相应的顶间连一边，构成图 $G(V,E)$，于是 $V(G)$中元素个数是奇数，而且每个 $d(v_i)$皆奇数，$v_i\in V(G)$，与奇次项个数是偶数相违，可见没有奇数个面每面奇数条棱的多面体。

(4) 两个人或两人以上的人群中，必有两个人在此人群中的朋友数一样多

以人为顶，仅当二人为朋友时，在此二人之间连一边，得一“友谊图”$G(V,E)$，设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，不妨设各顶的次数为 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_n)$，如果等号皆不成立，即

$$d(v_1)<d(v_2)<d(v_3)<\cdots<d(v_n)$$

①若 $d(v_n)=n-1$，则每个顶皆与 v_n 相邻，于是 $d(v_1)\geqslant 1$，$d(v_2)\geqslant 2,\cdots,d(v_n)\geqslant n$，与 $d(v_n)=n-1$ 相违。

②若 $d(v_n)<n-1$，由于 $d(v_1)<d(v_2)<\cdots<d(v_n)$，所以，$d(v_1)\geqslant 0,d(v_2)\geqslant 1,d(v_3)\geqslant 2,\cdots,d(v_n)\geqslant n-1$，与 $d(v_n)<n-1$ 相违。

至此知 $d(v_1)\leqslant d(v_2)\leqslant\cdots\leqslant d(v_n)$中至少有一处等号成立，即有两人朋友数一样多。

3.7 馋嘴老鼠哪里藏

一只老鼠想在 3×3×3 的立方体点心堆上咬出一条洞，这个洞通过 1×1×1 的 27 块小立方体的中心各一次，假设它是从大立方体的一角咬起的，它从一块1×1×1的小点心的中心沿与某侧面正交的方向向邻近的未尝过的小点心块咬去，只进不退，问它能否尝遍 27 块小点心后藏在大立方体中心?

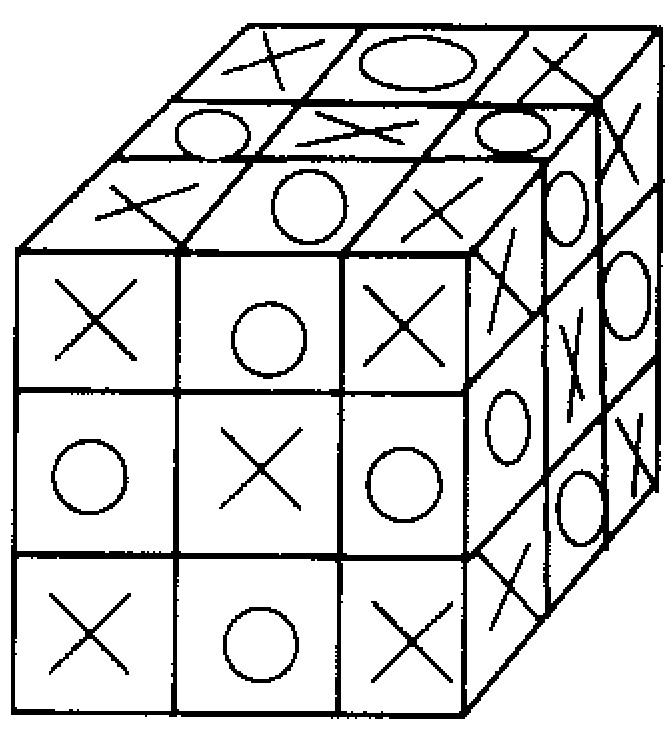


图 3-7

我们把图 3-7 所示的点心上 27 块小立方体分成两类，一类用○标志，一类用×标志。大立方体中心处那小块也标以○型；构造一图 $G(V,E)$，$V=X\cup Y$，其中 X 是×型小立方体结成的集合，Y 是○型小立方体组成的集合；仅当两个小立方体有公共侧面时，在两顶间连一边；再在老鼠开始咬的那块小点心与大立方体中心那块小点心之间加一条边，则 G 是 27 顶的二分图。

问题问的是 G 是否有含 27 个顶的圈。

所谓圈是指图上的一条闭曲线，其上的每顶仅通过一次即可把它画出。例如图 3-2 的七桥图上 $A1C3B4D6A$ 就是一个圈(其上还有别的圈)。

我们画二分图时，把 X 集的顶画在上层，Y 集中的顶画在下层，如果此图中有圈 C，设 $x_0\in X$ 在 C 上，则从 x_0 出发沿 C 行走一定是(从 x_0 下沉，上升)，(下沉，上升)，…，(下沉，上升到 x_0)，可见 C 有偶数条边，即二分图中无奇数个顶的圈。

我们上述的“鼠洞图”G 是二分图，所以不会有含 27 个顶的圈，可见老鼠不可能藏在大立方体的中心，它只能吃遍点心后逃之夭夭或当场被擒。

顺着老鼠前进的路径看,它咬出的洞上通过的小点心块都是一次性的;一般地,在一个图上画一曲线,其起止顶点不同,且其上的顶皆通过一次,这一曲线称为图的一条轨道,记成 $P(u, v)$, u 与 v 是轨 P 的起止顶,一个图如果任二顶间皆有轨相连,则称其为连通图。

3.8 一辆车跑遍村村寨寨

我们把完全图的每边用红绿两种颜色之一任意染色,把红边擦掉(保留端点)得绿边图 G_1,把绿边擦掉得红边图 G_2, G_1 或 G_2 中可能有孤立顶或互相不连通的几"片儿",每一片作为一个子图都是连通的,上述 G_1 与 G_2 称为互补图,它们并在一起正好是原来的那个完全图;如上所说, G_1 或 G_2 不一定全是连通的,也可能全是连通的,例如在图 3-8(a)中的 G_1 与 G_2 都是连通图,图 3-8(b)中的 G_1 与 G_2 中 G_1 不连通, G_1 有三个连通片,其中一个是孤立顶。所谓连通片是一个不连通图的几个子图,它们每个都连通,彼此却不连通。

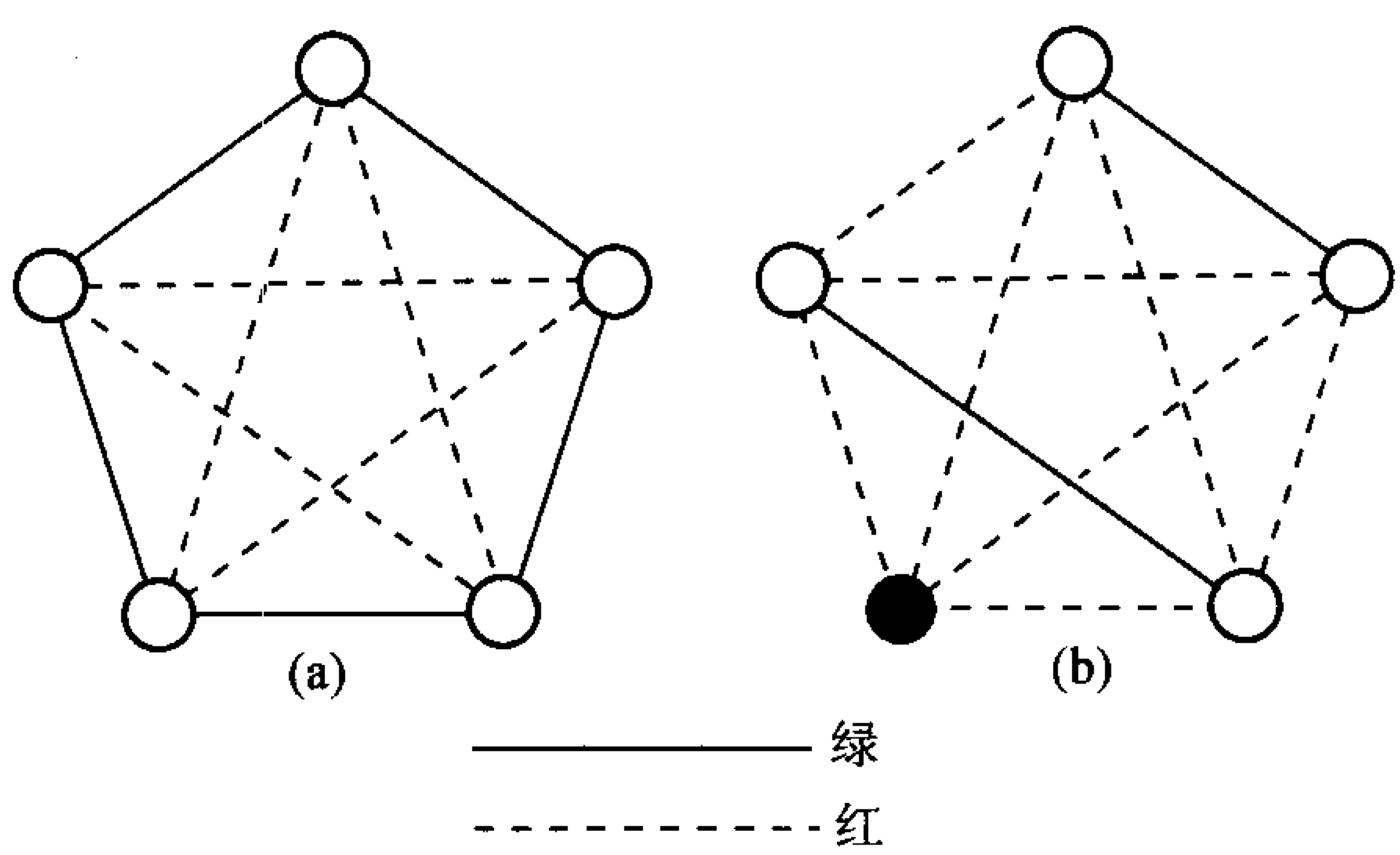


图 3-8

两个互补图之中,至少一个是连通的。

事实上,不妨设绿图 G_1 不连通,只欠证红图 G_2 连通。若这时 G_2 也不连通,设 $G_{21}, G_{22}, \cdots, G_{2\omega}$是 G_2 的全体连通片, $\omega \geqslant 2$, 任取

u, v 两顶,若 $u, v\in G_{2i_0}$, $i_0\in\{1, 2, \cdots, \omega\}$,再取 $w\in G_{2i_1}$, $i_1\in\{1, 2, \cdots, \omega\}$, $i_0\neq i_1$,则边 uw, $vw\in E(G_1)$,于是在绿图 G_1 中 u 与 v 有绿轨相连接,若 u, v 在 G_2 分属两个连通片,则边 uv 是绿色的, u, v 之间也有绿色轨相连接,总之对于任二顶 u, v,都有绿轨连接,故绿图 G_1 连通,与 G_1 不连通矛盾,故 G_2 连通。

如果 G 与 H 是两个图,且 $V(G)=V(H)$, $E(H)\subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的生成子图;互补的图都是相应的完全图的生成子图。

村镇若干,任两个村子之间都修筑了公路,有的两村之间是二级公路,有的两村之间是四级公路,规定汽车只在二级公路上行驶,拖拉机只在四级公路上行驶,问是否乘坐汽车或拖拉机中的一辆车即可到达每个村子?

答案就在上述论证之中,一辆车跑遍村村寨寨。

3.9 没有奇圈雌雄图

同学甲:你看我在纸上任意画了一些直线,把平面划分成若干区域,给你绿、红两色彩笔,能把每区皆染上一种颜色,且使邻区异色吗?

同学乙:当然能,不信你听我说。

事实上,我们以区域为顶,仅当二区域有公共边界时,在此二顶点间连一边,且使这一边与你画的直线只一个交点。得到了一个图 G;于是 G 中不会有奇数条边围成的所谓奇圈,这种图必然是二分图,也称雌雄图,即 $V(G)$ 可划分成两个子集 X 与 Y, X 中顶点两两不相邻(不相爱), Y 中顶两两不相邻(不相爱),这时,把 X 中顶皆染成红色, Y 中顶皆染成绿色,则邻顶异色,即邻区异色了。

同学甲:为什么没有奇圈的图一定是二分图呢?

同学乙:这一点很容易理解,例如四边形 $ABCD$ 是一个偶圈,即

有四条边(偶数条边)围成, $\{A, D\} = X$, $\{B, C\} = \overline{Y}$, 就识破它的“二分性”了, 如图 3-9, 事实上偶圈上的顶为 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$时, 令 $X = \{v_1, v_3, \cdots, v_{2k-1}\}$, $Y = \{v_2, v_4, \cdots, v_{2k}\}$, 即可把顶一分为二, 使 X 中的顶两两不邻, Y 中亦然。

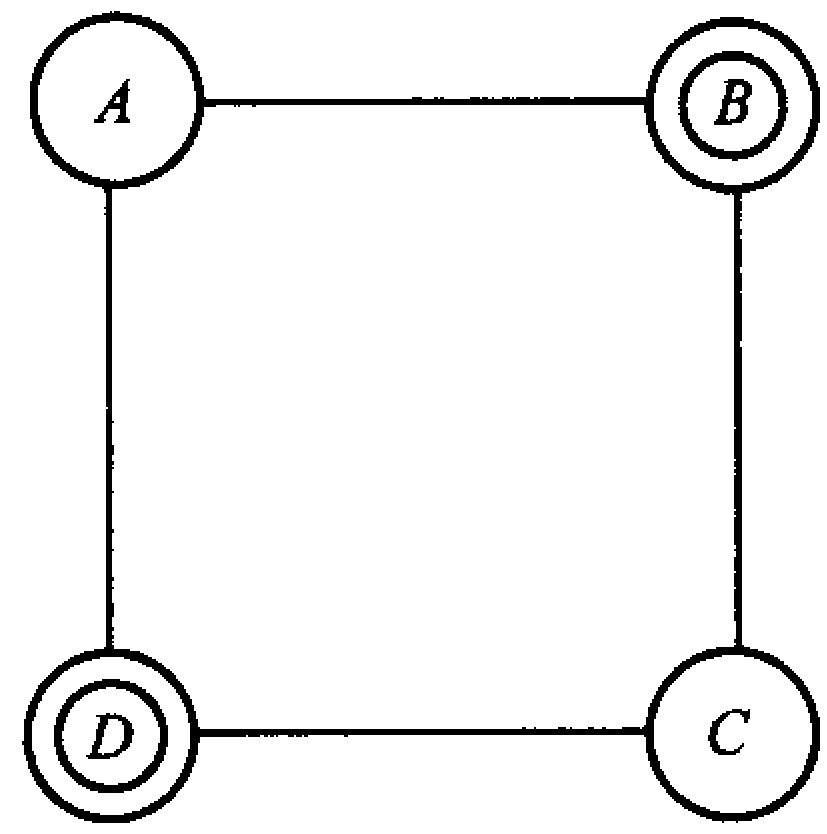


图 3-9

同学甲: 你这不算证明, 至多能算个说明。

同学乙:那就让我证明给你看。

我们约定 $d(u, v)$表示两顶 u, v 的距离, 即连接 u 与 v 的轨道中的边数最少者的边数。不妨设 G 是连通图, 任取 $v_1 \in V(G)$, 令

$$X = \{w \mid w \in V(G), d(v_1, w)\text{是偶数}\}$$

$$Y = \{w \mid w \in V(G), d(v_1, w)\text{是奇数}\}$$

则 $X \cup Y = V(G)$, $X \cap Y = \varnothing$, 任取 $u, v \in X$, 我们来证 u, v 不相邻, 设 $P_1(v_1, u)$是从 v_1 到 u 的最短轨, $P_2(v_1, v)$是从 v_1 到 v 的最短轨, 又设 u_1 是 P_1 与 P_2 上最后一个公共顶, 由 P_1 与 P_2 的最短性质, 故 P_1 上一段 $P_{11}(v_1, u_1)$与 P_2 上一段$P_{21}(v_1, u_1)$等长, 且是 v_1 到 u_1 的最短轨, 又 P_1 与 P_2 之长是偶数, 从而 P_1 上一段 $P_{12}(u_1, u)$与 P_2 上一段 $P_{22}(u_1, v)$有相同的奇偶性, 若 u 与 v 相邻, 则由 P_{12}、P_{22}及边 uv 围成的圈是奇圈, 与 G 中无奇圈矛盾, 故 X 中的任二顶不邻, 同理 Y 中任二顶不邻, 可见无奇圈的图是二分图。

前面我们已经讲过, 二分图无奇圈, 所以二分图的充分必要条件是无奇圈。

同学甲: 你还欠证明开始时以区域为顶的那个图 G 中确无奇圈啊!

同学乙:这个容易。如果那个图 G 中有奇圈 C, 由于 G 的每边当初造G 时是与你画的直线仅一个交点, 于是 C 与你画的直线一共

只有奇数个交点，但与这个圈相交的每直线与圈的交点是偶数个，矛盾！所以 G 中不会有奇圈。

同学甲：谢谢你的严格证明；看起来只靠直观和说明还不算是数学，数学的魅力出自它的严格性。

同学乙：数学的一个无可置疑的特征是，它实际上是一种不可比拟的严格语言！每个数学家都警惕地守卫着他们的科学的严格性，在不够严格的问题出现时，他们互相之间半点也不宽容。

3.10 树的数学

树木森林是生态平衡的基础，风调雨顺消灾繁荣的保障，世上找不出不喜欢树的人。现在我们数学地研究树的性质和应用，树在数学家的心目里是一个重要的数学关键词，但它的原型就是窗外一棵棵枝繁叶茂的绿色树木，我们只不过用大画家毕加索的名画《公牛》的创作手法进行特征提炼来定义树。

无圈连通图称为树，一次顶称为叶，每个连通片皆树的不连通图叫做林。

树有丰富的数学性质。

(1) 树有叶

考虑顶数不少于 2 的树 T，一方面，如果它没有叶，则是一个每顶次数至少为 2 的连通无圈图；另一方面，任取两顶 $u, v \in V(T)$，设 $P(u, v)$是从 u 到 v 的最长轨，则由 $d(v) \geqslant 2$，还有一条边 e 不在 $P(u, v)$上，e 的另一端 w 一定在 $P(u, v)$上，不然 $P(u, v)$还可以延长，与 $P(u, v)$的最长性相违；由 w 在 $P(u, v)$上可知，T 上有圈，与 T 是树相违，故 T 上有一次顶，即树 T 上有叶。

设 ε 是树 T 的边数，ν 是其顶数，则有公式

$$\varepsilon = \nu - 1 \tag{3.2}$$

公式(3.2)的证明很朴素：因为 T 有叶，设 v_1 是 T 的叶，从 T 上删除 v_1，则与 v_1 相关联的那条边也随之消失，于是 T 减少了一边一顶；$T_1 = T - v_1$ 仍是树，T_1 有叶 v_2，$T_2 = T_1 - v_2$，则 T_2 比 T_1 少一边一顶，如此继续往下揪叶，由于顶的有限性，揪去 $\nu - 1$ 个顶后，T 损失了 $\nu - 1$ 条边，这时只一个顶 v_ν 而无边了，所以 $\varepsilon = \nu - 1$。

从(3.2)可以推导出不止一个顶的非退化树 T 至少两个叶，而且恰有两个叶的树是一条轨。

事实上，若非退化树 T 只一个叶，则

$$2\varepsilon = \sum_{i=1}^{\nu} d(\nu_i) \geqslant 2(\nu - 1) + 1$$

$$2\varepsilon \geqslant 2(\nu - 1) + 1 = 2\nu - 1$$

$$\varepsilon \geqslant \nu - \frac{1}{2}$$

此与 $\varepsilon = \nu - 1$ 矛盾。所以 T 至少两叶。

若 T 只两个叶，其余顶的次数不小于 2，于是 $2\varepsilon = \sum_{i=1}^{\nu} d(v_i) = 2(\nu - 1)$，于是非叶顶次数之和为 $2\nu - 4 = 2(\nu - 2)$，可见非叶顶每个次数都不超过 2，即每个非叶顶次数恰为 2，故 T 是一条轨。

公式(3.2)很有用，下面是它的一些推论。

推论 1 e 是树 T 上任一边，则 $T - e$ 不连通。

事实上，T 有 $\nu - 1$ 条边，于是 $T - e$ 有 $\nu - 2$ 条边，但仍是 ν 个顶，且 $T - e$ 仍无圈，如果 $T - e$ 连通，则它是树，应有 $\nu - 2 = \nu - 1$，矛盾，所以 $T - e$ 不连通。

推论 2 T 是树，在 T 上添加一条边 e，则 $T + e$ 恰含一个圈。

T 满足顶数比边数多 1，又添一条边，则 $T + e$ 不满足公式(3.2)，所以 $T + e$ 不再是树，连通图 T 添加边后当然还是连通的，又不是树，所以 $T + e$ 上有圈；如果 $T + e$ 有两个圈，则 $(T + e) - e = T$ 上无圈；另一方面，$T + e$ 这两个圈都含 e，去掉 e 后，变成了一个大

圈，与 T 上无圈矛盾，所以 $T+e$ 上仅一圈。

推论3 烃 C_mH_n 中C是4价，H是1价，价键不构成回路，则对每个自然数 m，仅当 $n=2m+2$ 时，化合物 C_mH_n 才可能存在。

事实上，把碳、氢原子看成一个图 G 的顶，价键视为边，则此图 $m+n$ 个顶，又无回路，则是树，其边数是顶数减1，即边有 $m+n-1$ 条，另一方面，$\sum_{V\in V(G)} d(V)=4m+n=2(m+n-1)$，从而 $n=2m+2$，即 $n=2m+2$ 是 C_mH_n 存在的必要条件。

图论在化学上有大用处，有一门称为"分子拓扑学"的学科，就是用图论的方法研究化学分子结构的。

(2) 树是同顶数连通图中边数最少者

对于顶数相同的两个连通图 G 与 T，其中 T 是树，如果 G 也是树，则 G 与 T 的边数相等，都是顶数减1；如果 G 不是树，则 G 中有圈，从圈上删除边 e_1 后，$G-e_1$ 仍连通，这时 G 至少减少了一个圈，用删除圈上边的办法有限次，可得一个无圈连通图 $G_k=G-e_1-e_2\cdots-e_k$，即 G_k 是树，与 T 有相同的边数，而 G 比 G_k 的边多 k 条，所以 G 比 T 边多。

树上边边是桥。

所谓桥，是指连通图的一条边，删除它之后该图就不连通了。

3.11 一共生成几棵树

(1) 生成一棵树要做些什么

如果一个图 G 的生成子图是一棵树 T，则称 T 是 G 的生成树，也称为支撑树。

一个图 G 是连通图的充要条件是 G 有生成树。

事实上，因为树是连通的，若 G 有生成树，G 显然是连通图；反之，若 G 是连通图，前面我们已经做过，用删去 G 中圈上的边的办法

则可得到 G 的一个生成树。至此证明了图连通与该图有生成树等价。

但具体找一棵生成树时，却不能用在该图上从圈上删边的办法办，事实上，找出图上的圈绝非易事，下面我们模拟自然界中一棵树的生长过程，“仿生”地生成一棵支撑树：

①任取一顶 $v_1 \in V(G)$，其中 G 是连通图。

②把与 v_1 关联的边及其端点全染成绿色，得一小树 T_1。

③选 T_1 的一个叶 v_2，v_2 在 G 中的次数不小于 2，把与 v_2 关联的边中一端无色的一条边及其无色端点染成绿色得树 T_2。

④逐次依上述方式染绿一些边和顶，直至染绿了 $\nu-1$ 条边为止，其中 ν 是 G 的顶数，绿色子图即为 G 的一棵生成树。

在现代数学当中，把一组有穷的操作步骤叫做一个算法；我们不再把算法仅仅理解为算术或代数等运算法则了，还要承认有(例如上述求取生成树的)所谓行为算法。

(2) 完全图有几棵生成树

$\triangle ABC$ 的生成树共 3 棵，见图 3-10。

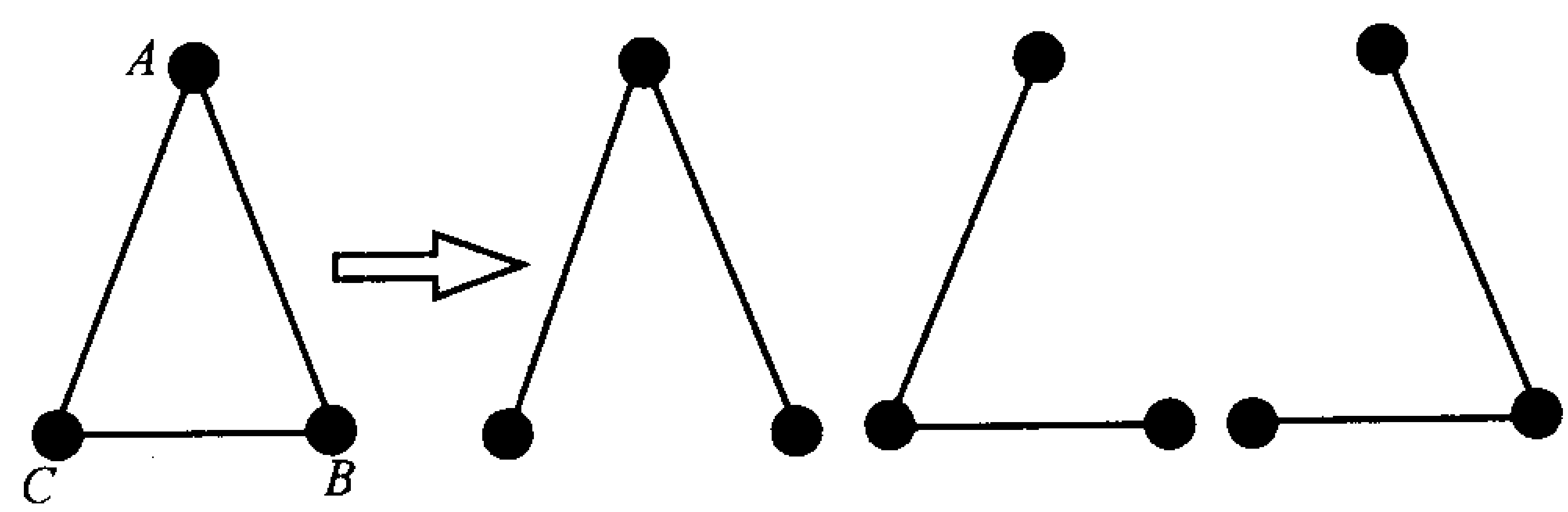


图 3-10

K_4 的生成树共 16 棵，见图 3-11。

请读者动手画出 K_5 的所有的生成树。

我们经验地归纳一下：K_3 的生成树个数是 $3=3^{3-2}$，K_4 的生成树的个数是 $16=4^{4-2}$，猜想 K_5 的生成树个数为 $5^{5-2}=125$ 个，K_6 的

生成树则有 $6^{6-2}=1296$ 个。对一般情形,数学家凯莱(Cayley)证明了 K_n 生成树的个数为

$$\tau(K_n)=n^{n-2}$$

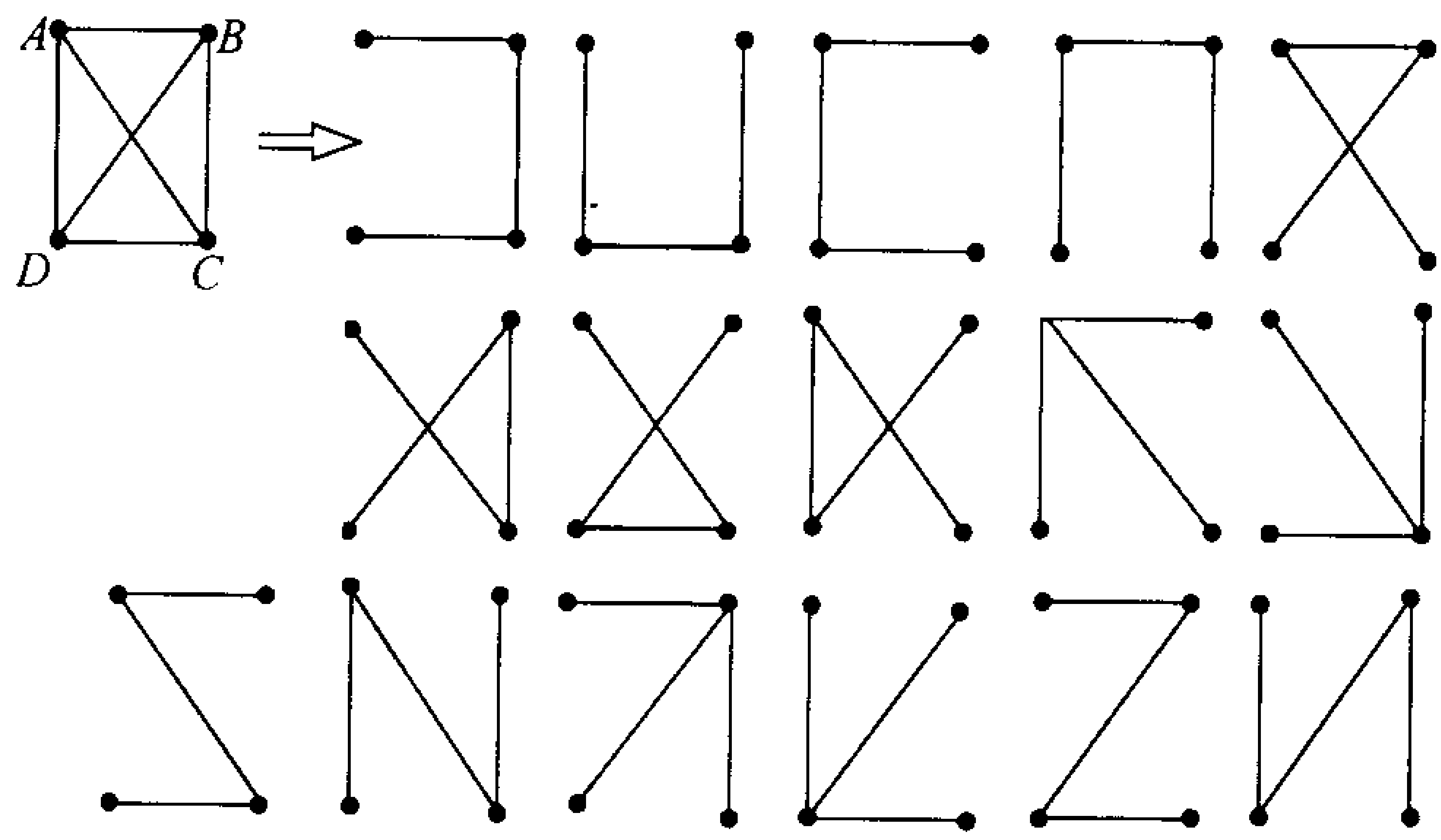


图 3-11

于是 $\tau(K_{10})=10^8$,一个小小的十顶图,竟有一亿棵不同的生成树。如果有人要求我们画出 K_{10}的全体生成树,每页纸上画十棵,需要一千万张纸,我们哪有这么多钱去买这么多纸! 我们哪有这么多工夫去画这么多树! 我们已经领教了一个图中所含的信息量是多么丰富。

3.12 生成一棵最好的树

今欲修筑连通 n 个城镇的公路网,已知各城之间的公路段之造价,设计一个筑路选线方案,使得总造价最低。

这个实际问题的数学模型是以各城为顶构作一图,当两城之间可以筑路时,在两城之间连一边,再以此段路的造价为该边之"权",于是得到一个加权连通图 $G(V,E)$,我们的任务是求 G 的一棵在其全体生成树当中总权最小的生成树。

上面我们已经讲过,一个不大的图的生成树的个数也可以是一

个不可捉摸的天文数字，例如 100 个顶的完全图的生成树的个数竟是个 197 位数！如果先求出一切生成树，再从中挑选权重最小者，这种办法只有愚公才会采用。下面我们给出一种有效快捷的算法，来求取任一连通图的权最小的所谓最优生成树，指导思想是逐次删除 G 的权最重的非桥边：

①在 G 中取权最大的边 e_1，仅当 e_1 为桥，把 e_1 染成绿色，令 $G_1 = G - e_1$。

②在 G_1 中取权最大的边 e_1，仅当 e_2 是 G_1 某连通片的桥时，把 e_2 染成绿色，令 $G_2 = G_1 - e_2$。

③反复上述过程，直到得到一个绿色子图 T，T 即为 G 的最优生成树，见例图 3-12，其中粗实线是绿色的最优生成树之边；最优生成树总权重为 9。

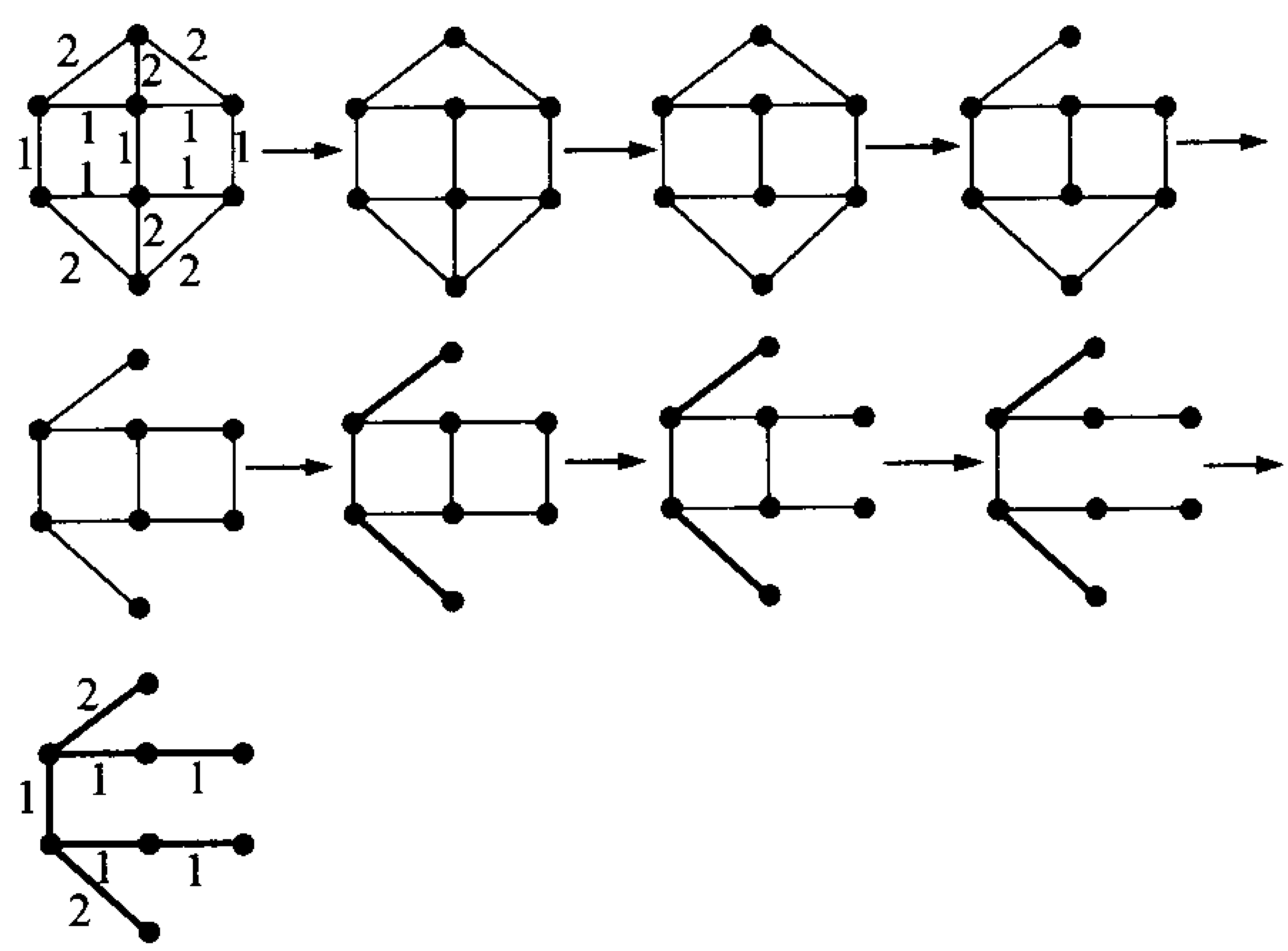


图 3-12

3.13 树上密码

收报机滴滴作响，我军收到司令部来电，电码抄收如下

11101111010010101000000100010101000 0101

敌军可能也同时收到这一电码,但没等敌方破译出我方密电内容,我军已行动在先,一举活捉了敌军司令,原来我司令部的保险柜中有一张树密码图如图 3-13, v_0,是树根,向下生长每当分叉时,恰分成两叉,且左标 0,右标 1,这两个生出的顶点称为兄弟,在它们上方的分叉顶称为它俩的父亲。它有 8 个叶,从左到右依次是 a, f, g, h, i, n, x, z,从根到 a 叶的唯一轨上的码为 000,称为此叶的前缀码,写成 $a=000$,于是 $f=001$, $g=010$, $h=011$, $i=100$, $n=101$, $x=110$, $z=111$。所以从此树上唯一确定出电码译文为

Zhixing A fangan

执行 A 方案

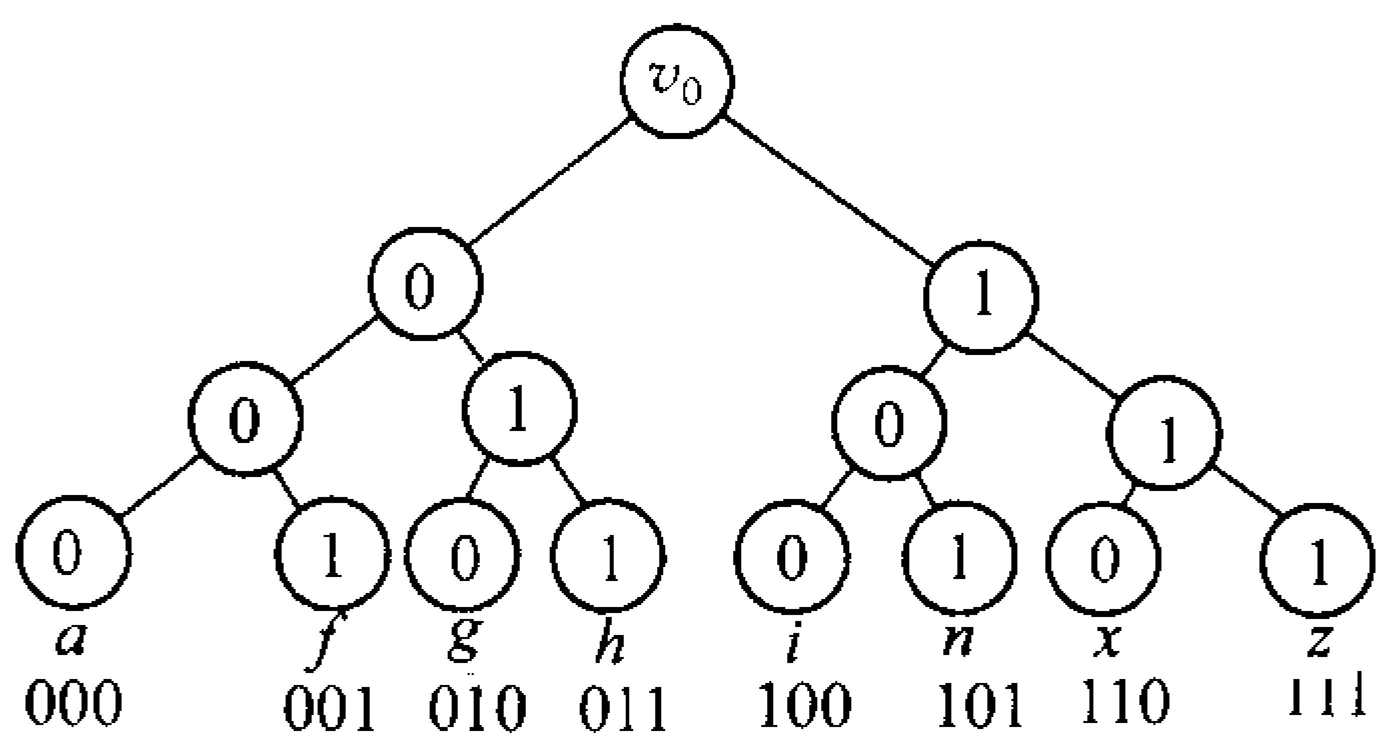


图 3-13

如果画一棵有 26 个叶的二叉树,则每个拉丁字母 $a, b, c, \cdots, x, y, z$ 皆有确定代码,于是每句话都可变成 $0-1$ 电码。

可以看出 26 个叶的二叉树的个数非常之多,对方是很难搞清我们用的是哪一个二叉树发的报,进而也就不易破译我方密码了。以图 3-13 为例,还可把例如最右侧的两个叶移到最左侧的那个叶的下方,作为最左侧那个叶分叉出的两个儿子,变成图 3-14。

用图 3-14 抄出的电码为

110101010111000010000000100001000010000100

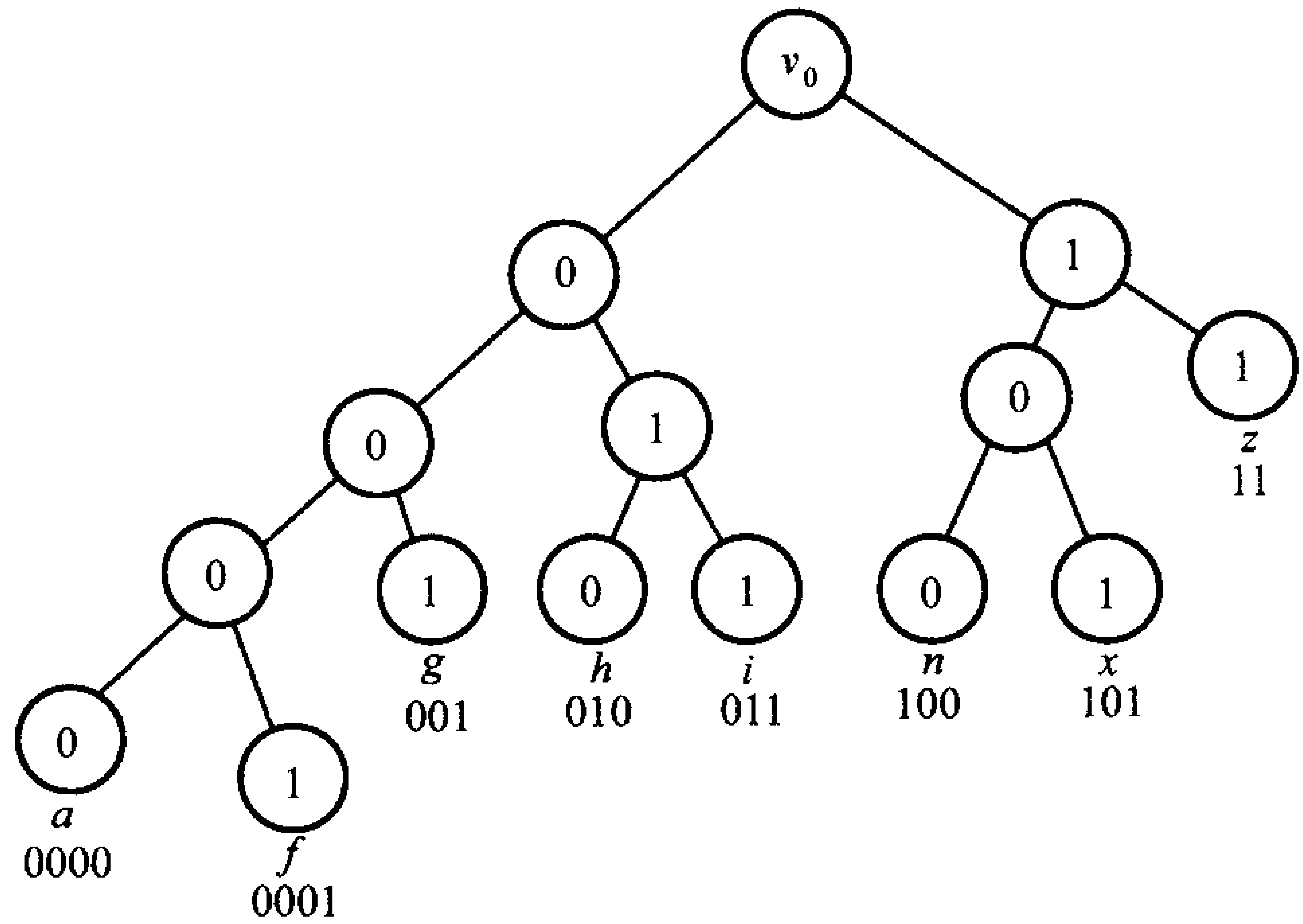


图 3-14

我方仍可译出“执行 A 方案”，不过这次翻译要用图 3-14，用哪个二叉树发报和收抄翻译，我方要事先约定。

密码要具有己方易于翻译，敌方难以破译的特点。我们介绍的只是一种很简单的密码，在实际使用中，还必须再予“加密”才能增加保密性。历史上，由于密码被敌方破译而吃败仗的例子很多，例如第二次世界大战中，日军司令海军大将山本五十六偷袭中途岛美军的部署密码被美军破译，美军事先在中途岛海面设下埋伏，一举击沉日军“赤城”、“加贺”、“苍龙”、“飞龙”四艘航空母舰，日本海军从此一蹶不振。之后，山本五十六到南太平洋督战的密电又被美军破译，他的专机被美军准备好的大批战斗机截去，山本葬身鱼腹，结束了他罪恶的一生。

保密通信自古有之，相传安徽省凤阳县的农民朱元璋等人于中秋节前夕把“杀鞑子”的纸条包在月饼里，号召各家各户杀掉统治汉人的蒙族鞑子，后来朱元璋果真推翻元朝统治，建立了明朝，自称明太祖。又一传说云，北宋年间，辽国奸细王钦若打入宋朝内部“卧

底”，官至“枢密使”，辽国为了送密信给王时逃避路上盘查，竟把传书人的大腿切开，把密件腊丸塞入大腿的肌肉里，等腿伤痊愈后，再去宋朝，见到王钦若，此人把腿切开，把密件交王执行！ 当年人们的数学水平低，传输技术差，竟用这般落后乃至野蛮的方式来传递密件！

3.14 追捕逃犯

逃犯若干，在公路网上逃窜，问最少派几名刑警，才能保证把逃犯全部抓获归案？ 或曰纵横交错的河道中有大鱼若干条，渔翁最少要准备几张与河面一样宽的渔网，才能把这些鱼全捞上来？

我们把上述公路网或河道网视为一个无向图 G，所需刑警的最小值记为 $h(G)$。

如果 G 是一条轨道，只要一名持枪刑警从此轨的一端向另一端追捕即可，即 h(轨) = 1。

如果 G 是一个圈 C，则派一刑警在 C 上一个顶处堵截，这个圈已被切断成一轨，所以还需另一刑警参加追捕，即 h(圈) = 2。

如果 G 是星形图，即 G 是只一个顶不是叶的树，则一刑警在星的非叶顶处堵截，另一刑警逐条边进行追捕即可，即 h(星) = 2。

下面用捞鱼的语言来谈(更方便一些)，确知无鱼的边称为 0 型边，不知是否有鱼的边称为 1 型边。与一顶关联的边皆 0 型时，该顶处的渔网可以拿走用于他处，与一顶关联的边中只一条 1 型边，则可把该顶上的网沿此 1 型边拖至邻顶，以上两种动作称为在该顶上“起网”。

图 G 上添加一条边 e 后得 $G+e$，显然有 $h(G)\leqslant h(G+e)$。对于完全图 K_n，先从其一顶 v 用 $n-1$ 张网沿与之关联的 $n-1$ 条边拖至 v 的各邻顶，则这些边全成了 0 型边，且得到了由 1 型边组成的 K_{n-1}，这 K_{n-1} 上每顶处有一张网堵截，再拿一张网来，在此 K_{n-1} 上

逐条边拖捞一遍即可,由此可知 $h(K_n)\leqslant n$,而且

$$\delta(G)\leqslant h(G)\leqslant\triangle(G)+1$$

其中 $\delta(G)$ 与 $\triangle(G)$ 分别是 G 中顶的最小次数和最大次数。

下面着重讨论所谓"树上追逃",不妨设树 T 不是轨且 T 上无二次顶,$h(T)$ 的求法如下:

①把 T 的叶全删除得树 T_1,若 T_1 是一条轨或一个顶,止;否则执行②。

②用 T_1 扮演 T 的角色,执行①。

③反复执行①与②,止时,若被删过叶的树共 k 棵,则 $h(T)=k+1$。

例如图 3-15 上可以给出 T_0 上具体的追捕过程。

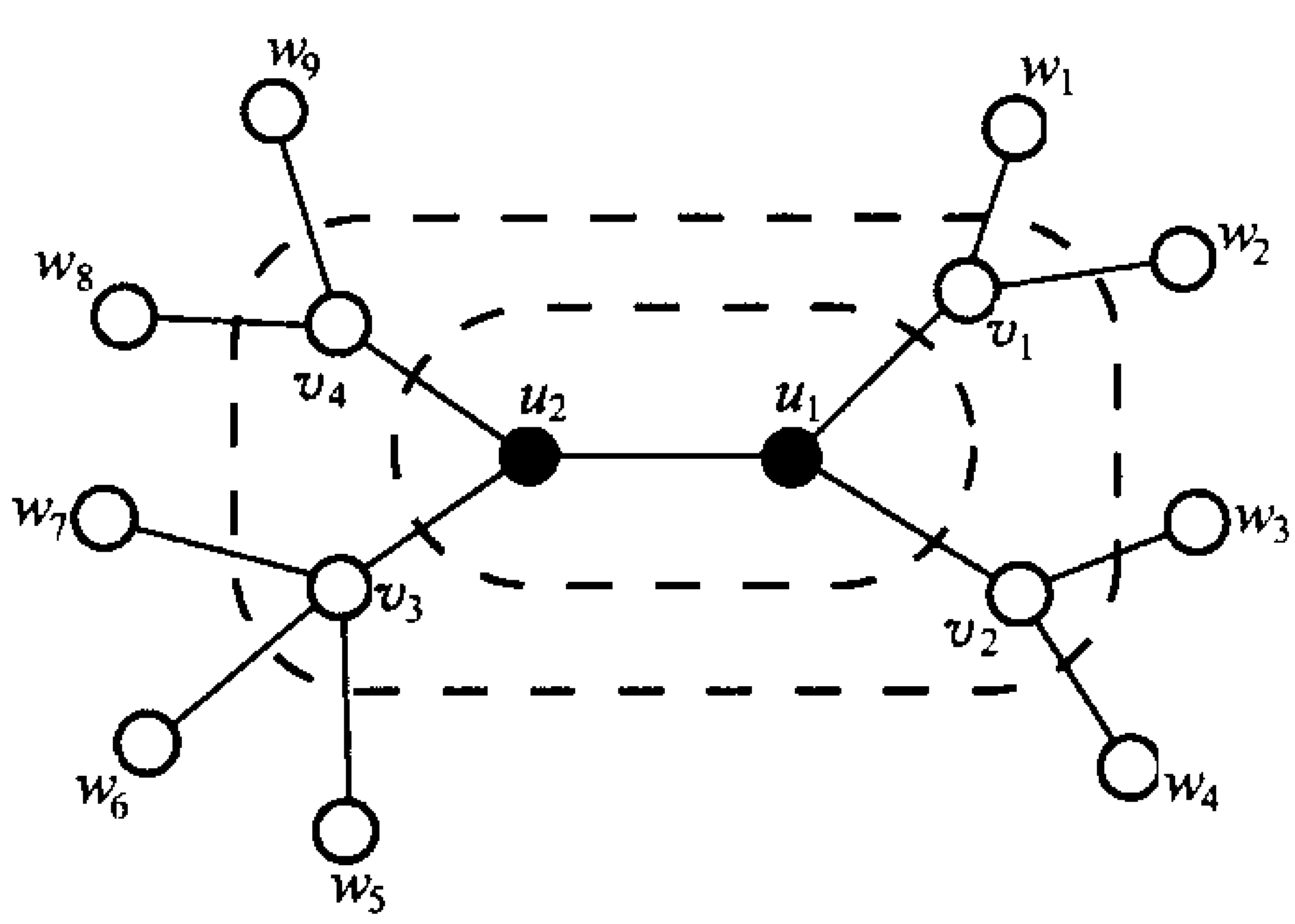


图 3-15

第一批删除的叶是 $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9$,是沿用虚线的那个较大的圈子把它们剪掉的;第二批删除的叶是 v_1, v_2, v_3, v_4,是沿较小的虚线圈子把它们剪掉的;至此得一轨 u_1u_2,止,于是 $h(T_0)=2+1=3$,即用三张网即可把此树状河道中的大鱼全部捞出。

捕捞过程是:在 u_1 处截一网,在 v_1 处截一网,再用第三张网在边 v_1w_1, v_1w_2 上拖网把 v_1w_1, v_1w_2 变成 0 型边;这时 v_1 起网,把

截在那儿的网拖至 u_1 处，u_1v_1 变成零型边，u_1 处留下一网堵截，v_2 处插一网堵截与上面过程相似地把 $v_2w_3v_2w_4$ 变成 0 型边，继而把 u_1v_2 变成 0 型边；这时把 u_1 处的网拖至 u_2，u_1u_2 变成 0 型边；从 u_2 分叉出去的枝杈上的捕捞过程与上面类似进行，用三张网就完成了捕捞全过程。

直观地，$h(T)$等于剪叶时的“虚圈”个数加 1。

如果 G 不是树，则 G 上有圈，于是可先在圈的一顶上堵一网，这时此圈被破，如此把全部圈破掉后，得到的是树或林，再用上面对树的捕捞方法进行。破圈时可以先用求取最优生成树的算法(设每边权皆 1)求得一个生成树，把破圈的网插在每条无色边(树是绿边)的一个端点上，且使得用网最少即可，不过这一方法用的总网数只是 $h(G)$的近似。

3.15 乱点鸳鸯谱

开学之初，全班同学排座位，同桌至多坐两位同学，可能出现每张桌子都有两位同学，也有可能有一些桌子只安排一位同学。这正是数学上匹配与许配概念的原始模型之一。我们把有同桌同学的桌子组成的集合称为匹配集合，简称匹配。

把实际模型概括抽象后得出下面的匹配概念，它是离散数学的重要内容。

所谓图 G 的一个匹配，是指边子集 $M=\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}\subseteq E(G)$，其中任两边无公共端点，匹配边形象地称为“对儿集”或“鸳鸯集”，如果 G 中已无匹配 M'，使得 M' 中的边数比 M 的边数多，则称 M 是 G 的一个最大匹配；匹配 M 中一条边的两个端称为在 M 中相配，每个端点称为被 M 许配；把 G 的每顶皆许配的匹配称为完备匹配。

(1) K_{2n}与$K_{n,n}$中完备匹配的个数

K_{2n}中任一顶有 $2n-1$ 种被许配的方式，选定一种许配后，剩下的尚未许配的顶有 $2(n-1)$个，它们在一个 $K_{2(n-1)}$中，相似地$K_{2(n-1)}$中的任一顶有 $2n-3$ 种许配方式，如此递推知 K_{2n}中不同的完备匹配的个数是$(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1=(2n-1)!!$ 个。

例如 K_{18}中有 34459425 个不同的完备匹配。

对于 $K_{n,n}$，由于其任一顶有 n 种许配方式，一旦选定一种许配后，还有 $2(n-1)$个顶未被许配，这 $2(n-1)$个顶在 $K_{n-1,n-1}$中，递推地可知 $K_{n,n}$中不同完备匹配的个数是 $n!$

例如 $K_{10,10}$中不同的完备匹配的个数有 3628800。

(2)树上完备匹配不超过 1 个

从上我们可知道，K_{18}，$K_{10,10}$这种不超过 20 个顶的图中，不同的完备匹配的个数竟有百万千万之多，但也有的图类中，完备匹配个数极少，例如任一树，其上至多一个完备匹配。

事实上，树 T 上若有两个完备匹配M_1 与 M_2，则从 $M_1\cup M_2$ 中删去 $M_1\cap M_2$ 中的边之后，所得的边子集不空，以这个边子集为边集，以这个边子集中边的端点组成顶集所成的子图(称为此边子集的导出子图)G 中每顶皆两次，故 G 中有圈，与 T 是树相违，所以 T 上不会有两个不同的完备匹配 M_1 与 M_2，至多一个完备匹配；无完备匹配的树当然不少，例如奇数个顶的树上必无完备匹配。

3.16 错装了信笺

某人给六个人各写一封信，又写好六个信封，问有多少种可能，使得向信封里插入信笺时，每封信的信笺与信封上写的收信人都不相符?

设 x_i 是信笺，y_i 是信封，x_i 与 y_i 相符，$i=1,2,\cdots,6$，以 x_i，y_i 为顶，仅当 x_i 与 y_i 不相符时，在 x_i 与 y_i 之间连一边，得一二分图 G，见图 3-16。

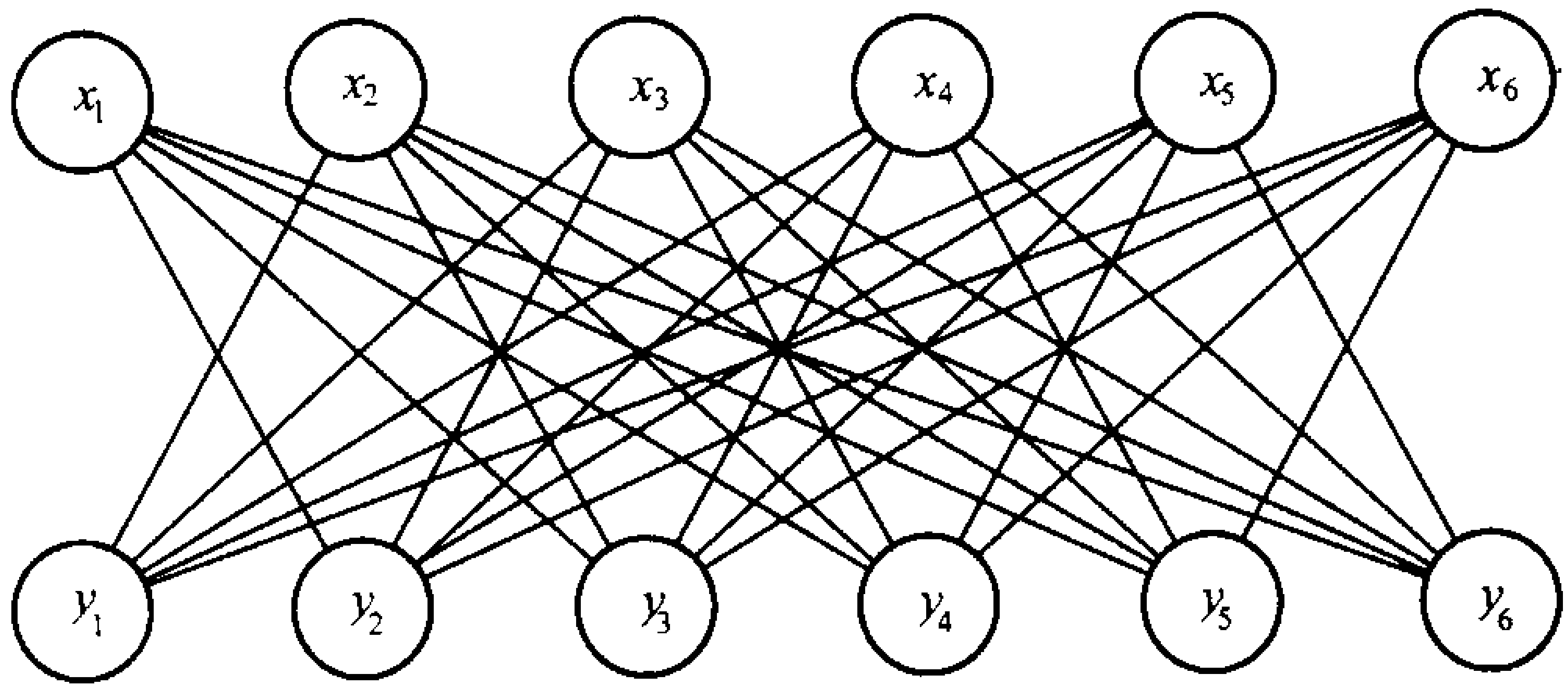


图 3-16

问题化成图 3-16 中有多少完备匹配,我们把完备匹配的个数记作 $\varphi(6)$, x_1 与 y_2 相配时,完备匹配的个数等于从 G 中删去 x_1 与 y_2 这两个顶之后得的图 $G_{x_1y_2}$ 中的完备匹配的个数,把这个数记成 $\psi(5)$;在 $G_{x_1y_2}$ 中,若 x_2 与 y_1 相配,则 $\psi(5)=\varphi(4)$,若 x_2 不与 y_1 相配,则 $\psi(5)=\varphi(5)$。于是 x_1 与 y_2 相配时,得到 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配,同理 x_1 与 y_j ($3 \leqslant j \leqslant 6$) 相配时亦有 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配,故

$$\varphi(6)=5[\varphi(5)+\varphi(4)]$$

同理 $\varphi(5)=4[\varphi(4)+\varphi(3)]$, $\varphi(4)=3[\varphi(3)+\varphi(2)]$, $\varphi(3)=2[\varphi(2)+\varphi(1)]$,而 $\varphi(2)=1$, $\varphi(1)=0$,故 $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=9$, $\varphi(5)=44$, $\varphi(6)=265$。即有 265 种错放信笺的可能。

一般而言,对于任意的 n 封信,全把信笺放错的可能有 $\varphi(n)=(n-1)[\varphi(n-1)+\varphi(n-2)]$ 种。因为 $\varphi(n)>(n-1)!$ 当有 11 封信时,错放的可能超过 3628800 种,每分钟错放一次,也要超过 6 万小时才能把所有可能都显示一遍,这当然是几乎不可能实现的事了。

3.17 瓶颈理论和婚配定理

(1) 瓶颈理论和双最定理

通过铁路把产地的商品发往市场,假设途中火车的运载不发生增减,每一路段单位时间的运量有一定限度,如何确定全路网上由产地到市场的运输方案,使得单位时间内运达的货物最多。

把铁路网视为一个有向图 G,产地 s 是始发站,$s\in V(G)$,市场 t 是终点站,$t\in V(G)$,每一路段 e 是 G 的一条有向边,其运量限度为 $c(e)$,如此加权 $c(e)$的有向图亦称一个有向网络。

设 $s\in S$, $t\in T$, $S\cup T=V(G)$, $S\cap T=\varnothing$,则尾在 S,头在 T 的边们形成的边子集记成(S, T),(S, T)叫做网络的"截",(S, T)中各边的容量 $c(e)$之总和称为截量,在一切截中,截量最小的截(S_0, T_0)称为瓶颈,(S, T)上的截量记成 $C(S, T)$,单位时间内运到 t 的净流量记成$F(G)$,则对任何截,任何运输方案

$$F(G)\leqslant C(S, T)$$

由此可知,当上式等号成立时,$C(S, T)$即最小截量,$F(G)$即单位时间的最大运输流量,于是有下面的重要结论:

瓶颈上的容量总和即是全路单位时间从始发站运往终点站的最大运输量。

或曰:最大流量等于最小截量。所以上述瓶颈理论亦称"双最定理"。

瓶颈理论是图论和经济管理当中的核心理论之一,它有许许多多精彩应用。匹配技术中的婚配定理就是它的一个推论。

(2) 婚配定理

城中每位小伙子都爱慕 k 位小姐,每位姑娘都爱慕 k 位小伙子,那么这些未婚青年都会与自己爱慕的人儿结婚。

这就是霍尔(Hall)婚配定理。它的数学模型是每顶皆为 k 次的二分图$G(V, E)$上必有完备匹配。

下面用瓶颈理论证明婚配定理是真的。

显然这些未婚青年,男女各半;事实上,由于 $k|X|=k|Y|=\varepsilon$,

其中 X 是小伙子集合，Y 是姑娘集合（G 中一顶的邻顶是该顶爱慕的人），$|X|$表示 X 的元素个数，ε 是G 的边数；所以$|X|=|Y|$。

我们设计一个相关的网络：

在 $G(V,E)=G(X\cup Y,E)$中添加两顶 s 和 t，把 G 中的边定方向，每边皆从 X 指向 Y；s 为尾，X 中每顶为头，添加$|X|$条有向边，t 为头 Y 中每顶为尾，添加$|Y|$条有向边；添加的有向边上的容量皆为 1，$G(X\cup Y,E)$中的边之容量皆为无限大，见图 3-17。

只欠证明：

①图 3-17 中的网络之最大流量即为 $G(X\cup Y,E)$上的最大匹配中的边数。

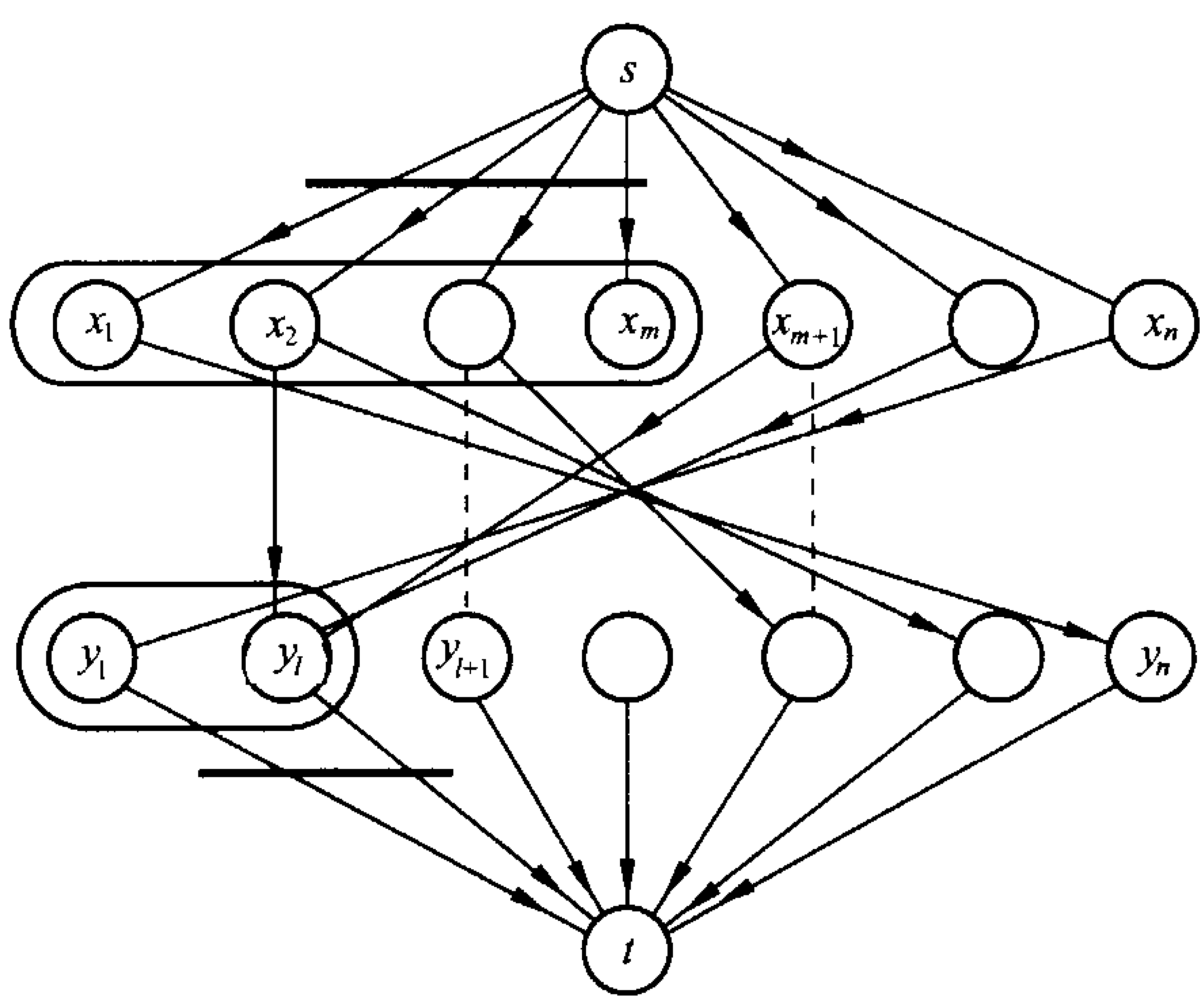


图 3-17

②图 3-17 上网络之最小截量为 n，其中 $n=|X|$。

如果证出①与②，则由双最定理，$G(X\cup Y,E)$上的最大匹配有 n 条边，即为完备匹配，就是说相配每对儿都是互相爱慕的人儿，而且没有未被许配的姑娘。

①若 M 是$G(X\cup Y,E)$中的最大匹配，对于 M 中的每条边

xy，通过有向轨 $sxyt$ 可从 s 向 t 运送 1 个单位的货物，可见最大流量 $F \geqslant |M|$。

因从 s 到 t 的有向轨皆形如 $sxyt$，若在 $sxyt$ 上已通过一个流量，则不会同时在 $sxy't$ 与 $sx'yt$ 上也运送一个流量，因为 x 顶与 y 顶同时中转的货物最多为 1(注意 sx 与 yt 容量仅为 1)，故 $G(X \cup Y, E)$ 中同时运送 1 单位货物的边们构成一个匹配，所以最大匹配 M 满足 $|M| \geqslant F$。

$|M| \geqslant F$，$|M| \leqslant F$，故只有 $|M| = F$。即最大流量就是 $G(X \cup Y, E)$ 中的最大匹配的边数。

②$S = s$，$T = X \cup Y \cup \{t\}$ 则 (S, T) 是一个截，即切断 (S, T) 中的所有边，则截断从 s 到 t 的运输，这个截就是一个最小截，即瓶颈。

因为 X 到 Y 的边容量为 ∞，所以这种边不在最小截中，如果 $(X \cup Y \cup \{s\}, \{t\})$ 是最小截，截量与 $(\{s\}, X \cup Y \cup \{t\})$ 的截量一致，都是 n，如果这两个截不是最小截，则最小截中的边，一部分以 s 为尾，另一部分以 t 为头。设它们是 $sx_1, sx_2, \cdots, sx_m$，$1 \leqslant m < n$，$y_1t, y_2t, \cdots, y_lt$，$1 \leqslant l < n$；若 $m + l < n$，我们来找矛盾。这时在 $G(X \cup Y, E)$ 中，$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的每个邻顶皆在 $\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 中，不然此最小截截不断由 s 向 t 的运输。又 G 中每顶皆 k 次，则与 $\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 各顶关联的边之总数至少 $k(n-m)$ 条，又 $l < n - m$，则 $\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$ 中各顶关联的边之总数多于 kl 条，这与 G 中每顶皆 k 次，l 个顶 $y_1, y_2, \cdots, y_l$ 的关联边恰 kl 条矛盾，至此知②成立，即 G 的最小截中恰 n 条边。

下面是婚配定理的一些具体应用

【应用 1】 署名问题。

数学杂志社悬赏征解八个问题，过了些日子，编辑部收到了每题的两个正确解答，16 个解答是由八人寄来的，每人寄来两道题的解答。编辑决定每题只发表一种答案，而且希望因为解答被发表而使

八人都得奖，这可能吗？

完全可以巧妙安排，使八人都得奖，事实上，以题目构成 X 集，投稿人构成 Y 集，当且仅当 $y\in Y$ 解答了 x_i，x_j 两题时，连 x_iy，x_jy 两条边，这样得到了每顶皆两次的二分图，由婚配定理，此二分图中有完备匹配 M，当 $xy\in M$ 时，对 x 题发表 y 的答案，则会使人人得奖。

至于如何求取二分图中的完备匹配，或怎样求网络中的最大流和瓶颈，有兴趣的读者可以参考《图论及其算法》(王树禾，中国科学技术大学出版社 1990 年版)的有关章节。

【应用 2】 碉堡选址。

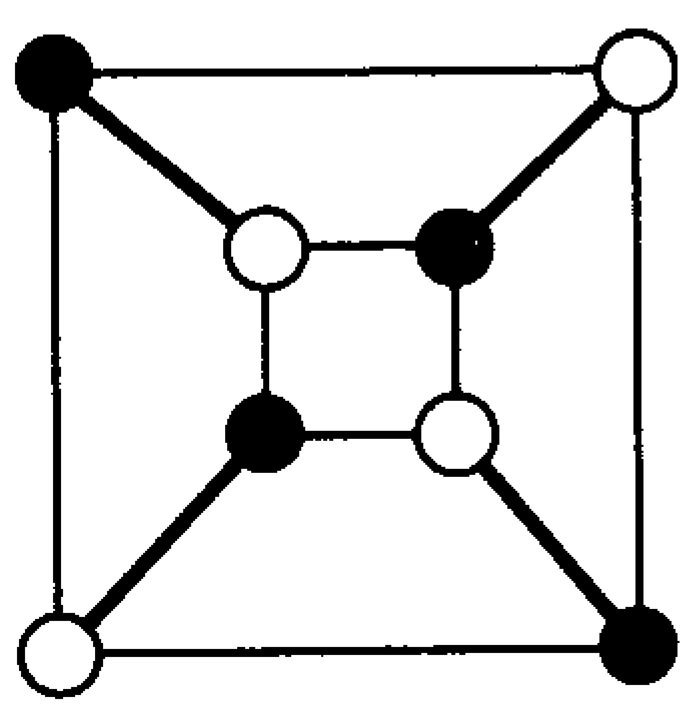


图 3-18

有一街区如图 3-18 所示，其中所有街道都是直线段，为控制巷战，我军最少应在哪些街口修筑碉堡，即可控制所有的街道？

以每个街口为顶点，每条街为边构成一个图 $G(V,E)$，G是每顶三次的二分图，四个○号顶组成 X 集，四个●号顶构成 Y 集，由婚配定理，G 中有完备匹配，例如四条粗实线即是一个完备匹配；在四个○型顶处修筑碉堡或在四个●型顶处修筑碉堡即可。事实上，这样做已经可以控制所有街道，因为 X 中的全体顶或 Y 中的全体顶关联的边包含二分图 G 中的所有边。但若再少修一碉堡，则不能控制全部街道，因为三个顶只能控制完备匹配中的至多三条边，完备匹配中至少还有一条边不能被三个顶中的任何一顶控制，可见我们的方案是最佳的，即碉堡数已最少，又能全面控制巷战。

【应用 3】 龟兔混合接力比赛。

一只龟与一只兔为一队，进行 100 米的接力比赛，每只兔认识 10 只龟，每只龟认识 10 只兔，龟兔们都希望和自己的相识者搭档组队，能否使 20 位运动员都如愿？如果能，若限制每对龟兔只能合作一

次，这种比赛最多能进行几轮？是否每对龟兔朋友都合作过？

龟兔们个个都能如愿以偿，事实上，以龟组成 X 集合，以兔组成 Y 集合，以 $X\cup Y$ 为顶集构作一个二分图 $G(X\cup Y,E)$，仅当龟兔相识时，在相应二顶之间连一边，则 G 是每顶皆 10 次的二分图，由婚配定理，G 中存在完备匹配 M_1，按 M_1 相配的方式组队进行第一轮比赛，把 M_1 的边从 G 中删除，得到每顶皆 9 次的二分图，其上有完备匹配 M_2，按 M_2 相配的方式组织第二轮比赛；可见，最多可组织 10 轮比赛。每对龟兔朋友都组队参加过比赛。

【应用 4】 16 棋子问题。

国际象棋盘上有 64 个格子，从中选出 16 个格子，使得每行每列含其中的两个格子；把八个黑子和八个白子放在这 16 个格子上，是否可以使得每行有一白一黑，每列也有一白一黑两个棋子呢？

答案是肯定的，以棋盘的每一行为一个顶，组成 X 集合，以每一列为一个顶，组成 Y 集合，构造一个二分图 $G(X\cup Y,E)$，仅当行与列的公共格子是选定的那 16 个格子之一时，在此二顶间连一边，此边用对应的那个“选定的格子”来标志，于是 $G(X\cup Y,E)$是每顶皆两次的二分图，由婚配定理，G 中有完备匹配 M_1，把 M_1 中的八条边对应的格子中各放上一个白子。把这八条边从 G 上删除，则得到一个每顶皆一次的二分图，有完备匹配 M_2，M_2 中的八条边对应的格子里各放一只黑子，这样每行每列都有一白一黑两个棋子。

3.18 中国邮路

邮政局一位邮递员选好邮件骑摩托车去投递，局长要求他把辖区内每个街道都要至少投递一次，且尽快返回邮局，请为这位邮递员设计一种投递路线。

上述问题就是中国邮路问题。这一问题由我国数学家管梅谷先

生于1960年首次提出并进行了研究，且引起了世界上许多数学家的兴趣。1973年，埃德蒙兹(Edmonds)和约翰逊(Johnson)对中国邮路问题给出了一种有效的解法。

与中国邮路问题的味道有些相似，但却比中国邮路问题难解得多的问题是下面所谓的货郎问题：

百货货郎担着挑子去卖货，他要把所有村子全走遍，再返回家中，试为这位货郎设计一条售货路线，使其行程最少。

货郎问题已经难倒了所有的数学家，看来离解决之日不知还有多少年代！

与货郎问题有密切关系，有趣又能解的一个问题是哈密顿周游世界问题：

1857年，爱尔兰著名数学家哈密顿(W. R. Hamilton1805～1865)发明了一种注册为"周游世界"的玩具，在正12面体的20个顶点上分别标注北京、东京、柏林、巴黎、纽约、旧金山、莫斯科、伦敦、罗马、里约热内卢、布拉格、新西伯利亚、墨尔本、耶路撒冷、爱丁堡、都柏林、布达佩斯、安亚伯、阿姆斯特丹和华沙，要求从以上20个遍布世界的大都市中某一个城市出发，沿正12面体的棱行进，每城只到一次，再返回出发地。

哈密顿把这项专利卖给一个玩具商，得酬金25个金币，但由于这个游戏的数学含量高，大多数数学素质欠佳的市民玩不好，所以销路不佳，但在数学史上，哈密顿周游世界的游戏与欧拉的七桥问题是两例标志性建筑，播下了图论诞生与发展的种子。

(1) 欧拉回路与欧拉行迹

在七桥问题中，每桥恰过一次再回到出发点实属不可能的事，但如图3-3所示，再修筑两座桥，则可以每桥恰过一次再返回出发点了。用图论的术语谈，即可以每边恰过一次再返回出发的顶，能做到这种旅游的图称为欧拉图，所行路线称为欧拉回路。如果从一顶出

发可以一次性地行遍所有的边，但终止于与出发顶相异的另一顶，则此所行路线称为欧拉行迹，有欧拉行迹的图可以“一笔画”。

欧拉图显然是连通的，而且由于每顶在欧拉旅游当中“出”与“进”的次数相等，所以每顶皆偶次，反之，若 G 是每顶皆偶次的连通图，则 G 必为欧拉图，事实上，由 G 是每顶皆偶次的连通图，则它没有零次顶（孤立顶），每顶次数至少为 2，于是 G 上有圈 C_1，从 G 上把 C_1 上的边删除得图 G_1，G_1 仍是每顶皆偶次，G_1 的有边连通片仍是每顶皆偶次的连通图，G_1 上有圈 C_2，把 C_2 的边从 G_1 上删除得 G_2，如此以往，有限次之后，得到了孤立顶 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，而 G 中的边全部删掉了，可见 G 是由无公共边的圈 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 并成的。由于 G 连通，所以 C_1 必与 $C_2, \cdots, C_k$ 中某一圈有公共顶，例如 C_1, C_2 有公共顶，则 $C_1 \cup C_2 = C_{12}$形成一个欧拉型回路，即从其上任一顶出发沿其上的边行进，每边恰通过一次即可返回出发的顶，同理 C_{12}与 $C_3, \cdots, C_k$ 中某圈例如C_3 有公共顶，于是 $C_{123} = C_{12} \cup C_3$ 是欧拉型的回路，如此递推知 $C_{123\cdots k} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_k$ 是G 的欧拉回路，即 G 是欧拉图。

从上述论证容易看出以下结论：

结论 1　G 是欧拉图的充要条件是G 是每顶皆偶次的连通图。

结论 2　G 是欧拉图的充要条件是G 是由两两无公共边的圈并成的连通图。

结论 3　G 可以一笔画的充要条件是G 是至多两个奇次顶的连通图。

在图 3-19 中，3-19(a)可以一笔画，而 3-19(b)不可能一笔画，因为 3-19(b)中有四个 3 次顶（在外围四个角上），而 3-19(a)中恰两个奇次顶，如果你有兴趣，请在 3-19(a)图上执行一笔画，一笔画即使可行，也不总是可以轻易完成的，需要动用一点小聪明。

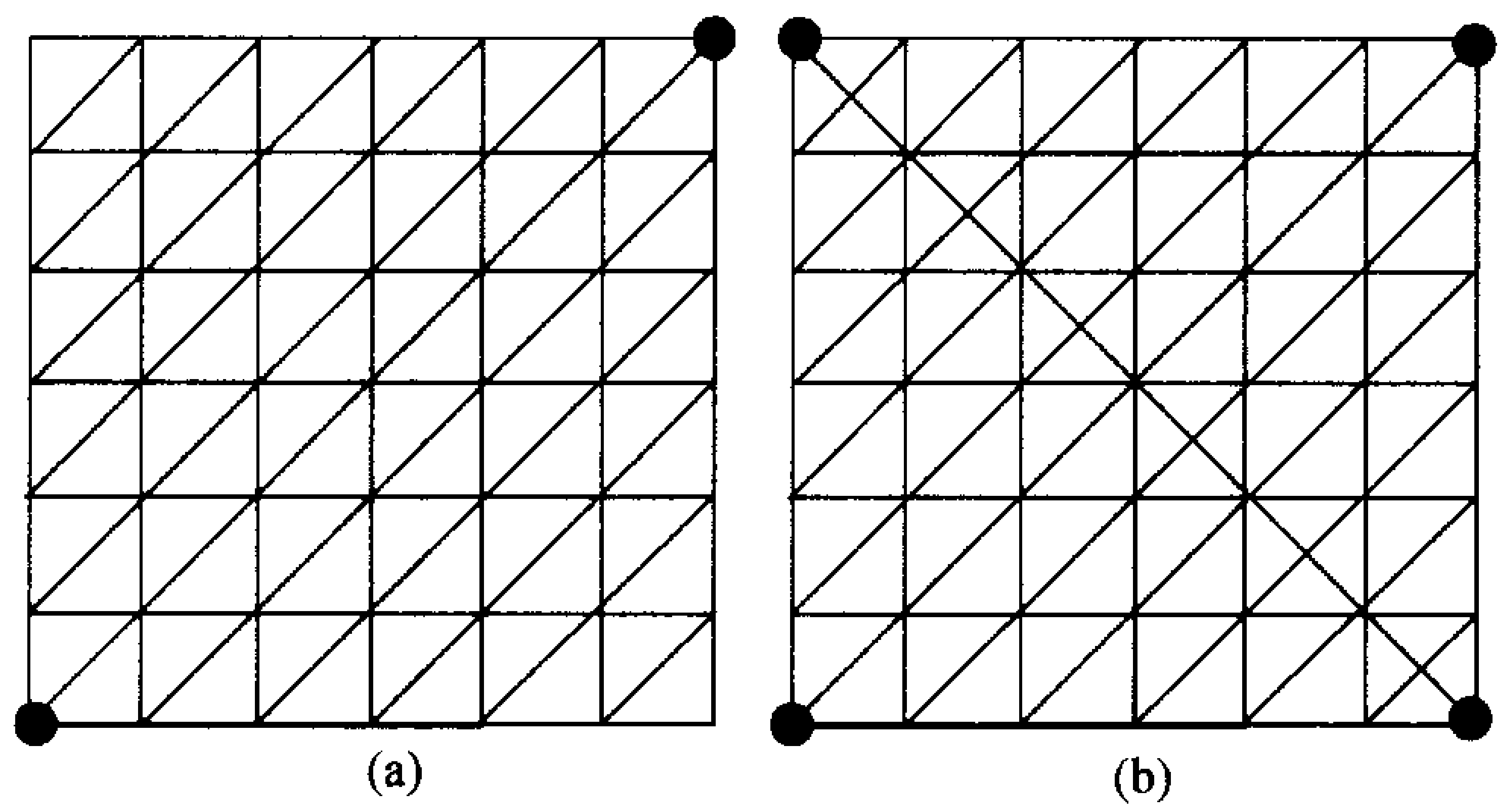


图 3-19

(2) 中国邮路设计

①求取欧拉图上的中国邮路。

如果需要邮递的图是一个欧拉图,那么只需求出它的一条欧拉回路即可,当然,欧拉回路也不是可以随便得到的。例如图 3-20 是一个欧拉图,从邮局 v_0 出发,首先通过 e_1 到达 v_4,我们约定通过一边时,相当于把此边染红,再把与 e_1 相邻的 e_6 染红,到达 v_1;再把 e_2 染红,到达 v_0,这就糟了,e_3, e_4, e_5 这三条街就去不了啦。事实上,e_2 是染红 e_1 与 e_6 后无色边们导出的图的"桥",这样提前过桥必然造成不能把每边一次性行遍再回邮局的后果,正确的办法是过了 e_1 边,e_6 边之后可过 e_5;这时无色边 e_2, e_3, e_4 的导出图每边都是桥,不得已只能选无色图的桥 e_4, e_3, e_2 了。

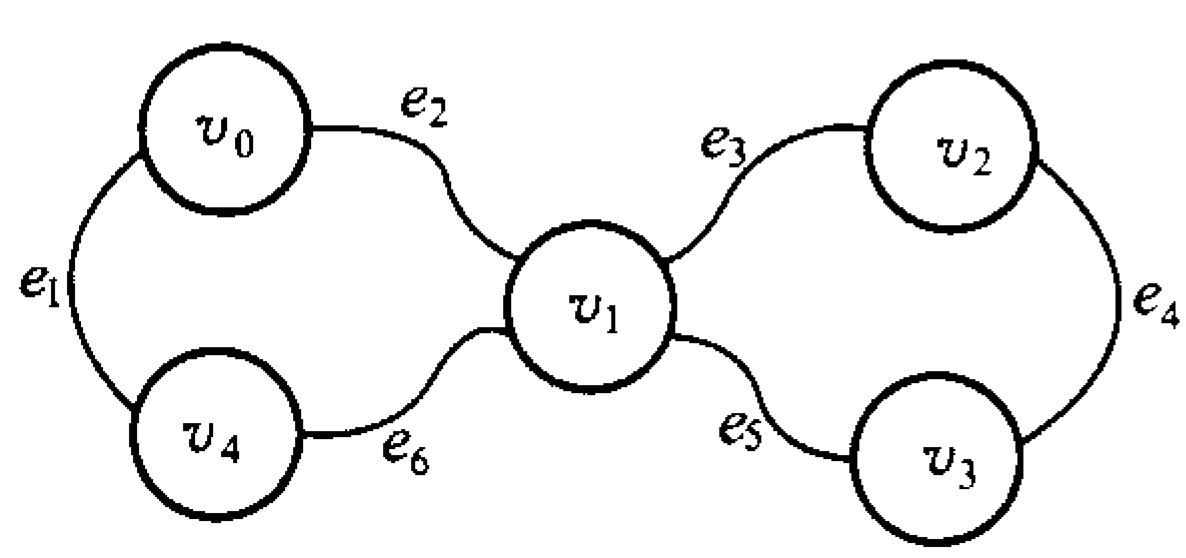


图 3-20

我们从此悟出一个要领:投递时,非不得已时,不要过早地去投递未投递过的边们导出的子图的桥,因为桥只允许通过一次,如果提前过桥,会造成"对岸"一些未投递的街道不能再去投递的后果。

总结成如下算法:

算法 1 从指定顶(邮局)v_0 出发,任取一条与 v_0 关联的边 e_1,把 e_1 染成红色;再选 e_1 的另一端点 v_1 关联的边 e_2,如果不是已无选择的余地,不要选无色子图的桥为 e_2,把 e_2 染成红色。

算法 2 选与 e_2 端点 $v_2(\neq v_1)$ 相关联的无色边 e_3,如果不是已无选择的余地,不要选无色子图的桥为 e_3,把 e_3 染成红色。

算法 3 如上递推地直至把全图的边染红为止,按所选边的先后次序,$e_1, e_2, \cdots, e_m$ 即为一条红色的中国邮路,其中 m 是全图的边数。

②求取非欧拉图上的中国邮路。

设邮递员需要投递的街区是连通图 G,每个街口是 G 的顶,每条街是 G 的边,每街 e 的长度 $l(e)$ 是 e 的权,我们欲求从 v_0 出发的一条回路使得回路总路程最少,若 G 不是欧拉图,则必然会有某些边在回路上不止一次地出现。

下面以实例说明"进口的"一种方法,它是由匈牙利数学家埃德蒙兹等人首创的。

考虑图 3-21 上的中国邮路,边旁数字是各边边长,v_1, v_2, v_3, v_4 是四个 3 次顶,所以此图不是欧拉图。应在 v_1 与 v_4,v_2 与 v_3 之间各添加一条轨,或在 v_1 与 v_2,v_3 与 v_4 之间;v_1 与 v_3,v_2 与 v_4 之间分别添加一条轨,才能使其成为欧拉图,添加的边权之和应最小,再按上段的欧拉图中国邮路来解决,实际操作如下:

步骤 1 求 G 中奇次顶集 $V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$。

步骤 2 求 V_0 中每对顶的距离:

$d(v_1, v_2) = 4$, $d(v_1, v_3) = 5$, $d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_2, v_3) = 3$, $d(v_2, v_4) = 5$, $d(v_3, v_4) = 3$。

步骤 3 以 V_0 为顶集,作加权完全图,各边之权即步骤 2 中各顶间的距离,如图 3-22。

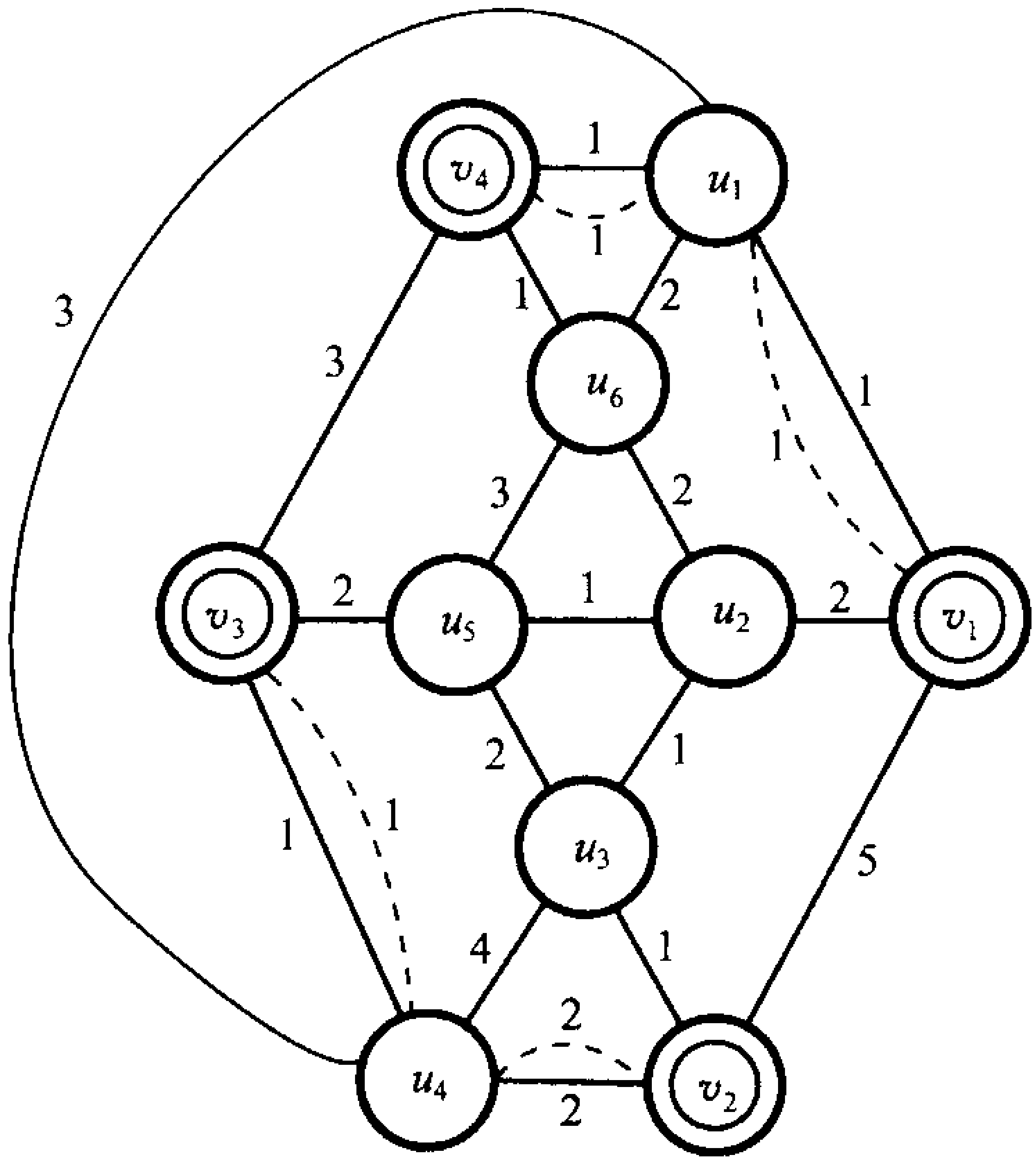


图 3-21

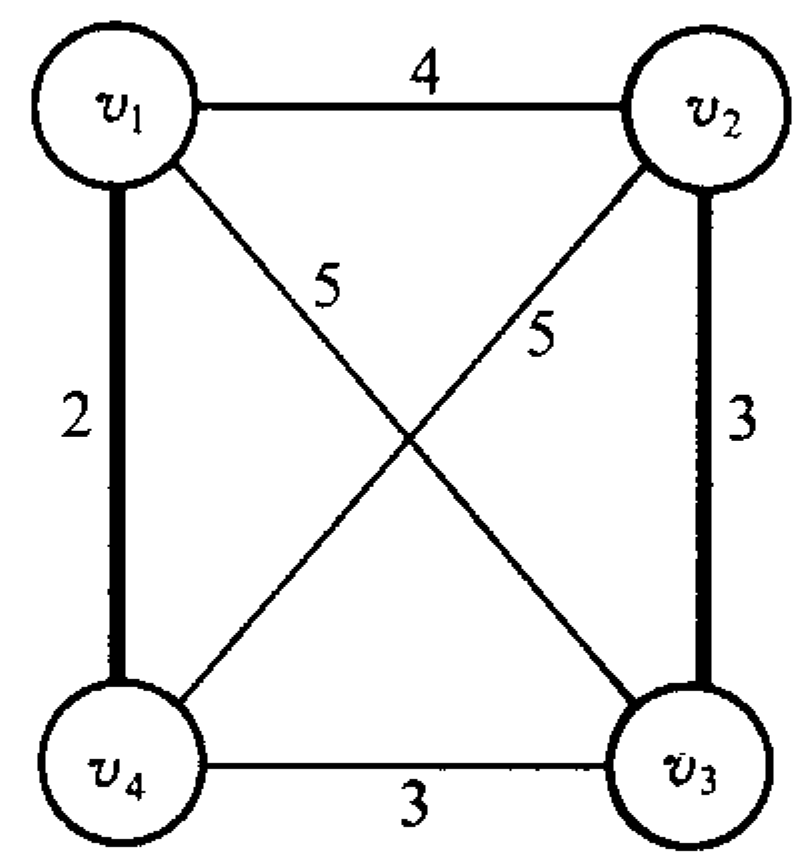


图 3-22

步骤 4 求出图3-22中 $K_{|v_0|}$ 上的最小权的完备匹配, $M = \{v_1v_4, v_2v_3\}$。

步骤 5 求 G 中 v_1 与 v_4 之间和 v_2 与 v_3 之间的最短轨: $P(v_3, v_4) = v_1u_1v_4$, $P(v_2, v_3) = v_2u_4v_3$。

步骤 6 在 G 中把 $P(v_1, v_4)$上的边变成同权双边, $P(v_2, v_3)$亦然, 图 3-21 中的虚线是添加的新边, 于是得到加权欧拉图 G'。

步骤 7 在 G' 上取一条欧拉回路 C 即为所求

$C = v_1u_1v_4v_3u_4v_2v_1u_2u_3v_2u_4u_3u_5v_3u_4u_1$
$v_4u_6u_5u_2u_6u_1v_1$

3.19 周游世界

(1) 周游世界游戏的变招儿

设想正 12 面体的每条棱是橡皮筋做成的, 正 12 面体每个面都

是正五边形，任取其中一个正五边形，把它向所在平面的各个方向扩张，其他棱受到这个正五边形扩张的牵连，则会变成状似图 3-23 所示的平面图形，尽管图 3-23 一点也不像一个正 12 面体，不过它却反映了与正 12 面体中相同的顶点相邻关系，我们只关心能否周游，至于游走时所经路线的形状与长度，不是我们过问的事，所以哈密顿的玩具与图 3-23 本质上是一回事，即只需考查图 3-23 上是否有含 20 个顶的圈。我们已用粗实线构造出了一个这样的圈，所以哈密顿周游世界的答案是肯定的，但不是唯一的。读者还可以自行构作出其他的含全部顶点的圈。

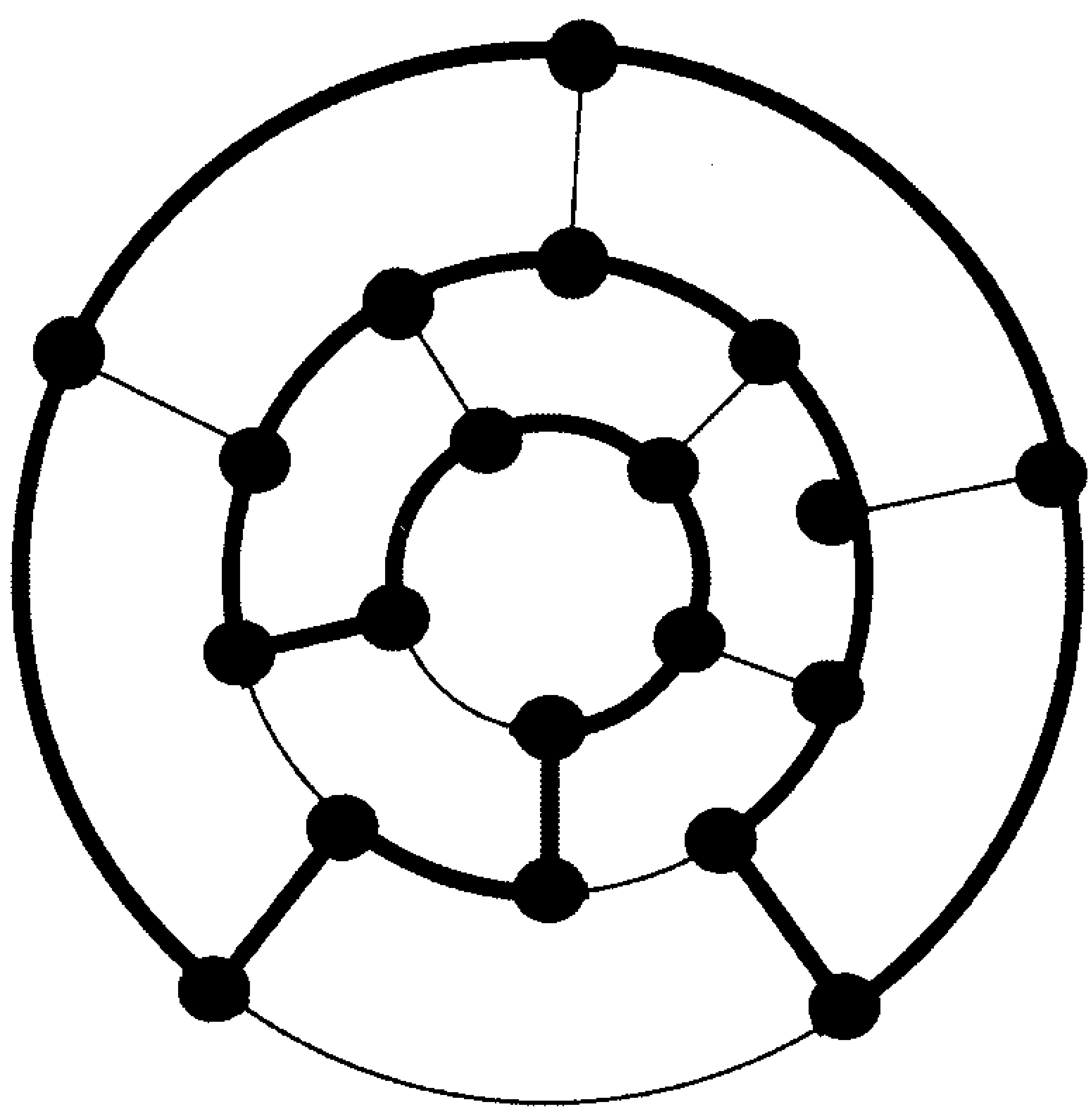


图 3-23

这种含图上每顶的圈称为哈密顿圈，存在哈密顿圈的图叫做哈密顿图，例如奇数个顶的二分图就不是哈密顿图，因为二分图无奇圈。

由于正四面体、正六面体、正八面体和正 20 面体都是哈密顿图，所以还可以把哈密顿周游世界的游戏玩具用所有的正多面体来制

作。

图 3-24 中的粗实线表示哈密顿圈。

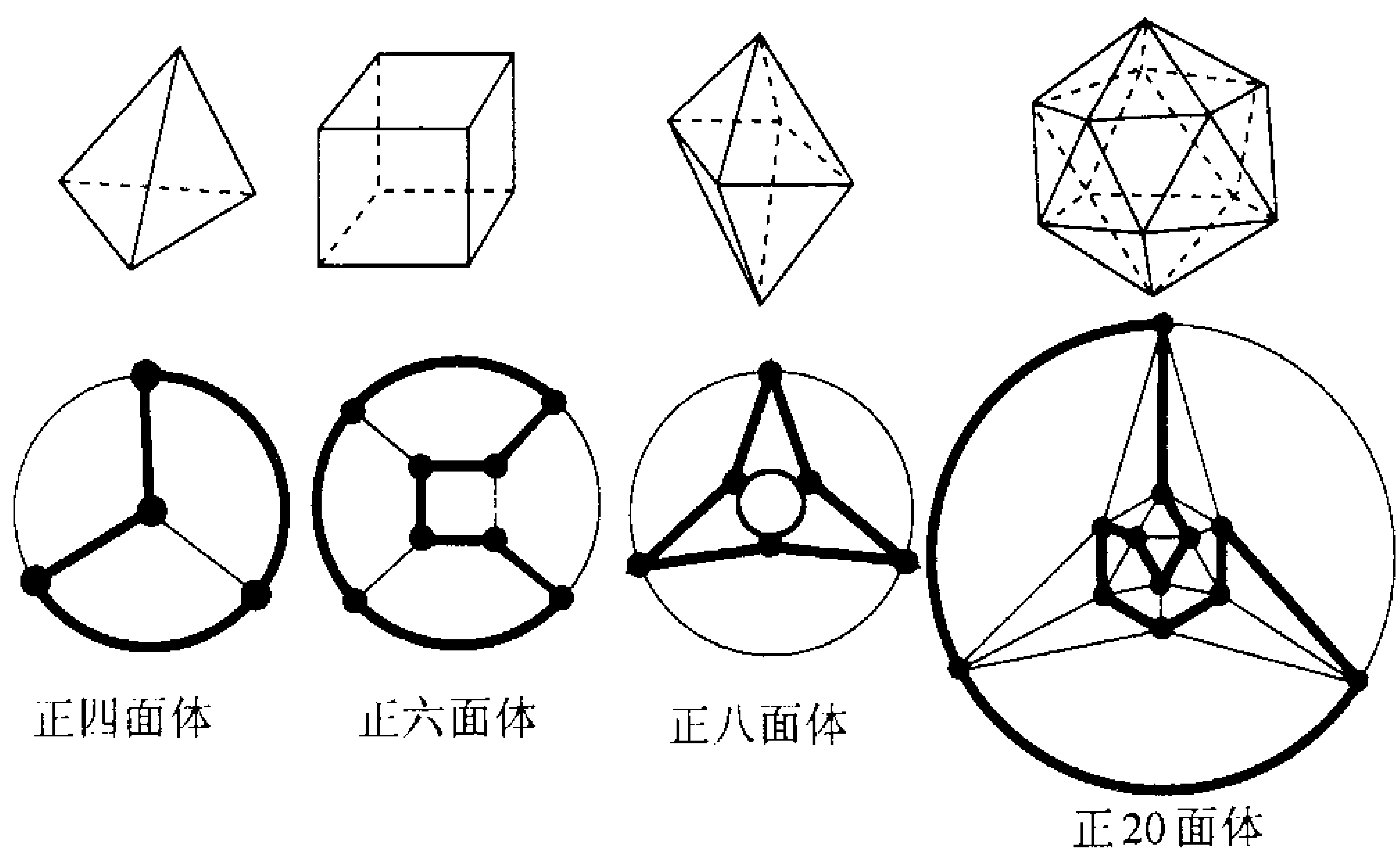


图 3-24

上面的三维立方体(即正六面体)可以推广成 k 维立方体, $k \geqslant 2$ 时, 都是哈密顿图, 图 3-25 中画的是一维、二维、三维、四维立方体, 粗实线画出一个哈密顿圈, k 维立方体是如下构作出来的:

一维立方体:是线段, 把它的两端分别编码 0, 1。

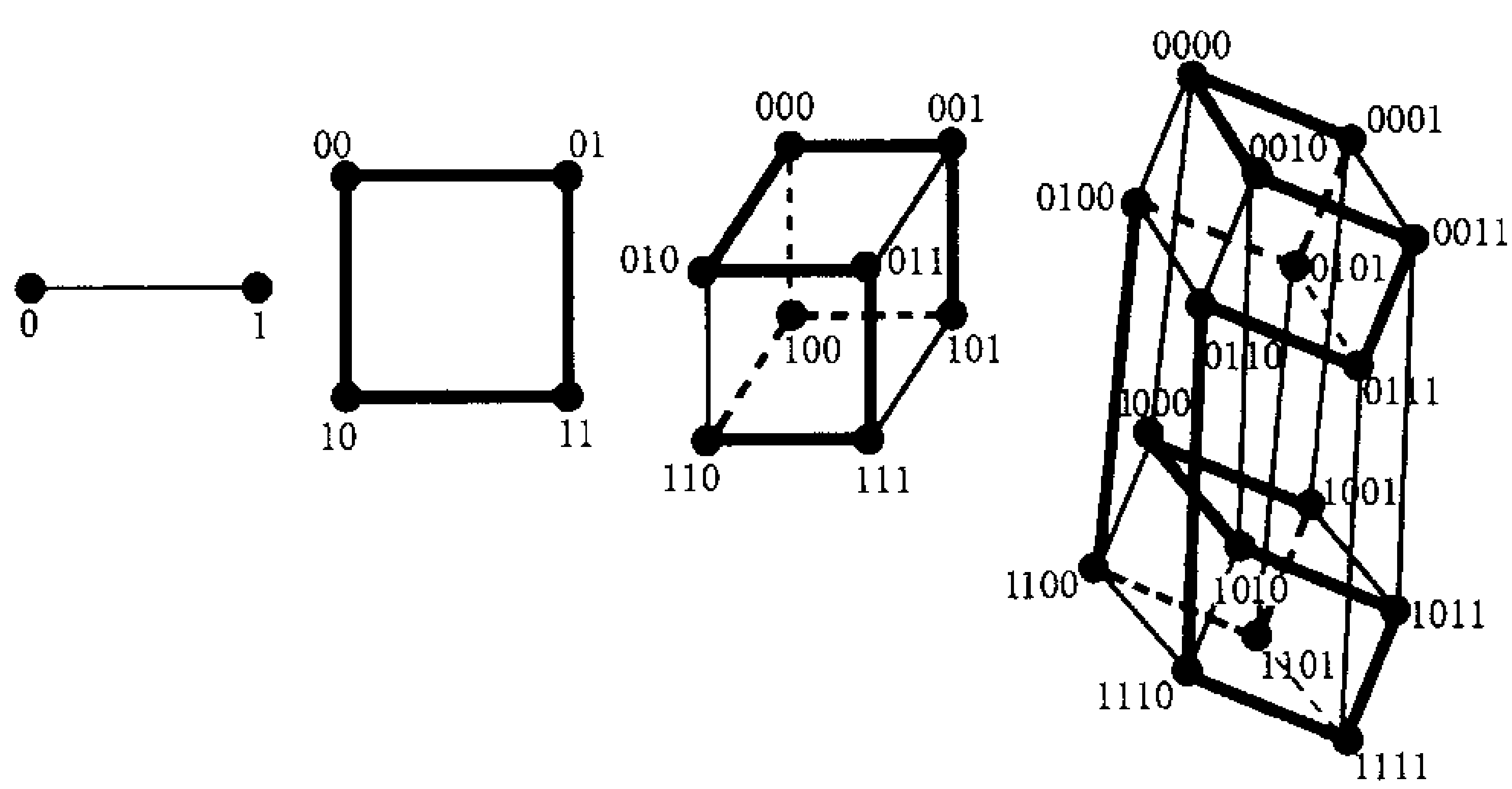


图 3-25

二维立方体:把一维立方体的一个复制品平行地放在其正上方, 再把有相同号码的顶之间连一边, 且把上方的一维立方体的码加“0

头”，下方的一维立方体的码加“1 头”。

k 维立方体：把 $k-1$ 维立方体的一个复制品平行地放在其正上方，再把有相同号码的顶之间连一边，上方 $k-1$ 维立方体的码加“0 头”，下方 $k-1$ 维立方体的码加“1 头”。

k 维立方体一个显著性质是任一边两端点的编码皆由 0，1 组成，且仅在一个相同位置上有不同的数码，由此知其哈密顿圈上的一条含所有顶的轨上的每顶依次变更一个位置上的数码。

由 k 维立方体的这一特点可以得出下面的命题为真：

一个有限非空集合的全部子集可以如此排序，使得任何相邻子集恰相差一个元素。

事实上，设 A 是有限集，A 中共 n 个元素，把每个元素编号，则 A 可表成 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，其中 i 代表编号为 i 的那个元素，若 $B\subseteq A$，约定用长 n 的 0－1 数串表示 B，$i\in B$ 时，数串的第 i 位写 1，否则写 0。A 的全部子集共 2^n 个，每个皆为 n 维立方体的一个顶点，所以 n 维立方体上的一条含所有顶的轨即为 A 的子集之排序。

以后把含图中一切顶的轨称为哈密顿轨。

(2) 22 岁的天文学教授哈密顿

哈密顿，1805 年生于爱尔兰都柏林一个律师家庭。5 岁通拉丁文，14 岁学会了 12 种语言，13 岁阅读牛顿的《普遍算术》一书而对数学产生强烈兴趣，1823 年入都柏林三一学院，对天文学有特殊的天赋和偏爱，大学尚未毕业，即被都柏林大学任命为天文台台长，天文学教授，时年仅 22 岁，1932 年当选爱尔兰科学院院士，后来又当选英国皇家学会会员和法国科学院院士，成为当时成绩卓著的科学大师，由于操劳过度，1865 年去世，年仅 60 岁。

他的著作有 140 余篇，善于处理特殊实例，再把对具体问题的研究方法与结论过渡成为一般理论，他在力学、数学和光学上有杰出贡献，数学上有深远影响的成就是四元数和哈密顿图，所谓四元

数是形如 $t+xi+yj+gk$ 的数，其中 t, x, y, z 是实数，$i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$, $kj=-i$, $ik=-j$, $ji=-k$，“四元数”对数学、力学和光学都有重要的应用。

哈密顿重视外语学习，为人谦虚忠厚，重视科研，也重视教学，文章写得好，教书教得好，著作十分畅销，是19世纪青年人崇拜的典范人物。

3.20 贪官聚餐

n 个两两相识的贪官，每天都到一家五星级饭店聚餐，他们围坐在一张圆桌边与邻座交谈权钱之术，他们都希望每天聚餐时换成新的邻座，问这样的聚餐能进行几次？

这些愚不可及的官僚去请教一位图论专家，专家笑曰：“这种聚餐至多允许一次。”其实这位搞图论的专家心里十分清楚，如果他们是11个人天天来此吃喝，鱼肉百姓，去掉双休日，可以足足进行一周！一般地，若 n 个人这样聚餐，可以进行$\left[\frac{n-1}{2}\right]$天；$[x]$是 x 的整数部分，例如$[3,5]=3$。

下面是$\left[\frac{n-1}{2}\right]$正确性的证明。

以贪官为顶，构成 K_n，问题就是求 K_n 中无公共边的哈密顿圈的个数，K_n 的边数为$\frac{1}{2}n(n-1)$，每个哈密顿圈有 n 条边，所以 K_n 中哈密顿圈的个数不超过$\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$个。

用构造性的办法可以找到$\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$个哈密顿圈，从而知 K_n 中的无公共边的哈密顿圈共$\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$个。

对于 $n=2k+1$, $k\geqslant 1$，图 3-26 的粗实线画出了一个哈密顿

圈，其中 $0,1,2,\cdots,2k$ 代表 K_{2k+1} 中的顶点，这个哈密顿圈是

$$C_1=0,1,2,2k,3,2k-1,4,\cdots,k,k+2,k+1,0。$$

0 在圆心处，$1,2,\cdots,2k$ 是等分圆周的顶点，把此哈密顿圈 C_1 顺时针依次旋转 $\frac{\pi}{k}$，则得到 $k-1$ 个新的哈密顿圈，与 C_1 共计 k 个两两无公共边的哈密顿圈。

对于 $n=2k+2$，$k\geqslant1$，把第 $2k+1$ 号顶放在 0 号顶的"上空"，如图 3-27，粗线画出一个哈密顿圈 C_2，用上面的旋转法可得 k 个无公共边的哈密顿圈。当图 3-26 中 C_1 从 0 开始运行到左侧距水平直径最近的顶点时，在 $n=2k+1$ 的情形是向右下方运行，$n=2k+2$ 时，改成向 $2k+1$ 运行，再从 $2k+1$ 运行至右下距水平直径最近的顶，再按图 3-26 的方式运行。

综上所述，K_n 中共有 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个无公共边的哈密顿圈，贪官们每次按这些哈密顿圈上的次序入席。

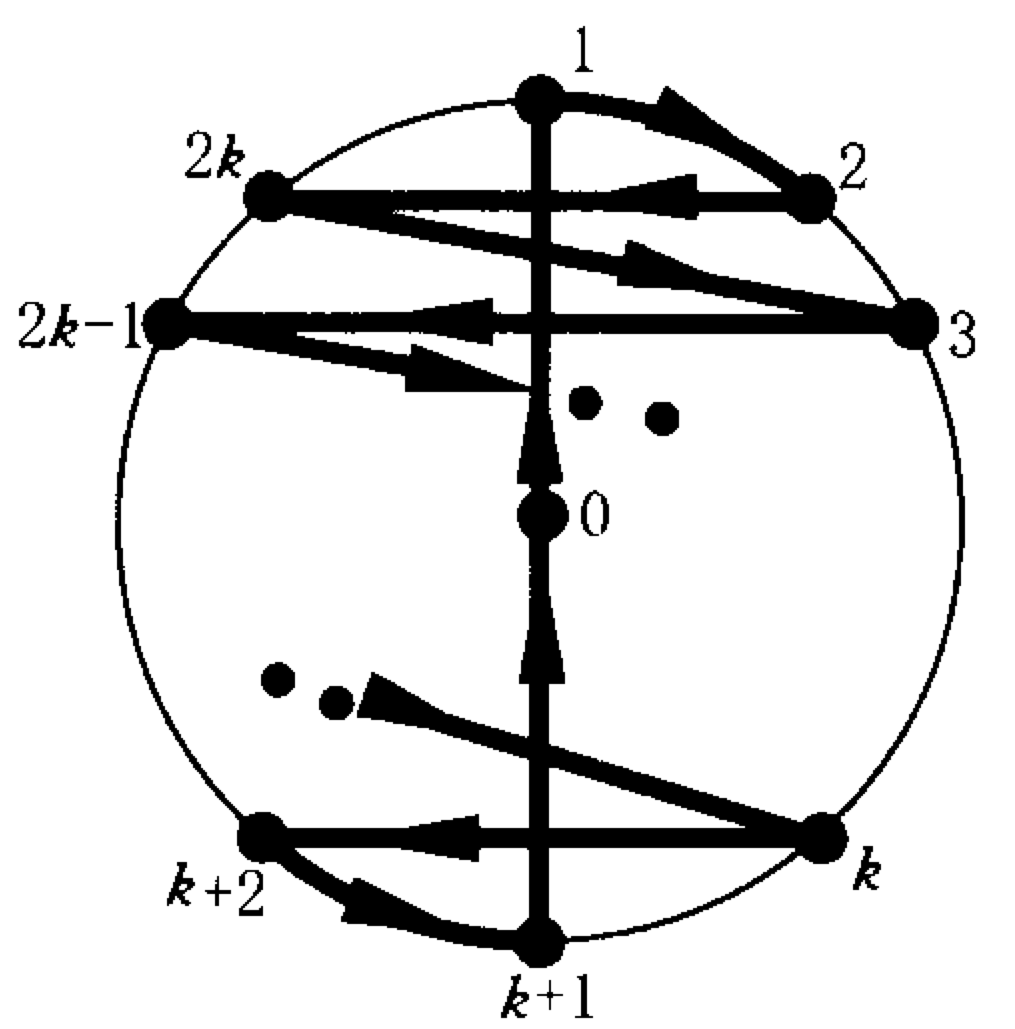


图 3-26

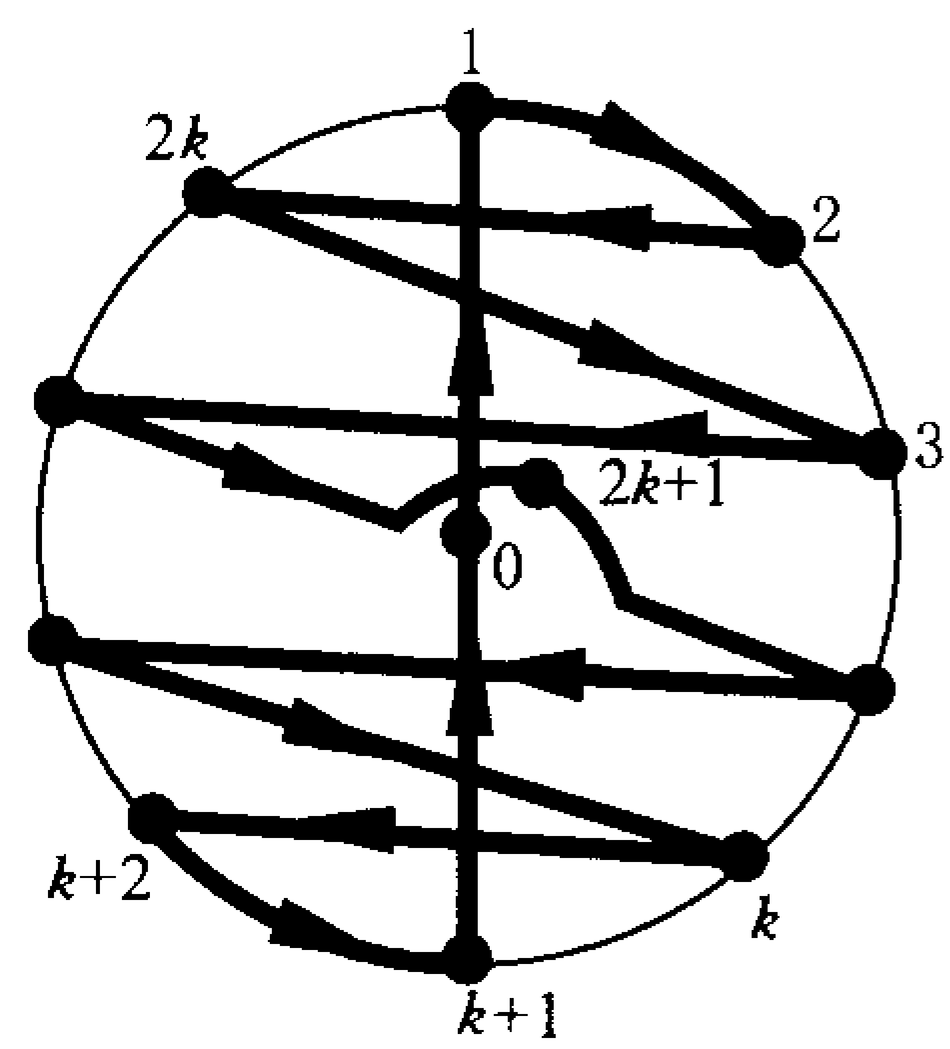


图 3-27

如果这 n 个贪官找来 n 名小姐，并要求每次就餐身旁有两名未邻坐过的小姐，这种排场可以进行几日？

这一问题就是问 $K_{n,n}$ 上有多少无公共边的哈密顿圈。

图 3-28 中画出 $K_{n,n}$ 的一个哈密顿圈，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 名

贪官, $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 名小姐, 用 K_n 中的旋转法可知 $K_{n,n}$ 中的无公共边的哈密顿圈共计 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个。细节论证与 K_n 的情形相似, 建议读者一试。

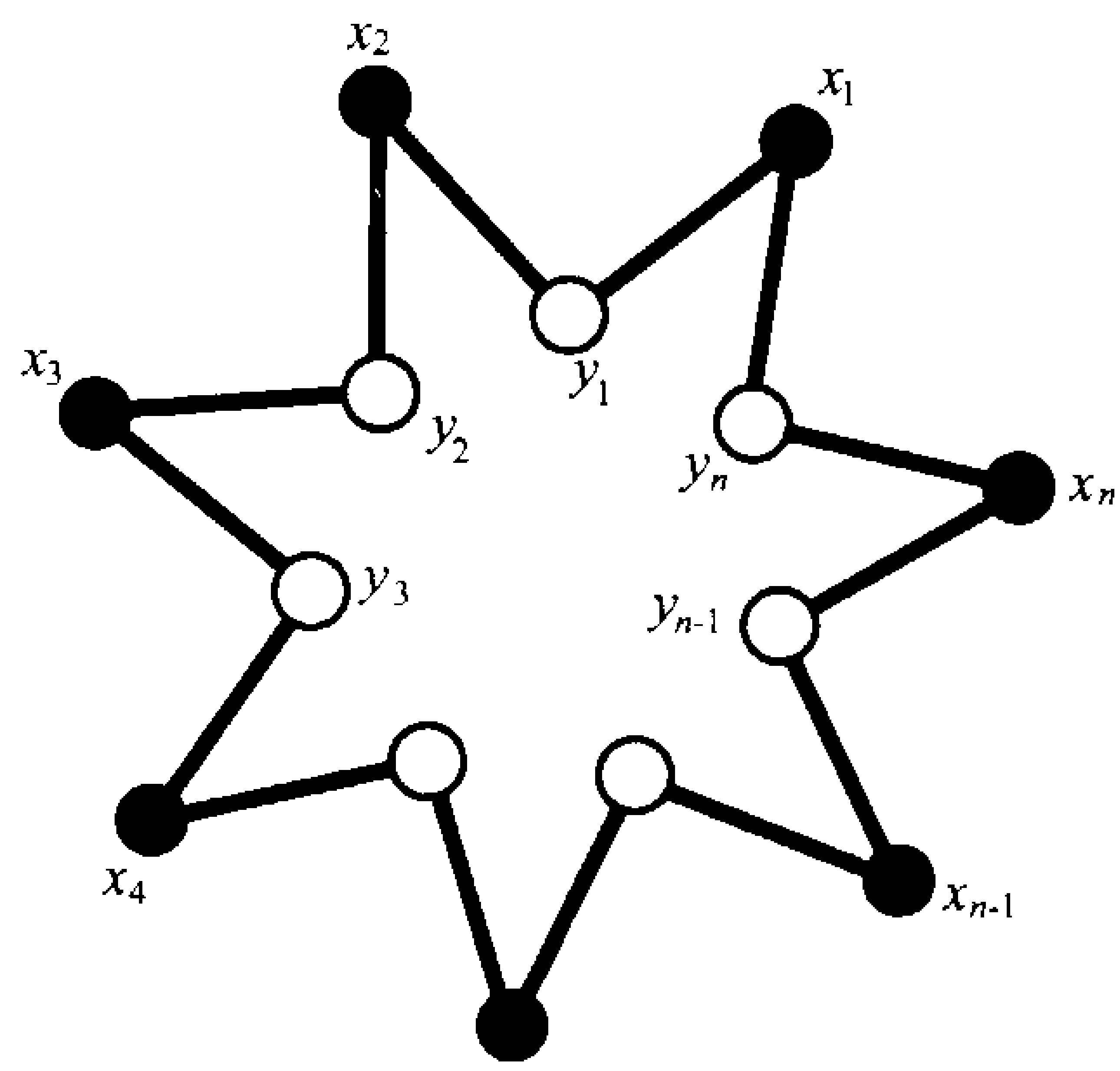


图 3-28

3.21 正 20 面体上的剪纸艺术

姐姐用纸片剪出 20 个全等的正三角形, 黏成一个正 20 面体, 她把剪刀递给妹妹, 要求妹妹把这个正 20 面体剪成两部分, 而且每个面也剪成两部分, 剪痕又不能通过正 20 面体的顶点。

聪慧的妹妹把正 20 面体每个面那个正三角形的重心找到, 再从重心引三边的垂线段, 于是形成图 3-29 所示的图形, 每个顶点附近都呈现这种形象。于是妹妹画出的恰是以正 20 面体各面重心为顶点的一个正 12 面体, 已经从哈密顿周游世界的游戏当中知道, 正 12 面体上有一条哈密顿圈, 她用剪刀沿正 12 面体上的一条哈密顿圈剪一圈, 则把正 20 面体剪成两片, 且正 20 面体的每个面也剪成了两片。

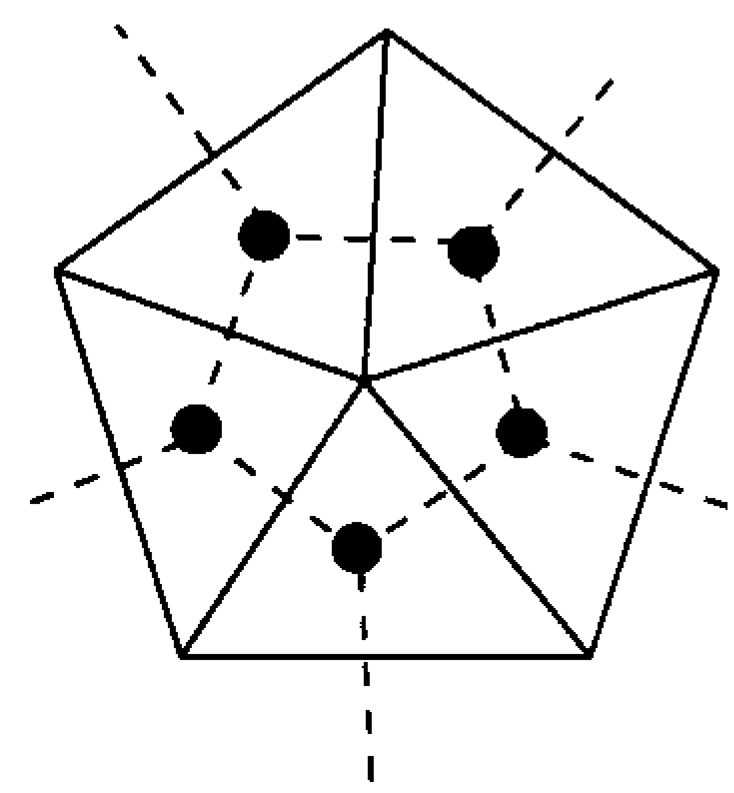


图 3-29

正 20 面体与正 12 面体的这种“我面中心你之顶，你面中心我之顶”的现象称为两个正多面体的对偶关系。

正六面体与正八面体是一对对偶关系图。

一个正 20 面体存在唯一的内接正 12 面体，此内接正 12 面体上又唯一的内接一个正 20 面体，两种正多面体无穷次交替地镶嵌在一起，形成一种极其规则、极其匀称、极其豪华的空间结构，对偶的正六面体与正八面体也会构成如此动人的框架结构。

3.22 国际象棋马的遍历

国际象棋的马是否可以遍历，即它从任一格出发跳到每格恰一次又回到出发的那个格子，是否可能？这个问题的答案是肯定的，图 3-30 给出了马的一种遍历路线图，图 3-31 中的数目是跳马的次数，说来也妙，每行的和，每列的和皆为 260，是一种“幻方”。

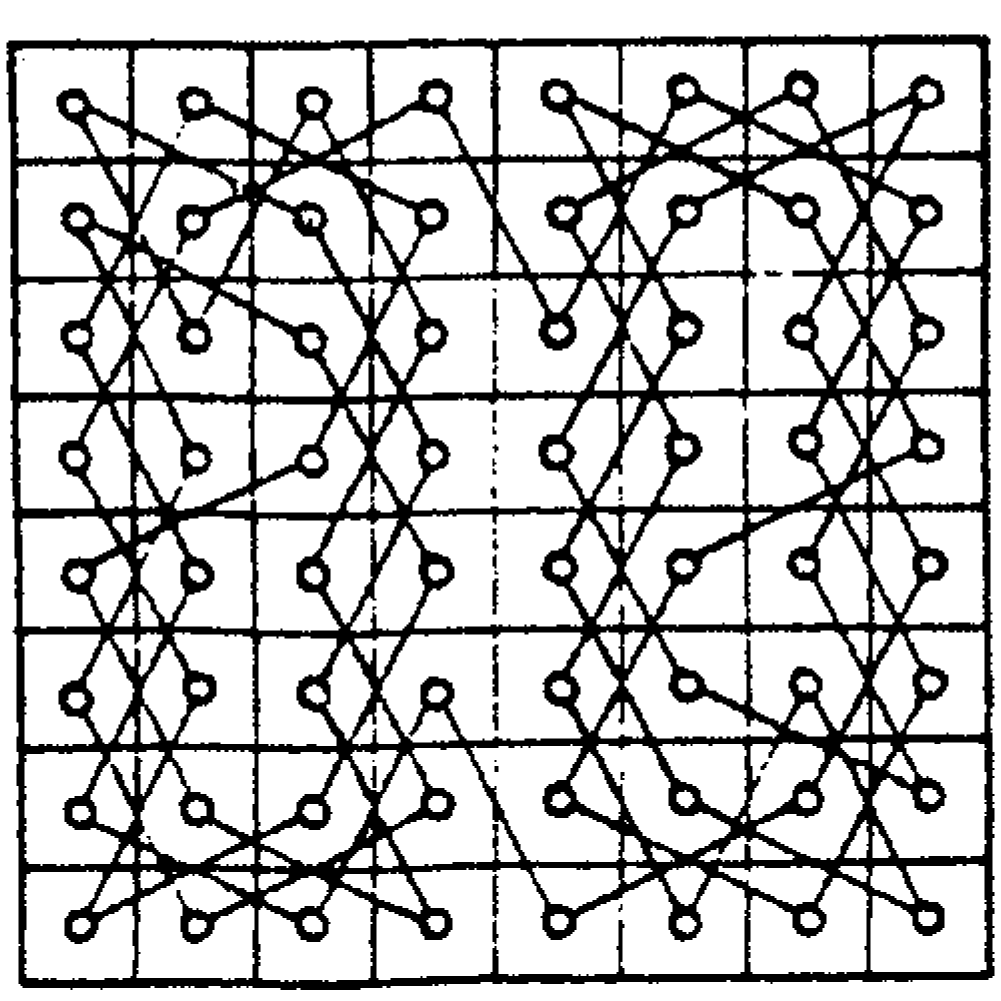


图 3-30

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图 3-31

但在小棋盘上，马就未必能遍历了。

以棋盘每格为顶点，仅当马从甲格能一步跳到乙格时，甲乙两格之间连一边，如此构成的图称为“马图”，马能否遍历等价于马图是否哈密顿图。8×8 的马图是哈密顿图。

2×2 的小棋盘的马图无边，不是哈密顿图。

3×3 的马图中心那个格的马跳不出或马跳不到，所以也不是哈密顿图。

4×4 的马图中四个 c 号顶构成一个圈，见图 3-32，四个 d 号顶构成一个圈，四个 a 号顶皆 2 次顶，每个 a 与两个 b 相邻。如果从这个马图中把四个 b 顶删除，则出现四个 a 号孤立顶和一个 c 号正方形，一个 d 号正方形，共计六个连通片；如果 4×4 的马图中有一个哈密顿圈 C，则 b 们都在 C 上，把 b 都删除，至多产生四个连通片。事实上，即使是一个哈密顿圈，再无不在圈上的边，删去四顶，也至多破碎成四片，如果尚有不在哈密顿圈上的边，则破碎不会增多。如今却产生了六个连通片，这一矛盾证明 4×4 的马图不是哈密顿图。

5×5 的马图也不是哈密顿图，它的四个 a 号顶皆 2 次顶，与四个 b 号顶构成一个八条边的圈 C，把四个 b 删除至少得五个连通片，其中四个是孤立顶 a，见图 3-33，与 4×4 的马图同理，5×5 的马图也不是哈密顿图。

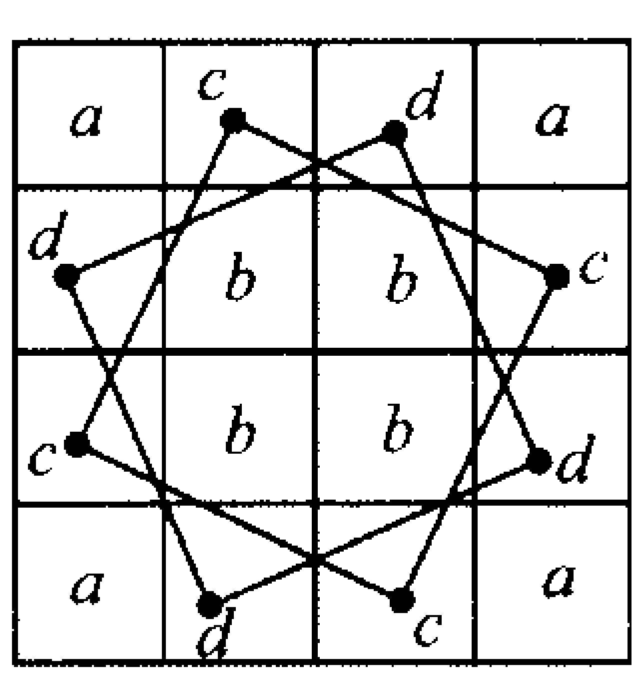


图 3-32

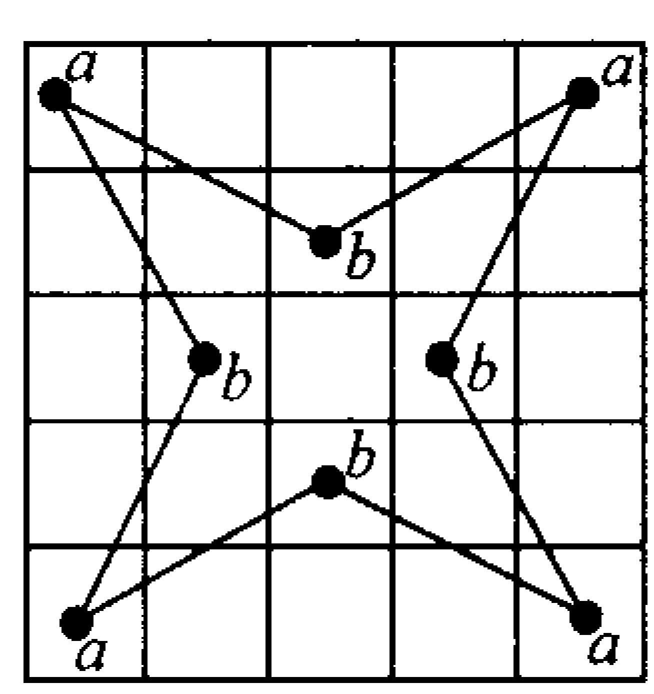


图 3-33

通过上述分析，我们可以建立哈密顿图的一个重要性质：

从 n 顶哈密顿图上任意删除 k 个顶，$k<n$，得到的图的连通片

的个数不多于 k 个。

这条性质反映了哈密顿图靠其哈密顿圈的维系，失去几个顶也不会碎得太厉害，碎片数不超过失掉的顶数，用这一性质判别一图不是哈密顿图时往往见效。

例如在一个正八面体的每个面上贴上一个正四面体，两者的一个面重合，则此 14 顶的多面体以棱为边的图不是哈密顿图；因为删去原来八面体的六个顶，得八个孤立顶，由哈密顿图的性质知此图非哈密顿图。

3.23 又是贪官聚餐

一日，$2n$ 名($n>1$)贪官来酒店吃饭，某些贪官之间有积怨，但每个贪官的积怨者不超过 $n-1$ 个，他们想围圆桌就坐时，都不与有怨者为邻，是否可能？

若以贪官为顶，在每对儿无怨者之间连一边，则每顶次数不小于 n，任二顶次数之和不小于顶数 $2n$，当年匈牙利的一位中学生波沙(L. Pósa)证明了下面的定理：

n 顶图 $G(n\geqslant 3)$中每对顶次数之和不小于 $n-1$ 时，G 中有哈密顿轨；每对顶次数之和不小于 n 时，G 中有哈密顿圈。

这个定理是 1960 年奥尔(Ore)提出的，下面介绍波沙的精彩证明(波沙后来成为了著名的图论专家)。

首先证明若每对顶 u,v，$d(u)+d(v)\geqslant n-1$，则 G 是连通图，若 G 不连通，有 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 这 ω 个连通片，$\omega\geqslant 2$，取 $u\in V(G_1)$，$v\in V(G_2)$，则 $d(u)\leqslant n_1-1$，$d(v)\leqslant n_2-1$，n_1，n_2 分别是图 G_1，G_2 的顶数，于是

$$d(u)+d(v)\leqslant n_1+n_2-2\leqslant n-2$$

与 $d(u)+d(v)\geqslant n-1$ 相违，所以 G 连通。

设任二顶 $u, v, d(u)+d(v)\geqslant n-1$，但 G 中无哈密顿轨，令 $P(v_1, v_{l+1})=v_1v_2\cdots v_{l+1}$ 是 G 中最长轨，$l<n-1$，则与 v_1，v_{l+1} 关联的边(当然有)之另一端点必在 $P(v_1, v_{l+1})$ 内部(非端点)，不然，若 v_iv_{l+1} 是边，又 $P(v_1, v_{l+1})$ 不是哈密顿轨，还有一顶 v_{l+2} 不在 $P(v_1, v_{l+1})$ 上，再由 G 之连通性，定会形成图 3-34 的结构，其上的粗实线表出的轨比 $P(v_1, v_{l+1})$ 至少多一条边，与 $P(v_1, v_{l+1})$ 最长矛盾。

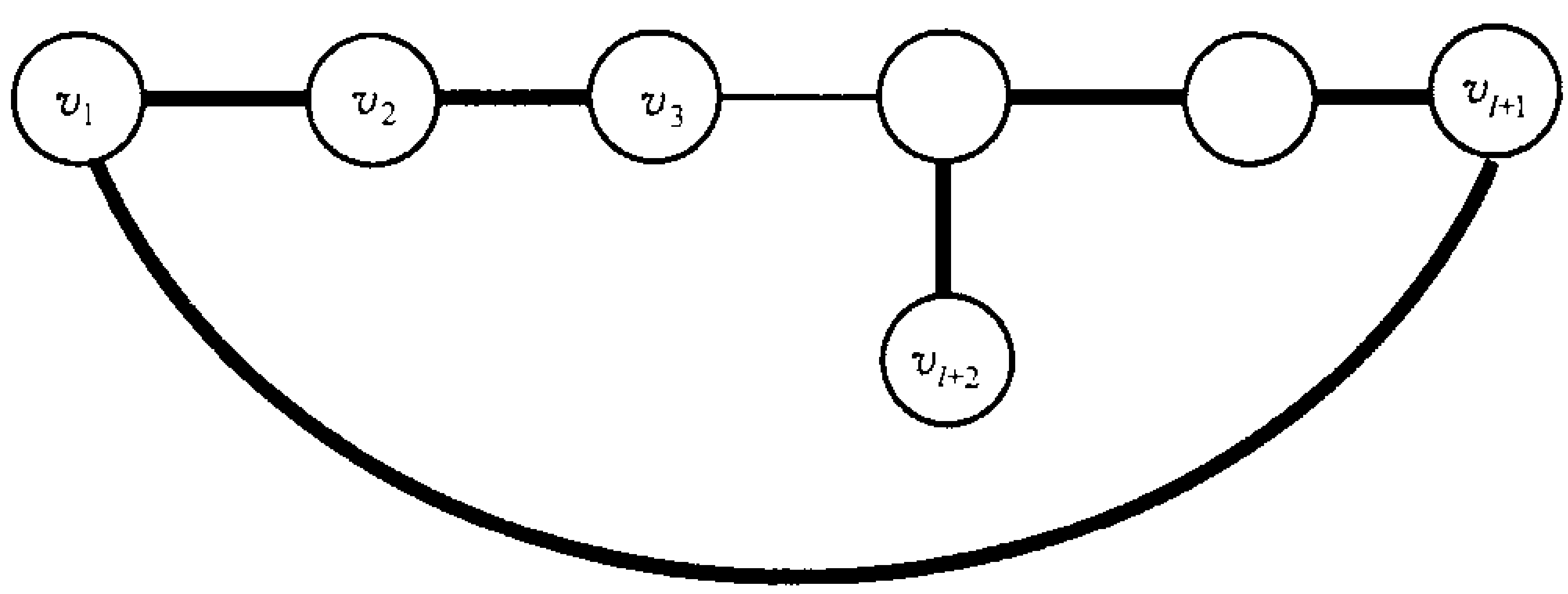


图 3-34

设 v_1 的邻顶是 $v_{j1}, v_{j2}, \cdots, v_{jk}$ 而 $v_{j1-1}, v_{j2-1}, \cdots, v_{jk-1}$ 都不与 v_{l+1} 相邻，则 $d(v_1)=k, d(v_{l+1})\leqslant l-k$，于是 $d(v_1)+d(v_l+1)\leqslant k+l-k=l<n-1$，与定理条件不符，于是存在 $P(v_1, v_{l+1})$ 的两个内顶 v_i, v_{i+1}, v_1 与 v_{i+1} 相邻，v_{l+1} 与 v_i 相邻，见图 3-35。

图 3-35 中存在长 $l+1$ 的圈 C 如粗实线所示。又 $P(v_1, v_{l+1})$ 上不包括 G 的一切顶，存在 $v_{l+2}\notin\{v_1, v_2, \cdots, v_{l+1}\}$，$v_{l+2}$ 与 C 上一顶相邻，于是出现比 $P(v_1, v_{l+1})$ 还长的轨，与 $P(v_1, v_{l+1})$ 最长矛盾，至此证得 G 中有哈密顿轨。

因为 $d(u)+d(v)\geqslant n$ 时，G 中出现哈密顿轨 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$，是最长轨，于是出现 $v_1v_n\in E(G)$ 或图 3-35 的结构，总之，当 $d(u)+d(v)\geqslant n$ 时，G 中有哈密顿圈，证毕。

联系开始提到的 $2n$ 贪官聚餐问题，由于与之对应的图 G 任二顶次数之和不小于顶数，由奥尔定理，G 中有哈密顿圈，按一条哈密

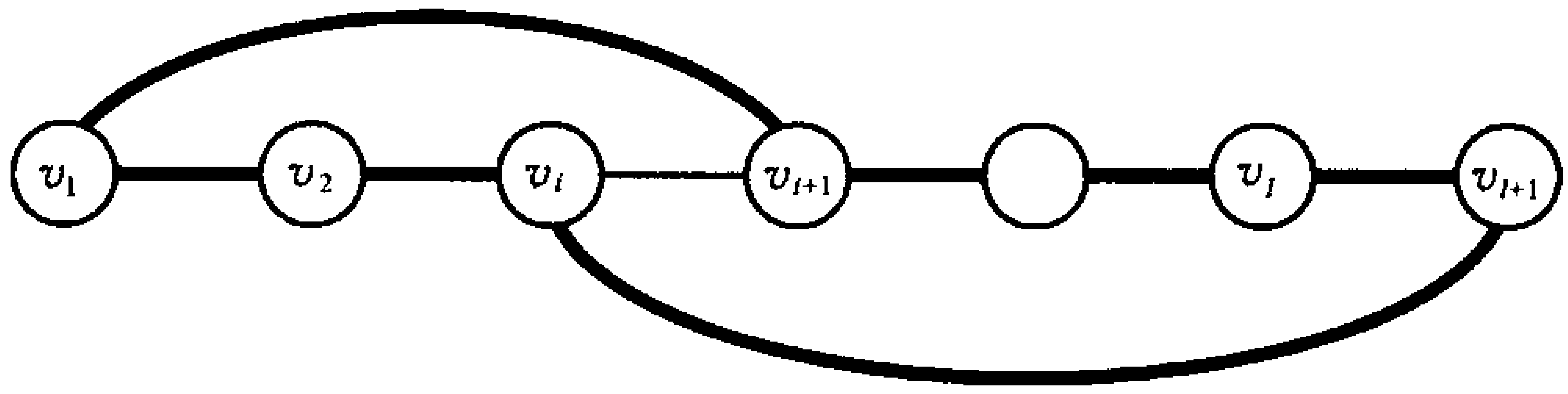


图 3-35

顿圈的顺序入席即可使邻座无怨。

3.24 天敌纵队和王

有 100 种昆虫，每两种之中必有一种能咬死另一种，即一种昆虫是另一种昆虫的天敌，能不能把它们排成一路纵队，使得每种昆虫（除排头外）前面都是自己的天敌？

在体育比赛中也有相似的问题，几个球队进行甲 A 循环赛，每两队队间都赛一场，无平局；如果甲胜乙，则从甲向乙画一有向边，以 n 个球队为顶集，构成一有向图 G，则 G 称为循环赛图，上述的"天敌纵队问题"的图论模型是以虫为顶，甲能咬死乙时，从甲向乙连一有向边，于是构成一循环赛图，问的是循环赛图中是否有有向哈密顿轨，即含图上一切顶的有向轨。

答案是肯定的，下面用数学归纳证明：

循环赛图中存在哈密顿轨。

循环赛图 G 的顶数为 2 时，命题显然成立。

假设对不超过 k 个顶的循环赛图，命题已成立，$k \geqslant 2$，往证 $k+1$ 的循环赛图，命题仍成立。任取一顶 $v \in V(G)$，由归纳法假设，$G-v$ 中有有向哈密顿轨 $u_1u_2\cdots u_k$，$u_i \in V(G)$，$i=1,2,\cdots,k$。

①若 G 中与 v 关联的有向边皆从 v 指向 $G-v$ 中的顶，或从 $G-v$ 中的顶指向 v，则显然 $vu_1u_2\cdots u_k$ 或 $u_1u_2\cdots u_kv$ 是 G 的有向哈

密顿轨。

②若 $V(G)$中以 v 为头的边的尾集 $V_1\neq\varnothing$，以 v 尾的边之头集 $V_2\neq\varnothing$，设 G_1，G_2 分别是 G 中以 V_1，V_2 为顶集的子循环赛图，由归纳法假设，G_1 中有其有向哈密顿轨 $P_1(v_1, w_1)$，G_2 中有其有向哈密顿轨 $P_2(v_2, w_2)$，于是 G 中的有向轨 $P_1(v_1, w_1)vP_2(v_2, w_2)$ 是有向哈密顿轨，证毕。

在体育竞赛中，胜者为王，优胜劣汰，如果 u 胜 v，则称 u 优于 v，如果 w 是 u 的手下败将，而 w 又胜 v，则亦称 u 优于 v。若竞赛中有一运动队优于所有其他运动队，则称其为王牌运动队，相应地，在循环赛图中，优于一切其他顶的顶称为“王点”。

若规定胜一次得一分，败者得零分，则有结论：得分最多的为王点。

事实上，设 u 是循环赛中得分最多者，若 u 得分为 $n-1$（n 是循环赛图的顶数），则 u 优于所有其他顶，u 自然是王点，若 u 的得分不是 $n-1$，但 u 得分最多，u 战胜了 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，而败给了 v_{k+1}，$v_{k+2}, \cdots, v_{n-1}$。若 v_{k+1} 战胜了 $v_1, v_2, \cdots, v_k$，则 v_{k+1} 比 u 多胜一次，与 u 得分最多矛盾，所以存在 v_j，$1\leqslant j\leqslant k$，v_j 胜过 v_{k+1}，于是发生 u 胜 v_j，v_j 又胜 u_{k+1}的现象，即 u 优于 v_{k+1}，同理 u 优于 $v_{n+2}, \cdots$, v_{n-1}，即 u 是王点，证毕。

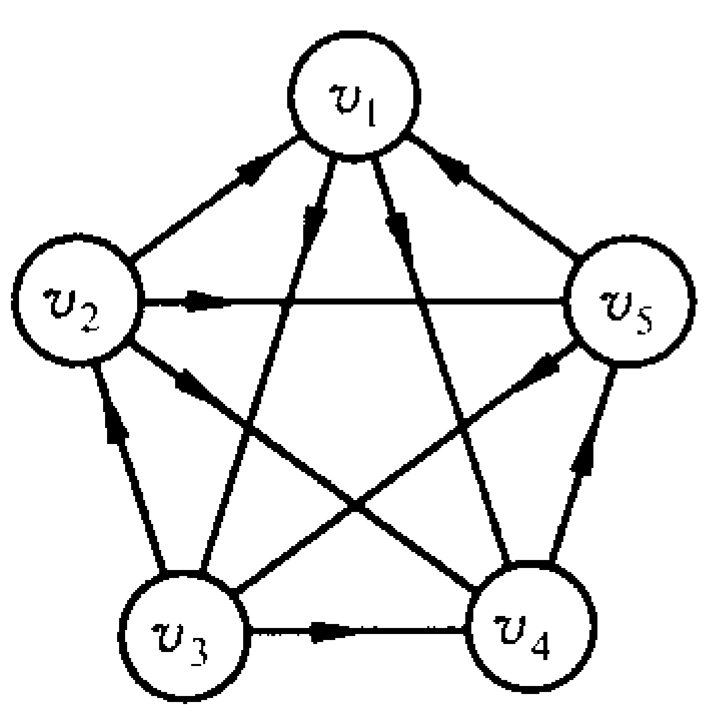


图 3-36

如果得分最多者为冠军，王点未必能得冠军，即王点不一定是得分最多的，例如图 3-36 中 v_2 得 3 分，是得分最多者，当然是王点，但 v_1 也是王点，它只得了 2 分，得不了冠军。

如果只有一个王点，则它得分 $n-1$；反之，如果一顶得分 $n-1$，则它是唯一的王点。

事实上，若 u 是 G 中唯一王点，但 u 的得分

不超过 $n-2$,则有有向边以 u 为头,把所有这种边尾上的顶作为顶集构成子循环赛图 G',由于得分最多的是王点,G'中也有王点 v;于是 v 也是G 的王点,与 u 是G 的唯一王点相违,故 u 得分$n-1$。

反之,若 u 得分$n-1$,它得分最多,故 u 是王点。若还有一个王点 $v\neq u$,则有一有向边以 v 为尾以u 为头或有一有向轨 vwu。总之 u 是某有向边的头,u 至少败过一次,与 u 得分 $n-1$ 矛盾,故不会有王点 $v\neq u$,即这时王点唯一。

3.25 图能摆平吗

两根筷子放在桌面上,如果一根压在另一根上形成一个乘号状,我们就说没有摆平。如果两根裸导线打叉压在一起,电流就会"短路",把保险丝烧断甚至引起火灾。交叉路口为避免交通堵塞或车祸而修筑立交桥,也是没有把路线摆平而成的。相传一位封建暴君死到临头时留下遗嘱,把国土瓜分给他的五个儿子做世袭领地,这五个小子后来在自己的领地上建造豪华宫殿,他们还企图修一些驿道,使彼此的宫殿两两相通,又要求道路不交叉,结果这五个愚蠢的王子煞费苦心,终告失败,这是一个典型的"无法摆平"的例子,其中道理我们过一会儿就会弄明白。

我们在纸上画一个图时,有时可以避免两边交叉的现象,有时不可避免,能避免者,称为平面图,例如 K_5 与 $K_{3,3}$任意删去一条边则可以摆平,使得每两条边都不在内点相交,见图 3-37。

画在平面上能够使任两边不在内点相交的图称为平面图。图 3-37 中的图就是平面图。

树是平面图,可以如下把树镶嵌在纸面上:任取一顶 $v_0\in V(T)$,T 是树,把 v_0 画在一组水平的平行线的第一条(从上向下数)上,第二条平行线上等距地画上v_0 的邻顶 $v_1,v_2,\cdots,v_k$,连接直

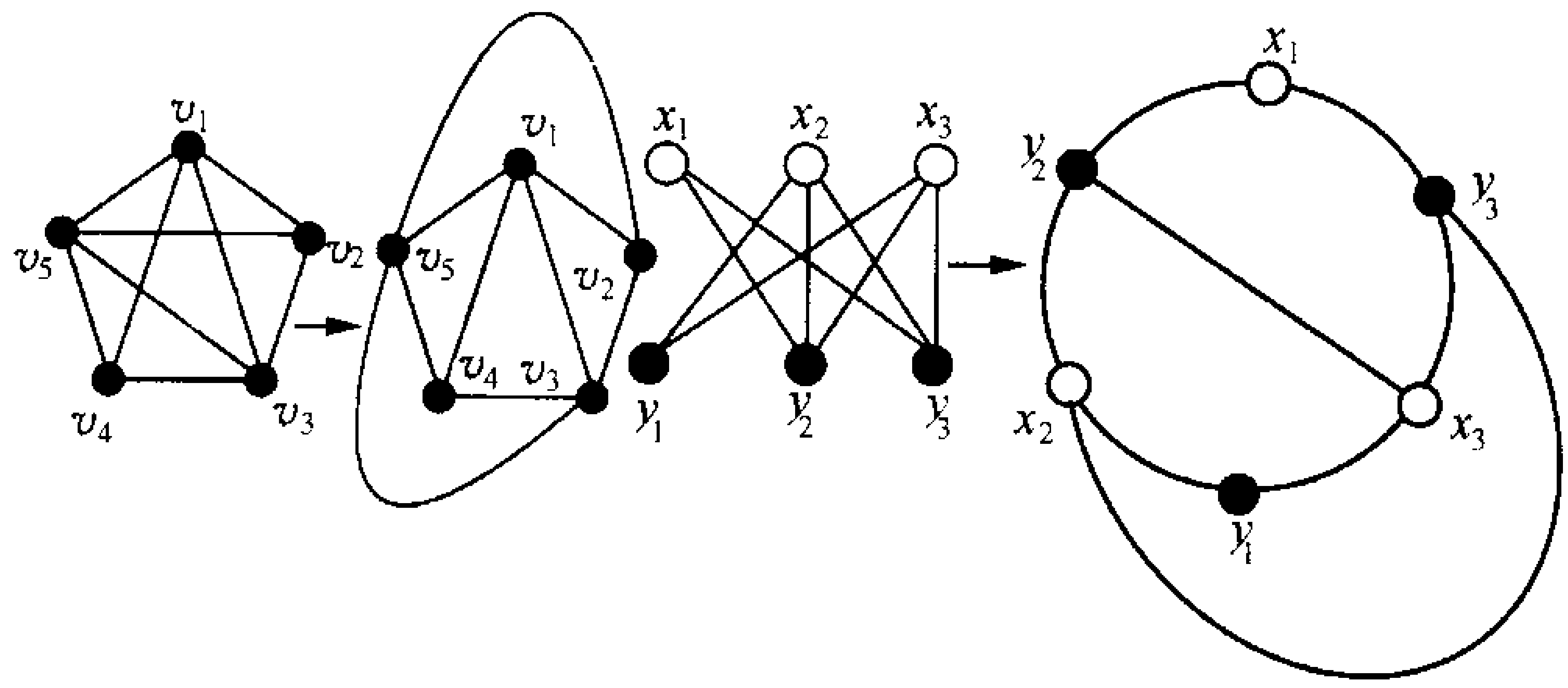


图 3-37

线段 $v_0v_1, v_0v_2, \cdots, v_0v_k$；第三条平行线上依次画出 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 的尚未画出的邻顶，间距为 1，且把 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 向下与其邻顶用直线段相连，如此类推直至把 T 画完，这样的图示中无任何两边在内点相交，可见 T 是平面图。

3.26 多面体黄金公式

平面几何中的正多边形有无穷多种，在立体几何当中，由全等正多边形为面每顶处棱数相等的正多面体是否也有无穷多种？如果不是，共有几种正多面体，它们的顶数、棱数和面数是多少？对于一般的凸多面体，有没有任意棱数的多面体？例如，有七条棱的多面体吗？

1736 年，欧拉给出了一个关于多面体的公式，一劳永逸地彻底解决了这些问题。我们知道，多面体是平面图，讨论平面图可以解决多面体的一些问题。

把连通平面图 G 画在平面上，使无边在内点相交，把平面划分成若干区域，每一区域称为平面图的一个面，面数用 φ 表示，若 ν 和 ε 分别表示顶数和边数，则下面的欧拉公式成立

$$\nu-\varepsilon+\varphi=2$$

由于这个公式简单漂亮，用途极广，人称多面体黄金公式，它的证明十分简洁，对 φ 用数学归纳法证明如下：

$\varphi=1$ 时，G 中无圈，又 G 连通，则 G 是树，于是 $\varphi=1$，$\varepsilon=\nu-1$，这时 $\nu-\varepsilon+\varphi=\nu-(\nu-1)+1=2$，欧拉公式成立。

假设对于 $\varphi\leqslant k(k\geqslant 1)$ 时，公式已成立，考虑 $\varphi=k+1$ 的情形，由于 $\varphi=k+1\geqslant 2$，G 中有圈，设 e 是某圈 C 上一边，则 $G-e$ 仍是连通图，被 e 分隔的两个面变成 $G-e$ 中的一个面，于是 $\varphi(G-e)=k$，由归纳法假设

$$\nu(G-e)-\varepsilon(G-e)+\varphi(G-e)=2$$
$$\nu(G)-[\varepsilon(G)-1]+[\varphi(G)-1]=2$$
$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=2$$

证毕。

把平面图画在平面上，使得边不交叉，可以有多种画法，例如可使任一顶点画在平面上面积无穷的那个所谓外面的边界上，但由欧拉公式，各种画法的面数 φ 是常数。

3.27 正多面体为何仅五种

(1) 多面体的棱数不会少于 6，不等于 7

事实上，以多面体的顶为图 G 之顶点，以多面体的棱为 G 的边，则 G 是连通平面图。又 $\nu(G)\geqslant 4$，$\varphi(G)\geqslant 4$，由欧拉公式得

$$\varepsilon(G)=\nu(G)+\varphi(G)-2\geqslant 4+4-2=6$$

即棱数不少于 6。

由于 $2\varepsilon(G)\geqslant 3\varphi(G)$，若有七棱多面体，则 $2\times 7\geqslant 3\varphi(G)$，$4\leqslant\varphi(G)\leqslant\frac{14}{3}$，$\varphi(G)$是整数，只有 $\varphi(G)=4$，而四个面的多面体只有六条棱，故无七条棱的多面体。

六条棱的多面体是存在的，正四面体就是一个，以 k 边形为底的棱锥是 $2k$ 条棱的多面体，$k\geqslant4$；而把 $k-1$ 边形为底的棱锥底角处的一个三面角锯掉一个小“尖儿”，则得 $2k+1$ 条棱的多面体，所以对于 $n\geqslant6$，$n\neq7$ 的 n，皆存在 n 棱多面体。

(2) 正多面体只有五种

不会有这样的正多面体，它的面是正六边形，因为正多面体的一个顶点处至少有三个面拼在一起，而正六边形每个内角为 120°，三个正六边形拼在一起已经是 360°，形成平面的一部分，形不成正多面体的“顶尖”了。边数再多的正多边形更没办法做一个正多面体的面，因为它们的每个内角超过了 120°。可见正多面体的面只可能是正五边形、正方形和正三角形。

①正三角形为面的正多面体。

情形 1 若组成的正多面体每顶皆 3 次，则 $3\nu=2\varepsilon$，$\nu=\frac{2}{3}\varepsilon$，$2\varepsilon=3\varphi$，$\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=6$，$\nu=4$，$\varphi=4$，这种多面体是正四面体。

情形 2 若组成的正多面体每顶皆4次，则 $4\nu=2\varepsilon$，$\nu=\frac{1}{2}\varepsilon$，$3\varphi=2\varepsilon$，$\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{1}{2}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=12$，$\nu=6$，$\varphi=8$，这种多面体是正八面体。

情形 3 若组成的正多面体每顶皆5次，则 $5\nu=2\varepsilon$，$\nu=\frac{2}{5}\varepsilon$，$3\varphi=2\varepsilon$，$\varphi=\frac{2}{3}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{5}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{3}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=30$，$\nu=12$，$\varphi=20$，这种多面体是正 20 面体。

②正方形为面的正多面体。

这种正多面体每顶只能 3 次，故 $3\nu=2\varepsilon$，$\nu=\frac{2}{3}\varepsilon$，$4\varphi=2\varepsilon$，$\varphi=\frac{1}{2}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=12$，$\nu=8$，$\varphi=6$，这种多面体是立方体。以上得到的四种正多面体的形象见图 3-24。

③正五边形为面的正多面体。

这种多面体每顶皆 3 次，于是 $3\nu=2\varepsilon$，$\nu=\frac{2}{3}\varepsilon$，$5\varphi=2\varepsilon$，$\varphi=\frac{2}{5}\varepsilon$，代入欧拉公式得

$$\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{5}\varepsilon=2$$

解得 $\varepsilon=30$，$n=20$，$\varphi=12$，这种正多面体是正 12 面体，见图3-38。

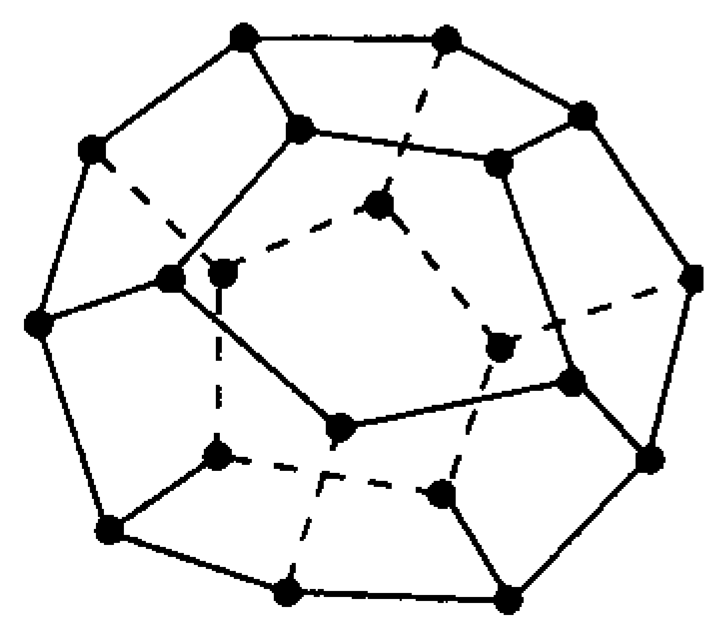


图 3-38

可见只有以下五种正多面体：

面形	正三角形	正方形	正三角形	正五边形	正三角形
面数	4	6	8	12	20
棱数	6	12	12	30	30
顶数	4	8	6	20	12
每顶处棱数	3	3	4	3	5

3.28 非平面图的两个疙瘩

不是什么图都可以摆平画在平面上，使得边不交叉的。1930 年，

波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowsky)证明了下面的定理:

G 是平面图的充要条件是 G 中无可以收缩成 K_5 或 $K_{3,3}$的子图。

所谓收缩是指把一些边收缩成长度为0,且使其两端点重合的过程。例如图3-39。

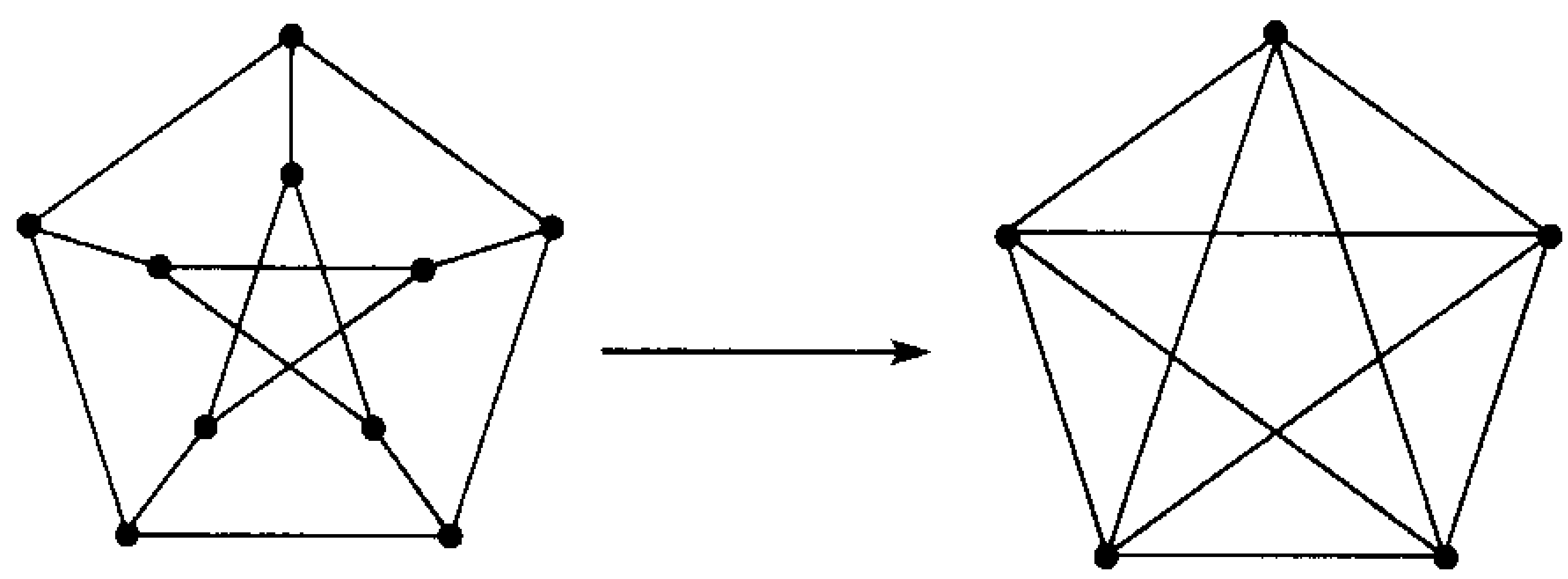


图 3-39

可见 K_5 与 $K_{3,3}$是图中的两个"瘤子",而且是恶性的,只要有这两种疙瘩之一时,就不可摆平了,没有这种疙瘩,则一定可以摆平。为了证明 K_5 与 $K_{3,3}$是非平面图,需要用到下面的公式

$$\sum_{i=1}^{\varphi} d(f_i) = 2\varepsilon \tag{3.3}$$

其中 f_i 是平面图的面,$d(f_i)$是面 f_i 边界上的边数,不过 f_i 的边界上有桥时,此桥在 $d(f_i)$中要算2,如图3-40中 $d(f_1)=6$,事实上,沿 f_1 的边界走一周,那个勺子把(桥)要走两遍。

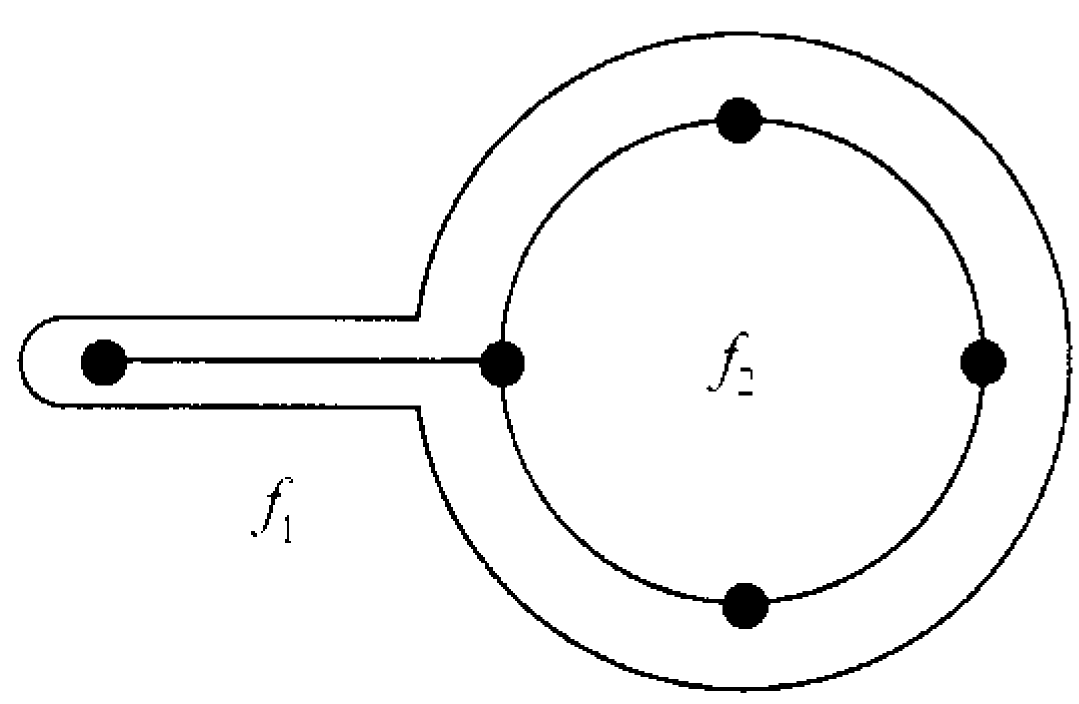


图 3-40

平面图可以把边不交叉地安排在平面上，可见它的边不会太多太密。对于平面图 G 有公式

$$\varepsilon(G) \leqslant 3\nu(G) - 6 \tag{3.4}$$

$$\delta(G) \leqslant 5 \tag{3.5}$$

其中 $\delta(G)$是 G 的最小的顶次数，$\nu \geqslant 3$ 是顶数。

事实上，由于 G 是连通平面图时，对每个面 f，$d(f) \geqslant 3$，于是由公式(3.3)得

$$2\varepsilon = \sum_{i=1}^{\varphi} d(f_i) \geqslant 3\varphi$$

由欧拉公式，$3\nu - 3\varepsilon + 3\varphi = 6$，于是

$$3\nu(G) - 6 = 3\varepsilon - 3\varphi \geqslant 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon$$

由于

$$\delta\nu \leqslant \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon \leqslant 2(3\nu - 6)$$

得

$$\delta \leqslant 6 - \frac{12}{\nu}$$

故 $\delta \leqslant 5$，至此证出(3.4)、(3.5)式为真。

由公式(3.4)，若 K_5 是平面图，则 $\varepsilon(K_5) \leqslant 3\nu(K_5) - 6$，即 $10 \leqslant 3 \times 5 - 6 = 9$，这不可能，可见 K_5 非平面图。

若 $K_{3,3}$是平面图，又它无奇圈，所以它的每个面的边界上至少 4 条边，于是

$$4\varphi \leqslant \sum_{i=1}^{\varphi} d(f_i) = 2\varepsilon(K_{3,3}) = 2 \times 9 = 18$$

故 $\varphi \leqslant \frac{18}{4}$，即 $\varphi \leqslant 4$，代入欧拉公式得

$$2 = \nu(K_{3,3}) - \varepsilon(K_{3,3}) + \varphi(K_{3,3}) \leqslant 6 - 9 + 4 = 1$$

矛盾，可见 $K_{3,3}$不是平面图。

前面提到的“五王子修路”问题显然无解，因为他们干的是想把

$\boldsymbol{K_5}$ 摆平的傻事！ K_5 是非平面图，不可能边不交叉地画在地平面上，除非他们认可有两座宫殿间不设直通驿道或建造一座立交桥，见图 3-41，①③与②⑤交叉处是立交桥。

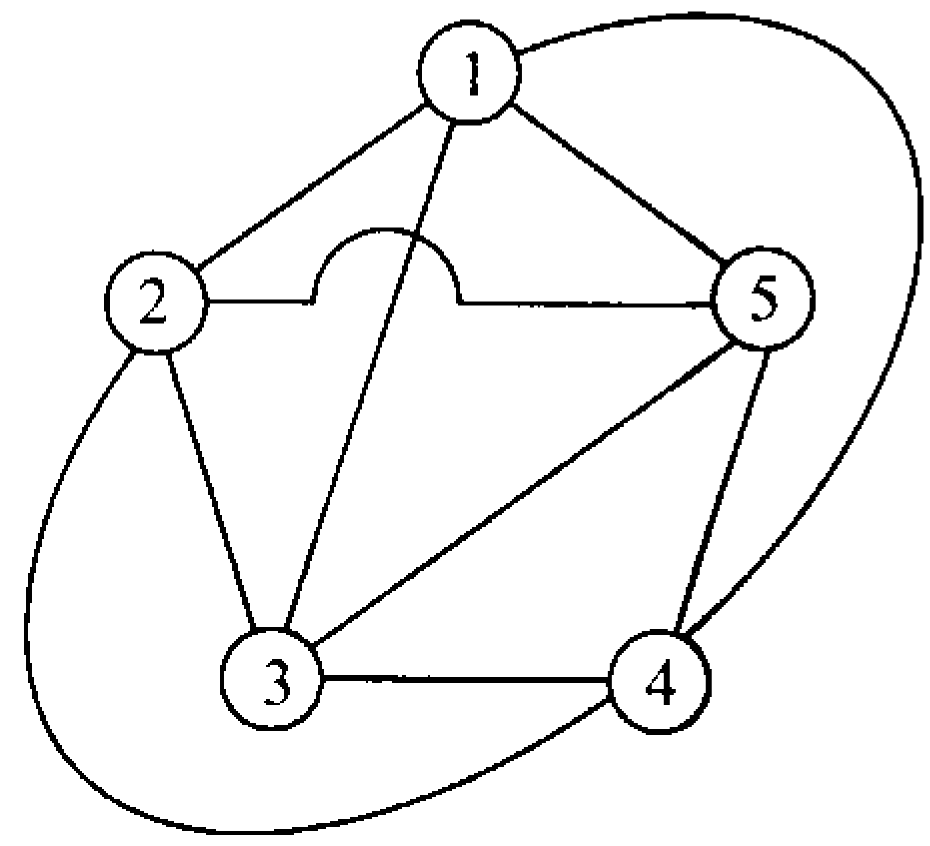


图 3-41

3.29 彩色图，不仅为了美

用几种颜色给一个图上色，使其每个顶或每条边或（平面图的）每个面着某种颜色，于是图上色彩斑斓，颜形俱佳，不愧为数学园地上的艺术品。如果邻顶异色或邻边异色或邻面异色，则分别称为正常顶着色、正常边着色或正常面着色；正常着色时使用的最少颜色数目，分别称为图的色数、边色数或（平面图的）面色数；且分别记成 $X(G)$，$X'(G)$和 $X^*(G)$。

前面讲过的地图染色时的四色猜想可以写成

$$X^*(\text{平面图})\leqslant 4$$

染一个省（国家）的版图时，可以仅把其省会（首都）染成某种颜色，以省会的颜色代表全省已全面积染上了这种颜色；以省会为顶，仅当两省相邻时（有一段分界线）在两省会间连一边，构成平面地图的对偶图 G^*，于是 $X^*(\text{平面图 } G)=X(G^*)$。这样就把面正常着色的问题化成顶正常着色的问题了。四色问题可以写成

$$X(\text{平面图})\leqslant 4$$

四色问题至今仍然困惑着数学界，甚至殃及为数极多的业余数学爱好者。正如美国当代图论专家哈拉里（Harary）所言："四色猜想可以改名叫做'四色病'，因为它真的像传染病似的在数学界流行，虽然还没有因它致死的消息，但它的确会使感染者异常痛苦，而且已经发现父亲传给了儿子的事，看来它甚至是遗传性疾病。"哈拉里说的

是真话，绝非故弄玄虚。最近十几年当中，本书作者收到大学生和大中小学教师等各种年龄的人士寄来的稿件，宣称他们已经证明了四色猜想，希望给予肯定的评价，其中不乏十几年如一日废寝忘食的入迷者，甚至因此心力交瘁，实在令人敬佩。无奈那些手写的文稿皆因缺乏数学的严格性，只能说是某种“说明”而不够称为正确证明的资格。事实上，就目前图论发展的水平，手写的 4CC 证明问世的时机未必已经成熟，奉劝数学爱好者，不可轻信“有志者事竟成”之类唯意志论的误导，应当懂得，数学上的确存在百思不得其解的难题。切不可抓住 4CC 之类的难题不放。

给图上色，不仅仅是为了美，借助于着色的思路和技术来解决的实用问题非常之多，不信请看下面实例。

(1) 期末考试至少几天

全校共 n 门功课需要期末考试，不少学生不止选修一门功课，不能把一位同学选修的两门课安排在一个时间考试；以每门功课为顶，仅当两门功课被一些同学选修时，在此二顶之间连一条边，构成图 G。我们对 G 进行正常顶着色，$X(G)$即为所求的期末考试的最少场次。若每天考两场，则全校要进行 T 天考试

$$T=\begin{cases}\frac{1}{2}X(G), & X(G)\text{为偶数}\\ \left[\frac{1}{2}X(G)\right]+1, & X(G)\text{为奇数}\end{cases}$$

(2) 至少需要几间库房

有些货物，不能放在同一个库房，例如黄鼠狼和小鸡，放在一起不安全，问至少需要几间库房？

以货物为顶，仅当二宗货物放在一起不安全时，在此二顶间连一边，得一图 G，$\chi(G)$即为所需库房的最少间数。

(3) 距离约束同信道频率分配问题

地面上有若干无线电发射台,要对每个发射台分配一个发射频率,频率用自然数从 1 起编号,称为信道号码。为排除同频率造成干扰,要求使用同一信道的发射台相距必须大于指定正数 d,问至少要用几个信道?

以$\frac{d}{2}$为半径,以发射台为中心作圆,仅当两圆有公共点时,在两圆的中心间连一边,以圆心为顶点,构成一图 G, $X(G)$即为所需的最少信道数目。

3.30 五色定理和肯普绝招儿

1890 年,希伍德(Heawood)继承肯普(Kemple)1879 年误证四色定理时用的方法,证明了五色定理

$$X(\text{平面图})\leqslant 5 \tag{3.6}$$

用对平面图 G 的顶数 ν 的归纳法来证明五色定理:

$\nu\leqslant 5$ 时,(3.6)式显然成立。假设 $\nu\leqslant n-1$ 时(3.6)式已成立,考虑 $\nu=n$ 的平面图G。由于 $\delta(G)\leqslant 5$,即存在 $\nu_0\in V(G)$, $d(v_0)\leqslant 5$。

情形 1 $d(v_0)\leqslant 4$,考虑 $G-v_0$,由归纳法假设,$\chi(G-v_0)\leqslant 5$,把 $G-v_0$ 用不超过 5 种颜色正常着色后,再把 v_0 着以异于其邻顶的第五种颜色即可。

情形 2 $d(v_0)=5$。设 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 是 v_0 的五个邻顶,按逆时针顺序画在 v_0 周围如图 3-42。它们分别着以 1, 2, 3, 4, 5 五种颜色。以下其他顶着色时只允许用这五种颜色;先把 $G-v_0$ 用以上五色正常着色。

记 $G_0=G-v_0$, G_{13}是由 1 和 3 两种颜色的顶为顶集,边的两端为 1 色与 3 色时为 G_{13}的边形成的 G_0 之子图。G_{24}作相似理解。

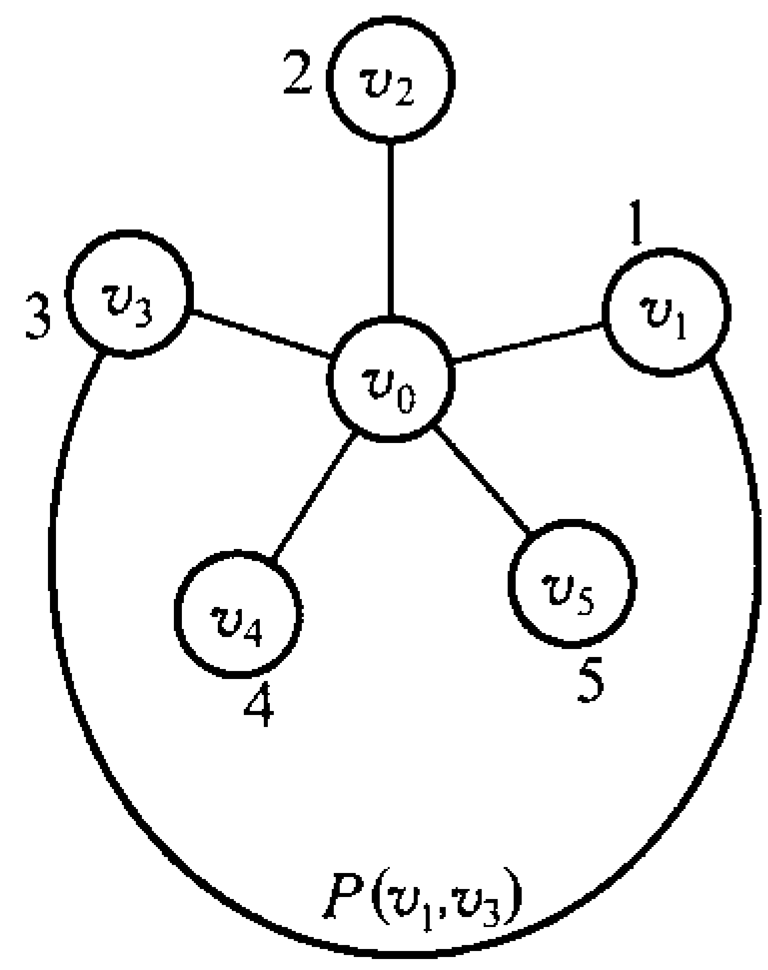


图 3-42

若在 G_{13}中 v_1 与 v_3 分居于两个连通片，把含 v_1 的那个连通片中的 1 色与 3 色互换，由归纳法假设，$X(G_0)\leqslant 5$，这时再把 v_0 着以 1 色即可。

若 v_1 与 v_3 在 G_{13}的同一连通片内，则存在轨 $P(v_1, v_3)$，在 $P(v_1, v_3)$上 1 色与 3 色交替出现，而在 G 中，$v_0v_1P(v_1, v_3)v_3v_0$ 是一个圈，v_2 与 v_4 分居于此圈之内外，在 G_0 中，子圈 G_{24}中，v_2 与 v_4 必分属于 G_{24}的两个连通片，不然，G_{24}中有轨道 $P(v_2, v_4)$与 $P(v_1, v_3)$相交于一个公共顶 u，u 在$P(v_1, v_3)$上应是 1 色或 3 色，u 又在$P(v_2, v_4)$上，u 应为 2 色或 4 色，这当然不可能。

既然 v_2 与 v_4 分属于 G_{24}的两个连通片，把 v_2 所在的连通片中的 2 色与 4 色交换，再把 v_0 染上 2 色即可。至此证出五色定理 (3.6)。

证明中两次使用两色互换的技术，这是肯普首创的一个绝招。在关于图的色的研究当中，人们不只一次地引用过这一绝招。阿佩尔也承认，他们在用计算机证明 4CC 时，也借鉴了肯普当年证明 4CC 时用过的方法和思路。

四色定理尚缺可视性证明，进一步的问题则更加尖锐：

$$任给一个平面图 G, \chi(G)\leqslant 3 吗 \qquad (3.7)$$

这个问题有时回答：是，例如 $G\cong K_3$；有时回答：否，例如 $G=K_4$，所以已无三色定理可言，但对任意给定的平面图 G，如何有效地判定 $\chi(G)$是否不大于 3，则是比四色定理还要困难的问题，四色定理还可以用计算机给出证明，而(3.7)问题目前用计算机也不能有效地解决。

3.31 颜色多项式

四色猜想问世一百多年来，数学家们对它的研究虽皆以失败而告终，但在人们冲击4CC的崎岖道路上却留下许多闪烁着智慧之光的所谓“中间成果”，1912年，伯克豪夫为研究4CC而引入的颜色多项式就是其中的杰作之一。

今有 $k(\geqslant 1)$ 种颜色，用来对顶集为 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的图 G 进行正常顶着色，问有几种不同的着色方式。

所谓两种着色方式不同，是指至少有一个顶，在两次着色中的颜色不同，用 $P(G,k)$ 表示 G 用 k 种颜色正常顶着色时不同的着色方式之数目。于是4CC可写成

$$P(\text{平面图}, 4)>0$$

$P(G,k)$ 的确定和证明4CC一样，也是十分困难的，我们只能对一些特殊图 G 求得 $P(G,k)$。

①若 $E(G)=\phi$，则 $P(G,k)=k^n$。

②$P(G,k)>0$ 的充要条件是 $\chi(G)\leqslant k$。

③$P(K_n,k)=k(k-1)(k-n+1)$。

对于一般图 G，有公式

$$P(G,k)=P(G-e,k)-P(G\cdot e,k) \tag{3.8}$$

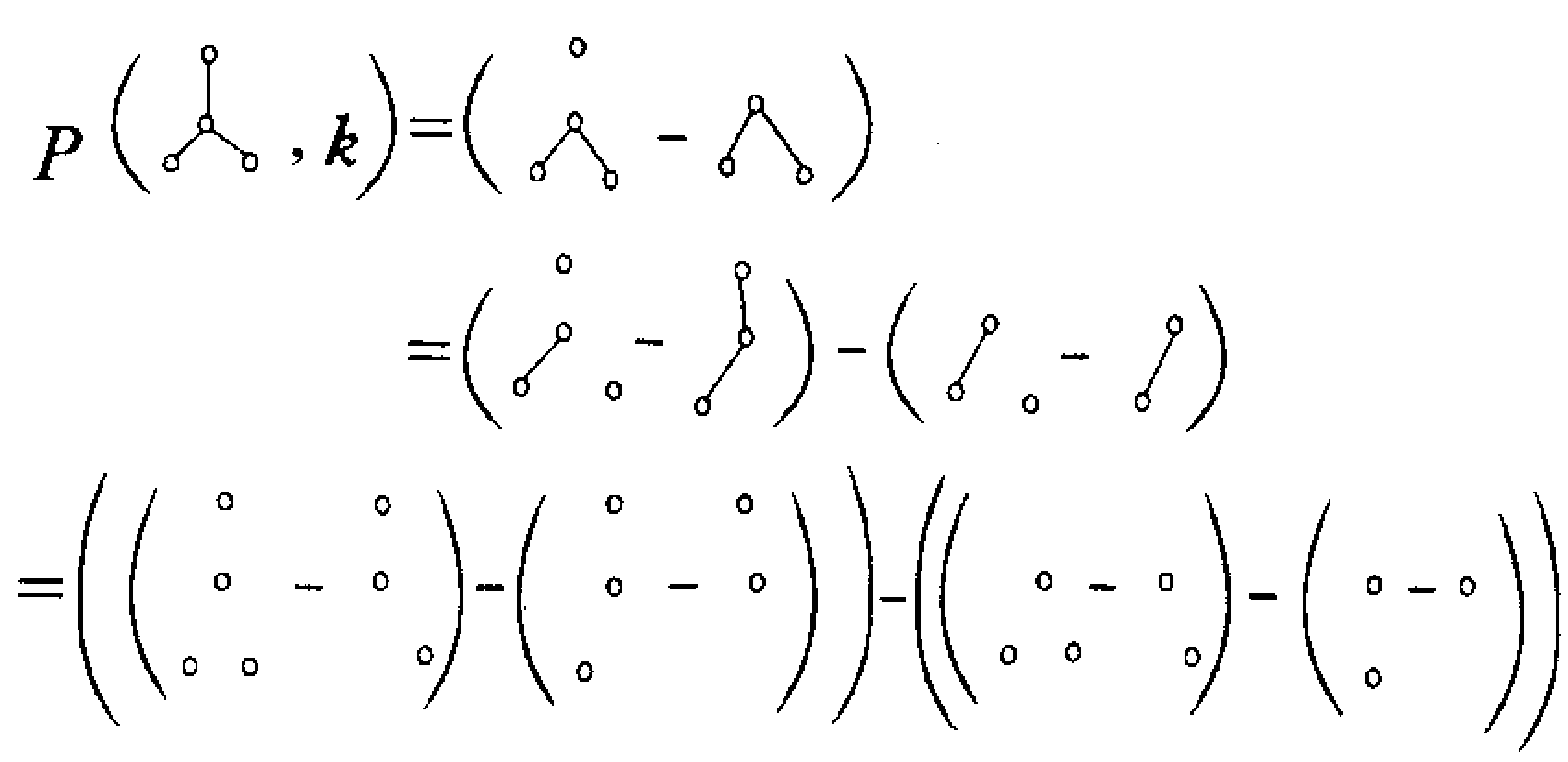
其中 $G\cdot e$ 是把 G 中边 e 收缩掉，其两端点重合。

事实上，考虑 $P(G-e,k)$，在对 $G-e$ 用 k 种颜色正常顶着色时，e 的端点 u 与 v 可以同色，也可以异色；若 u 与 v 同色，则 $G-e$ 的着色方式数为 $P(G\cdot e,k)$，若 u 与 v 异色，则 $G-e$ 的着色方式数为 $P(G,k)$，所以 $P(G-e,k)=P(G,k)+P(G\cdot e,k)$，于是公式(3.8)成立。

可惜的是公式(3.8)对边数多的图是一个无能的“坏公式”，因为

对 ε 条边的图,若用公式(3.8)把 G 变成两个图$G-e$ 与$G\cdot e$后,$G-e$ 与$G\cdot e$ 再各自减一边缩一边变成两个图,如此会变换出 2^{ε} 个图来,每个皆无边之图,可以用无边图的公式来写出多项式$P(G,k)$。但是 2^{ε} 这个数量太巨大,例如 2^{100}, $\lg 2^{100}=100\lg 2\approx 30.10$,可见 2^{100} 是个 31 位数,绝对不可能有那么多时间执行这个公式。

但对边少的图,公式(3.8)还是可以用的,例如



$$=((k^4-k^3)-(k^3-k^2))-((k^3-k^2)-(k^2-k))$$
$$=k^4-3k^3+3k^2-k$$
$$=k(k-1)^3$$

图论当中这种"形数同炉"的运算并非此处一次出现,又直观又定量,颇为新颖。

我们从公式(3.8)的反复执行中发现,对于任何图,都可化成秃图来求其 $P(G,k)$,所以 $P(G,k)$是 k 为变元的 n 次多项式,n 是G 之顶数,且此多项式无常数项,此多项式称为颜色多项式。

上面求得 4 顶树的多项式为 $k(k-1)^3$,从"形数同炉"的运算过程中我们可以发现,对任何 n 顶树 T,有公式

$$P(T,k)=k(k-1)^{n-1} \tag{3.9}$$

用归纳法来证(3.9)。当 $n=2$ 时,(3.9)式显然成立;假设对于 n 个顶的树 T,(3.9)式已成立,考虑 $n+1$ 个顶的树 T',设 v 是 T' 的一个叶,令 $T=T'-v$,由归纳法假设,$P(T-v,k)=k(k-1)^{n-2}$,对于 T'的用k 种颜色的每种正常顶着色,对 v 的颜色选择有

$k-1$ 种方式,可见 $P(T,k)=k(k-1)^{n-1}\cdot(k-1)=k(k-1)^{n}$。

关于颜色多项式,也有不少问题等待我们去研究,例如下面的 Read 猜想至今无人证其明亦无人证其伪。

Read 猜想:按降幂排列的颜色多项式的系数的绝对值先是严格单调上升,继而严格单调下降。

本来企图用颜色多项式这种新概念来解决 4CC 难题,结果目的没有达到,反而给自己增添了难题。这真是,知识越多,本领越高,面临的困难越大。

3.32 八皇后和五皇后问题

八皇后问题:国际象棋盘上,双方共有八个"后",这八个后在哪些格里,才能出现谁也不能吃掉对方后的局面?

五皇后问题:我方有五个"后",应放哪些格子上,才可吃掉对方的任何一个子儿?

为解决上述皇后问题,应当从独立集谈起。$I\subseteq V(G)$,若 I 中顶两两不邻,则称 I 是 G 的独立集。K_n 中只有由一个顶构成的独立集,而 $K_{n,n}$ 中的 X 集合与 Y 集合都是独立集。在顶正常着色中,同色顶构成独立集。

以 64 个格为顶集,处于同一横行,同一纵列和在同一"斜行"上的两顶相邻,所谓"斜行"是指与水平线成 45°角的方格串,如此构成的图 G 称为"皇后图",即把一后放在 G 的任一顶上,它可以吃掉其邻顶上的对方的棋子。

高斯八皇后问题就是求皇后图 G 上的由八个顶组成的独立集 I;显然,这个独立集是 G 的一切独立集当中顶数最多者;图论中称顶数最多的独立集为最大独立集,其顶数称为该图的独立数,记之为 $\alpha(G)$,例如 α(皇后图)$=8$。除最大独立集之外,还有一种独立集称

为极大独立集，即 I 已是独立集，但再添加一顶则不是独立集了，这种不能在原有的基础上扩充的独立集叫做极大独立集，它是个局部概念，但不是全局性概念，极大独立集不一定是最大独立集。

五皇后问题就是求皇后图 G 的一个极大独立集 I，使得 I 由五个顶组成。它的一个解如图 3-43 所示，由此知极大独立集有的就不是最大独立集。

图 3-43 中，皇后图的每个顶要么在五个黑子组成的顶子集中，要么是这五个黑子中的某个的邻顶，即受黑子的"支配"，这五个黑子组成的集合称为支配集。一般地，设 $D \subseteq V(G)$，且任一顶 $v \in V(G)$，则或者 $v \in D$，或者 v 与 D 中一顶相邻，则称 D 为 G 的一个支配集。如果 D 是支配集，从 D 中删除一顶后则不再是支配集，则称 D 是极小支配集。最小支配集中的顶数称为图的支配数，记之为 $\gamma(G)$。显然，极大独立集一定是极小支配集。

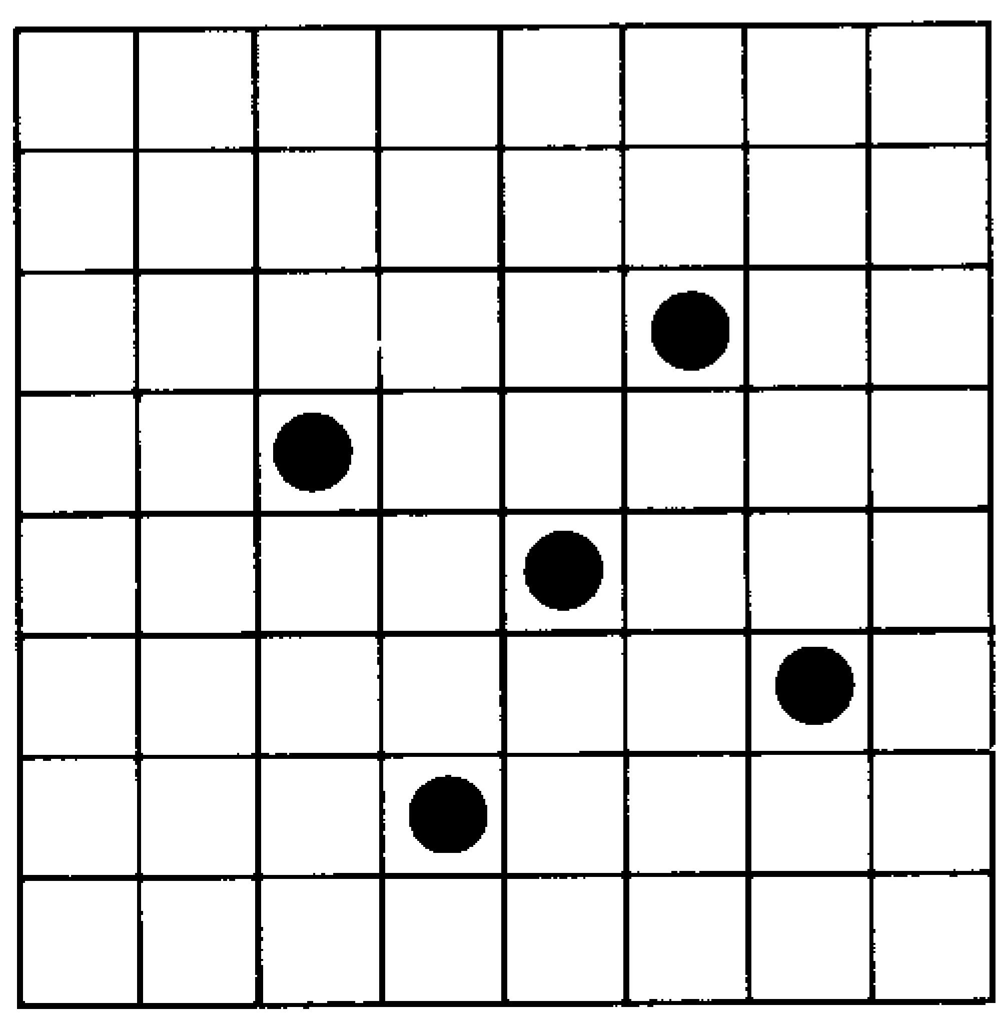


图 3-43

例如图 3-43 中的五皇后组成极大独立集，它们也就组成了一个极小支配集。

高斯八皇后问题的解在图 3-44 中给出了两个。图 3-44(a)中的解记成(72631485)，代表每个后在各列的高度，例如 7 代表第 1 列后高 7，2 代表第 2 列后高 2，6 代表第 3 列后高 6，等等。可以验证，高斯八皇后问题的解有

(72631485)　(61528374)　(58417263)

(35841726)　(46152837)　(57263148)

(16837425)　(57263184)　(48157263)

(51468273)　(42751863)　[35281746]

上面 12 个序列的每一个都对应一个类似图 3-43 的皇后分布图，前 11 个序列对应的分布图按逆时针每转动 90°，则得另一种八皇

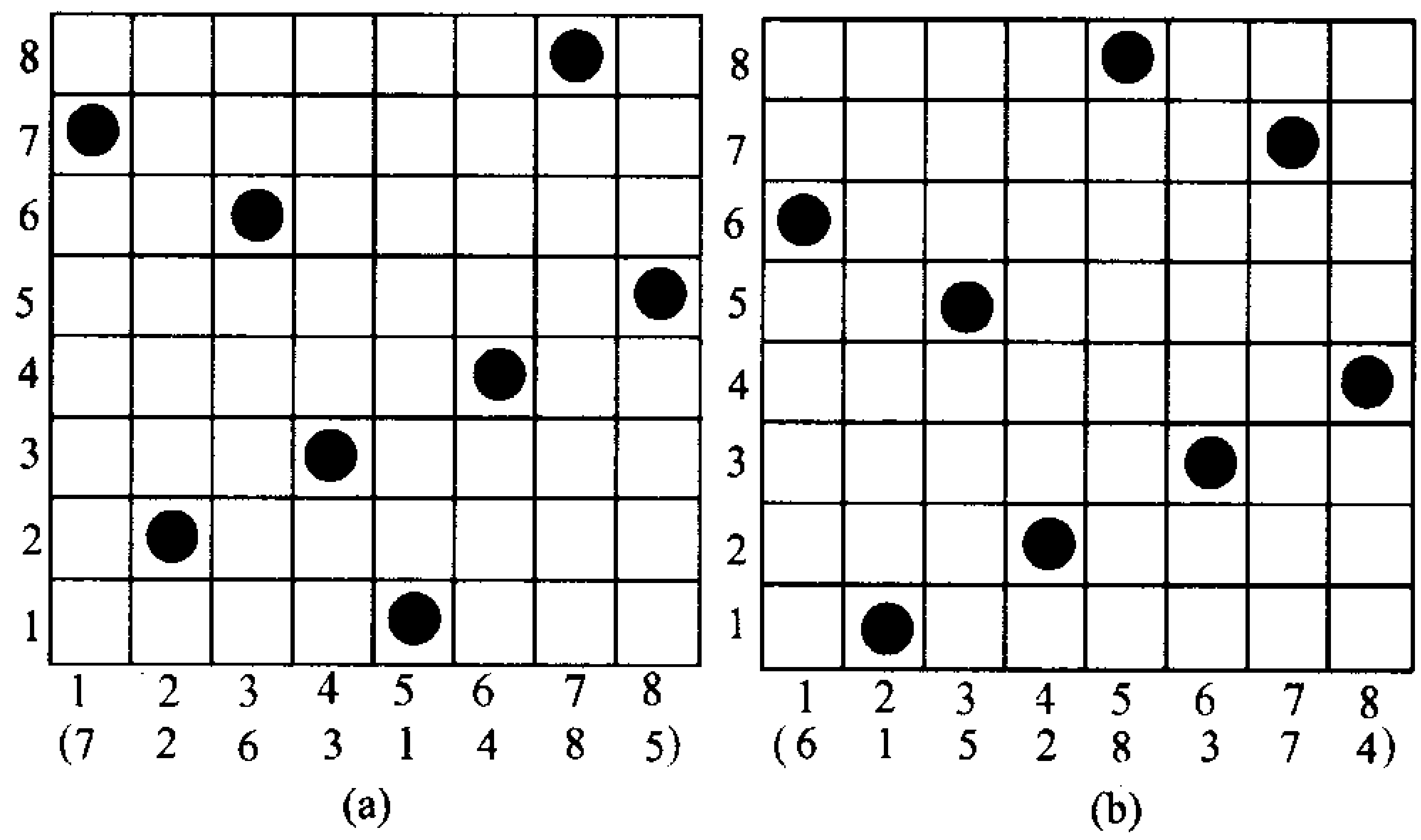


图 3-44

后分布图，旋转得到的四个分布图按向右下方的对角线对称翻身，又得四个分布图，所以共计可得 11 × 8 = 88 个解。最后那个分布[35281746]旋转 180°后复原，所以它只会旋转 90°和翻身两次，得四个分布图，最后得知，高斯八皇后问题有 88 + 4 = 92 个解。

3.33 历史上最伟大的数学家

高斯(C.F.Gauss，1777～1855)，德国不伦瑞克人，其父是泥瓦匠，父母无钱亦无意对其子进行深造。就是这位出身穷苦非书香之家的子弟，后来对科学做出了非凡的贡献，成为最伟大的数学家，他三岁时就纠正了父亲工资表上的一处计算错误。在小学读书时，老师出了一道数学题：1 + 2 + 3 + …98 + 99 + 100 = ？高斯 100 + 1，99 + 2，…51 + 50，组成 50 对，几秒钟后就报出计算结果 5050，全班师生为之惊讶。15 岁入卡罗林学院读书，其后转入哥廷根大学深造。19 岁解决了人类两千多年未解决的难题：用圆规直尺作出正 17 边形，轰动了当时的数学界。高斯去世后，他的墓碑上刻着一个用圆规直尺做出的正 17 边形。22 岁时，用四种方法证明了代数基本定理，获哥

廷根大学博士学位。他证明了一个一般的定理：

凡边数是 $n=2^{2^k}+1, k=0,1,2,\cdots\cdots$ 的正多边形皆可用圆规直尺作出。

例如 $n=3,5,17,257$ 条边的正多边形皆可用圆规直尺作图。

高斯重视科学表达的严格性与精炼，他对前人一些经不起推敲的叙述和证明完全不能容忍，而决心使自己的著作在这方面无懈可击。他在致友人的信中明言："你知道我写得慢，这主要是因为我总想用尽量少的字句来表达尽量多的思想，而写得简短比长篇大论地写更要花费时间。"

高斯才思泉涌，只得把科学发现作成简短的日志，来不及写成详述的论文，他说："给予我最大愉快的事不是所取得的成就而是得出成就的过程。当我把一个问题搞清楚了，研究透彻了，我就放下不管，转而探索未知的领域。"有人估计，如果要把他在科学上的每一项发现都写成完满的形式发表出来，那就需要好几个长寿的高斯终生的时间。他在数论、函数论、概率统计、微分几何、非欧几何等数学领域都有开创性的巨大成就。

高斯又分出不少精力研究物理学和天文学，开创了地磁理论，发明了电磁铁电动机，1807 年任哥廷根新天文台台长和天文学教授，被封为公爵，但他十分讨厌行政琐事，会议和官僚主义的繁文缛节。1840 年，雅可比在高斯家作客后给弟弟写信感叹道："如果实际天文学工作没有把这位巨大天才的精力，从他光辉的事业中分散出去，数学的情况，将与今日大不相同。"一次雅可比到高斯家谈到自己和阿倍耳在椭圆函数论方面的新发现，高斯从抽屉里拿出他 30 年前的手稿，把雅可比所说的新发现指给他看。高斯淡泊名利，不少首创的学问并未及时发表，高斯对自己极端求全求好，发表的东西都是了不起的成果。

高斯是搞理论的大师，但也十分注重实际工作，例如他干过大地

测量工作，准确测量了地球表面的大三角形，并由此促使他写出《关于曲面面积的一般论述》的名著；他用最小二乘法计算出"谷神星"的轨道，并成功地用望远镜观察到这颗很难追寻的神秘的小行星；他总结在天文台的实际工作，运用他的数学优势，写成《天体运动理论》，被公认为行星天文的圣经。此外，他还发明了望远镜和照相机上的"高斯大角度物镜"等。

1898 年，从高斯孙子家发现了只有 19 页的高斯笔记本，该日记中记载了他 146 项数学发现。数学史家评价说，把高斯的其他一切成果全不算数，仅就他孙子提供的这本日记，高斯也可以评为当代最伟大的数学家。

美国数学家 G.F. 塞蒙斯说："这就是高斯，一个至高无上的数学家，他在那么多方面的成就超过一个普通天才人物所能达到的水平，以致我们有时会产生一种离奇的感觉，以为他是上界的天人。"

3.34 妖怪的边色数

图 3-45 中画的两个漂亮图数学上称之为妖怪(snark graph)，妖怪在此是数学名词，并非贬义的绰号。这种图是每顶皆三次的无桥图，删除三条边不会使它破裂成两个有边子图，它的最小圈上的边数不少于 5，边色数为 4，满足这些要求的图很难设计(捕捉)出来，所以命名为妖怪，以示其神秘和妖美。

图 3-45(a)是佩特森(Petersen)首先讨论过的，又称 Petersen 图，它已成为图论学科的"徽章"，在各种有关图论的杂志和著作的封面上经常出现。它是顶数最少的妖怪，所以亦称"小妖"。下面论证小妖的边色数是 4。

由于小妖每顶皆三次，所以 X'(小妖)$\geqslant 3$。图 3-45(a)中已经用四种颜色 1，2，3，4 对小妖的边正常着色，故 X'(小妖)$\leqslant 4$。下面证明

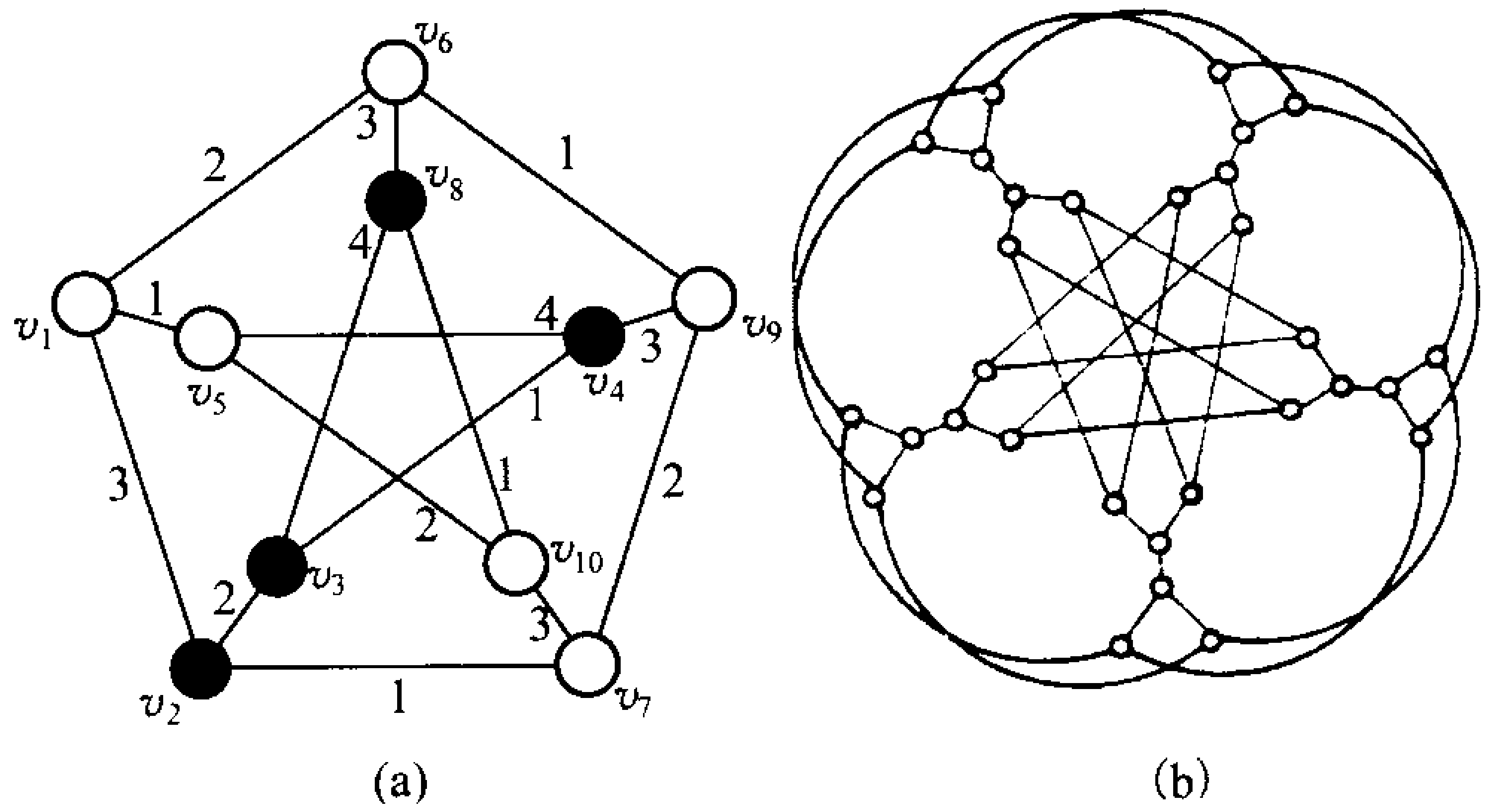


图 3-45

X'(小妖)$\geqslant 4$。为此只欠证用三种颜色不能对小妖正常边着色，我们把小妖画成图 3-46 的模样，设图 3-46 可以用三种颜色 1，2，3 正常边着色，由对称性，不妨设与 v_{10}相关联的三条边已用 1，2，3 色染好，则 v_1v_5 与 v_4v_5 分别用 2 色 3 色或 3 色 2 色着色；v_2v_7 与 v_7v_9 分别用 1 色 3 色或 3 色 1 色着色；v_3v_8 与 v_6v_8 分别用 1 色 2 色或 2 色 1 色来着色，于是这六条边的着色有 $2\times2\times2=8$ 种可能的方式需加以讨论。其中之一在图 3-46 上标出，我们来证这种方式行不通，同理可证其他七种方式也行不通，于是知用三种颜色染不了小妖的边，使邻边异色。

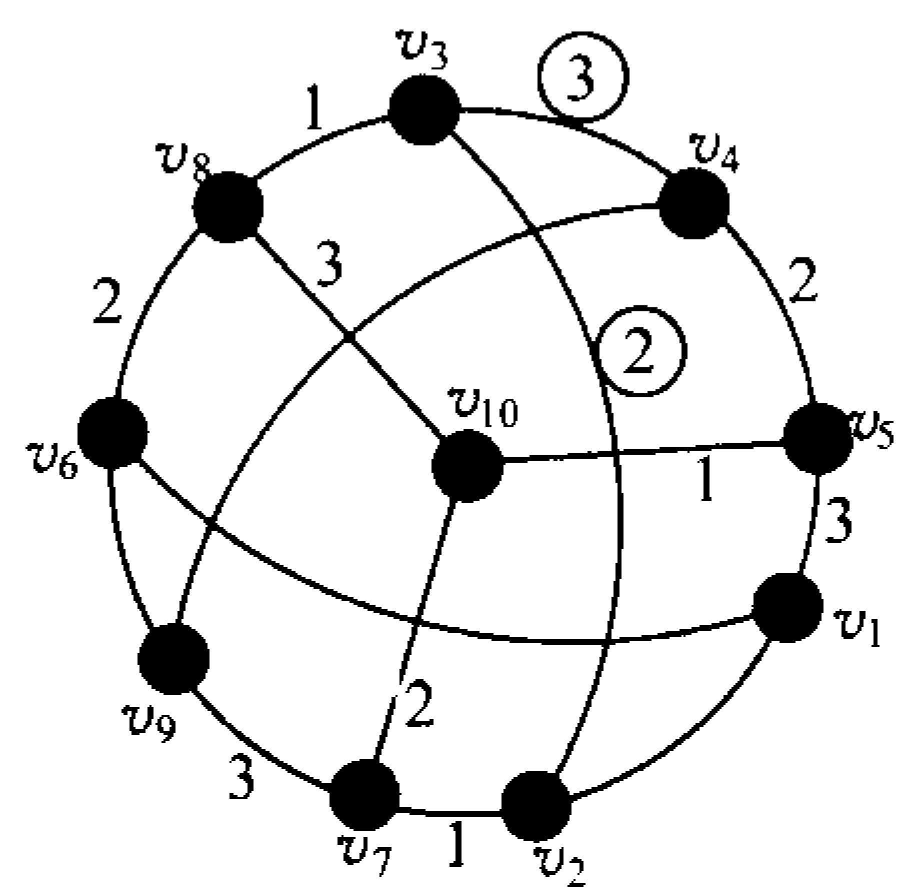


图 3-46

事实上，v_3v_4 只能选 3 色，这时 v_3v_2 只能选 2 色，进而 v_2v_1 的邻边已占用 1，2，3 三种颜色，v_2v_1 无色可选了！

至此知 X'(小妖)$=4$。

图 3-45(b)中的大妖怪之边色数亦为 4。但论证则更为纷繁，读者可在计算机上去做。

我们何苦一定要讨论各种可能的情形，用笨拙的穷举法来确定

小妖的边色数呢？难道没有简便有效的办法来求得任一图的边色数与顶色数吗？没有！至少目前还没有一个数学家或计算机专家能办到这一点；由于色数问题的本质困难，是否根本就不存在求色数的有效方法目前也没人敢说是或说否。

妖怪的边色数是其顶的最大次数加1（它的最大次数是 $\Delta=3$，$X'(\text{妖})=4=\Delta+1$）有些图的边色数恰为 Δ，例如

$$X'(K_{2n-1})=X'(K_{2n})=2n-1$$

事实上，把 K_{2n} 的 $2n-1$ 个顶分别放在正 $2n-1$ 边形的 $2n-1$ 个顶点上，把另一顶点 v_0 放在正 $2n-1$ 边形的中心，K_{2n} 的边画成直线段，$v_1, v_2, \cdots, v_{2n-1}$ 为逆时针排列，如图3-47。我们发现一个完备匹配 $\{v_0v_1, v_2v_{2n-1}, v_3v_{2n-2}, \cdots, v_nv_{n+1}\}$ 把这个匹配形成的几何图形绕 v_0 转动 $\frac{2\pi}{2n-1}$，则得另一完备匹配，如此可以得到无公共边的 $2n-1$ 个完备匹配。K_{2n} 的每条边皆在上述 $2n-1$ 个匹配之中。若把每一匹配中的边染上一种颜色，则知 $X'(K_{2n})\leqslant 2n-1$。又 K_{2n} 的每个顶与 $2n-1$ 条边关联，所以 $X'(K_{2n})\geqslant 2n-1$，可见 $X'(K_{2n})=2n-1=\Delta(K_{2n})$。

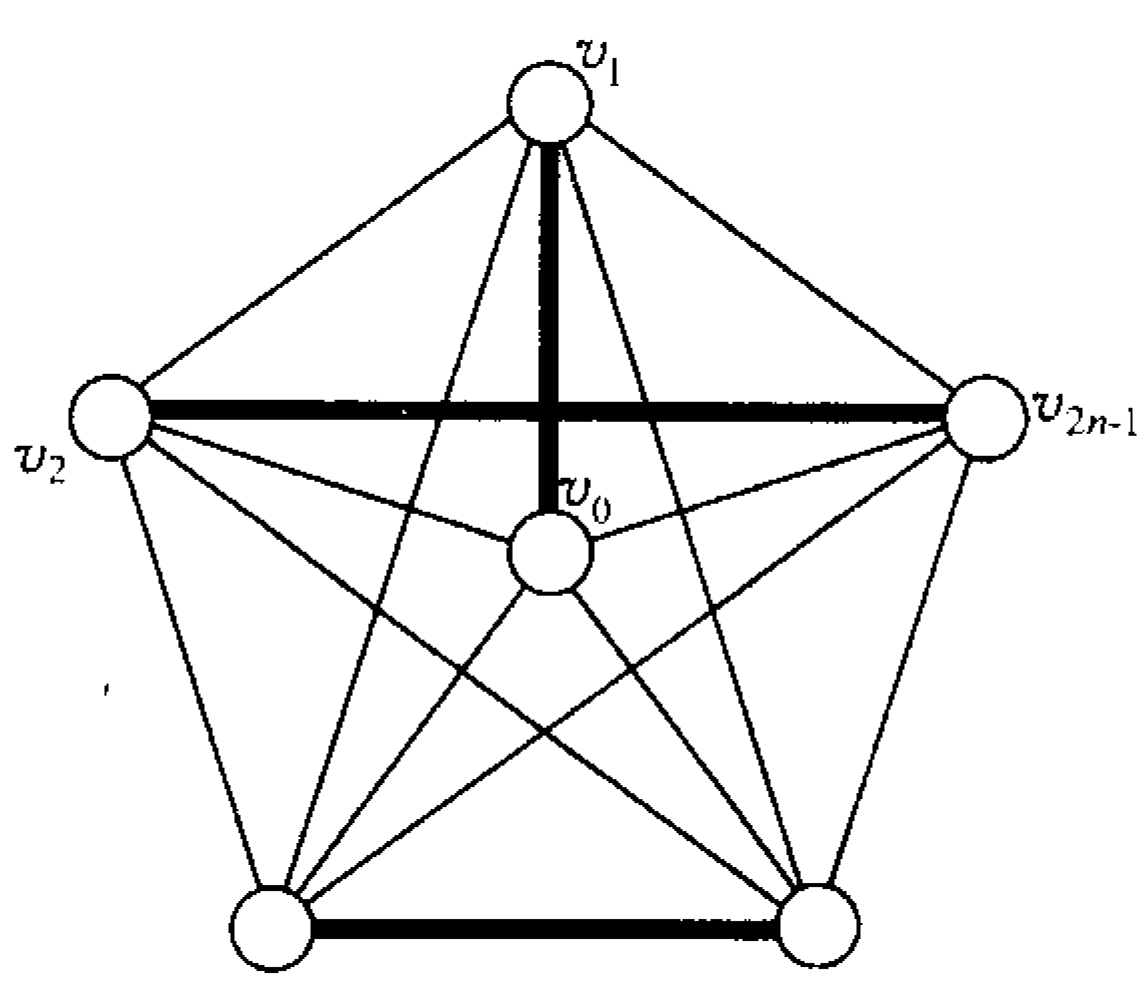


图 3-47

把图3-47中的 v_0 从 K_{2n} 上删去，得 K_{2n-1}，此 K_{2n-1} 的边已用 $2n-1$ 种颜色正常着色，故 $X'(K_{2n-1})\leqslant 2n-1$。另外，边正常着色中，同色边组成一个匹配，$K_{2n-1}$ 有 $2n-1$ 个顶，其最大匹配只能许配 $2n-2$ 个顶，所以同色边最多 $n-1$ 条，又 K_{2n-1} 的边共 $(2n-1)(n-1)$ 条，故

$$X'(K_{2n-1})\geqslant\frac{(2n-1)(n-1)}{n-1}=2n$$

-1，所以 $X'(K_{2n-1})=2n-1=\Delta(K_{2n-1})+1$。

由 $X'(K_{50})=49$，见图 3-47，可解下列问题：

某班共 50 位同学，每天两人编成一小组，25 个小组讨论数学题，但每位同学和另一位同学只能进行一次讨论，问这样的小组讨论可以持续多少天？

答：49 天。

从上面的讨论我们发现，有的图 G，$X'(G)=\Delta(G)$，有的图 H，$X'(H)=\Delta(H)+1$。

若问：什么样的图，其边色数是其最大的次数 Δ，什么样的图，其边色数是 $\Delta+1$？

这个问题从 1964 年维津（Vizing）向数学界"叫板"以来，尚无任何一位数学家能够回答！

图论这块硬饽饽，看起来很美，闻起来很香，吃起来往往消化不良，有的题目简直就一点也啃不动！这也许是图论之所以诱人的魅力所在。

3.35 亲疏恩怨，世态炎凉

在任何一个人群当中，总会有些人两两亲密，结为团伙，另一些人两两有怨或不相识，彼此相疏。如果以人为顶，两人亲近，在此二顶间连一边，两人相疏时，此二顶之间无边，形成一个社交图 G。于是任给一个图，都可以理解成为社交图，两两相疏的人构成社交图的一个独立集，两两亲近的人们则形成一个完全子图，称为社交图中的"团"。第一个非平凡的社交亲疏问题如下：

任何六个人的人群中，必有三人彼此亲近或有三人彼此疏远。

我们把相应的六顶社交图的边染成绿色，把彼此疏远的两人相应的顶之间补上一条染成红色的边（表示两人疏远，犹如交通信号中

禁行的红灯)，于是问题化成“在此两色的完全图 K_6 中必有同色三角形。”

设六人为 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$，由抽屉原理，与 v_1 关联的五条边中，必有三条同色，不妨设 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 是同色绿边，再考虑 $\triangle v_2v_3v_4$，若它是同色三角形，则命题得证，否则 $\triangle v_2v_3v_4$ 中有绿边，则此绿边与 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 中的两条构成一个绿色三角形；总之会出现同色三角形。与 v_1 相关联的边中有三条是红色时，证明与此雷同。

值得注意的是，六人是保障必有三人相近或三人相疏的最小人数，若五个人，则未必能保障必然三人相近或三人相疏。例如社交图是一个五边形时，则既无三顶团亦无三顶独立集。

用边着色的话来讲，对 K_n 的边用两种颜色任意着色，总会出现同色三角形时，n 最小是 6。这一命题记成 $r(3,3)=6$。

用上面的社交问题 $r(3,3)=6$ 可以证明一些颇为怪异的题目，例如：

设平面上六个点，任何三个点都是不等边三角形的顶点，则这些三角形中有一个三角形的最短边是另一个三角形的最长边。

为证明此题，我们用红绿两种颜色对三角形的边染色，把每个三角形的最短边染成红色，之后，把其余的边染成绿色。由于 $r(3,3)=6$，故必出现同色三角形，又每个三角形都有最短边，所以每个三角形上都有红色边，于是有一个三边全红的三角形，即它的最长边也是红的，但这条红边当初是作为某三角形的最短边才被染红了的，所以有一三角形，其最短边是另一三角形的最长边。

我们已经感触到，如果不是图的染色技术和社交问题 $r(3,3)=6$ 的巧妙运用，即使再聪明，这种偏、难、怪的题目，怕是不会这么简洁地论证严格的，我们应当感谢图论。

3.36 同色三角形

上面的三人相亲近或三人疏远问题可以推广成：用 m 种颜色任意染 K_n 的边，总会出现同色三角形，问 n 最少是几？这一问题的答案记成

$$r_m = r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{m\text{个}}$$

1955 年，格林伍德（Greenwood）和格里逊（Gleason）求得 $r_3 = r(3,3,3) = 17$，无奈 $r_4 = r(3,3,3,3) = ?$ 至今尚未解决！即用四种颜色任意给 K_n 进行边着色，必能出现同色三角形，n 的最小值是多少，至今无人知晓！

我们知道 π 的任意给定的数位上的数字的确定已经不是用手和笔可以解决的难题，只能用大型计算机逐个数位地来确定，例如，1989 年哥伦比亚大学的戴维和丘德诺夫斯基已经把 π 算到小数点后 1011196691 位，但是 π 是有定量的公式可循的，例如

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots$$

或 π 是函数 $y = \frac{4}{1+x^2}$ 的图像曲线与 x 轴所夹的面积在 $x=0$ 与 $x=1$ 之间的部分（曲边梯形的面积），而 $r(3,3)=6$，$r(3,3,3)=17$，$r(3,3,3,3)=?$ $r(3,3,3,3,3)=?$ …这无穷个值的确定，每一个都比确定 π 在相应数位上的值要难得多，$r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{m\text{个}}$ 可恨就可恨在它没有统一的计算公式或计算法则可循！

定性研究是定量不足的情况下唯一的选择，人们不能定量地解决 $r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{m\text{个}}$，但却可以定性地讨论它的好多性质，再从这些性质出发导出许多定性与定量的结论。例如，舒尔（Schur）1916 年得到下

面的重要结论，称为舒尔定理。

如果 S_1, S_2, …, S_n 是 $\{1, 2, \cdots, r_n\}$ 的任一划分，其中 $r_n = r\underbrace{(3,3,\cdots,3)}_{n个}$，则某个子集 $S_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 中有三个数 x, y, z 满足方程 $x+y=z$。

事实上，以 $\{1,2,\cdots,r_n\}$ 为顶集构作 K_{r_n} 用 $1,2,\cdots,n$ 这 n 种颜色对 K_{r_n} 的边进行着色，当且仅当 $|u-v|\in S_i$ 时，把边 uv 染成 i 色，由 r_n 的定义，K_{r_n} 中会出现同色三角形，即有三个顶 a, b, c，使得边 ab, ac, bc 颜色相同，皆为 i 色，不妨设 $a>b>c$，记 $x=a-b$，$y=b-c$，$z=a-c$，则 $x, y, z\in S_i$，且 $x+y=z$。

例如，把 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 划分成两个集合，则必有一个集合含两数及其差。

这是因为 $r_2=r(3,3)=6$，由舒尔定理，在划分成的两个子集中必有一个子集 S，S 中有三个数 x, y, z，满足 $x+y=z$，即 S 中含 x，z 两数及其差 y。

3.37 拉姆赛数引发的数学劫难

我们把“三人相识与三人不相识”的社交问题推广，若问：任给一群人，其中有 k 位彼此相识或有 l 位彼此不相识，问这群人至少几人?

这一问题转述成图与色的语言则是对 K_n 的边用两种颜色任意着色，不是出现同色的 K_k 就是出现同色的 K_l，n 最少是几?

我们把上述问题的答案记成 $r(k, l)$，称 $r(k, l)$ 为 (k, l) 阶拉姆赛数。

相似地，如果把 K_n 用 m 种颜色任意进行边着色，对于任给自然数列 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，总有某个 i 色子图 K_{k_i} $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，问 n 最

小是几?

我们把这一问题的答案记成 $r(k_1, k_2, \cdots, k_m)$,称其为$(k_1, k_2, \cdots, k_m)$阶拉姆赛数。(k, l)阶拉姆赛数是$(k_1, k_2, \cdots, k_m)$阶拉姆赛数 $m=2$ 的特殊情形。

由定义,显然 $r(k, l)=r(l, k)$,且平凡地可得 $r(1, k)=r(k,1)=1, k=1,2,\cdots, r(2,k)=r(k,2)=k, k=1,2,\cdots$。要确定 $k\geqslant 3, l\geqslant 3, l+k>7$ 的(k, l)阶拉姆赛数都不是平凡的问题。

下面来确定 $r(3,4)$。

首先图 3-48 既无三顶团又无四顶独立集,所以 $r(3,4)>8$,即 $r(3,4)\geqslant 9$。

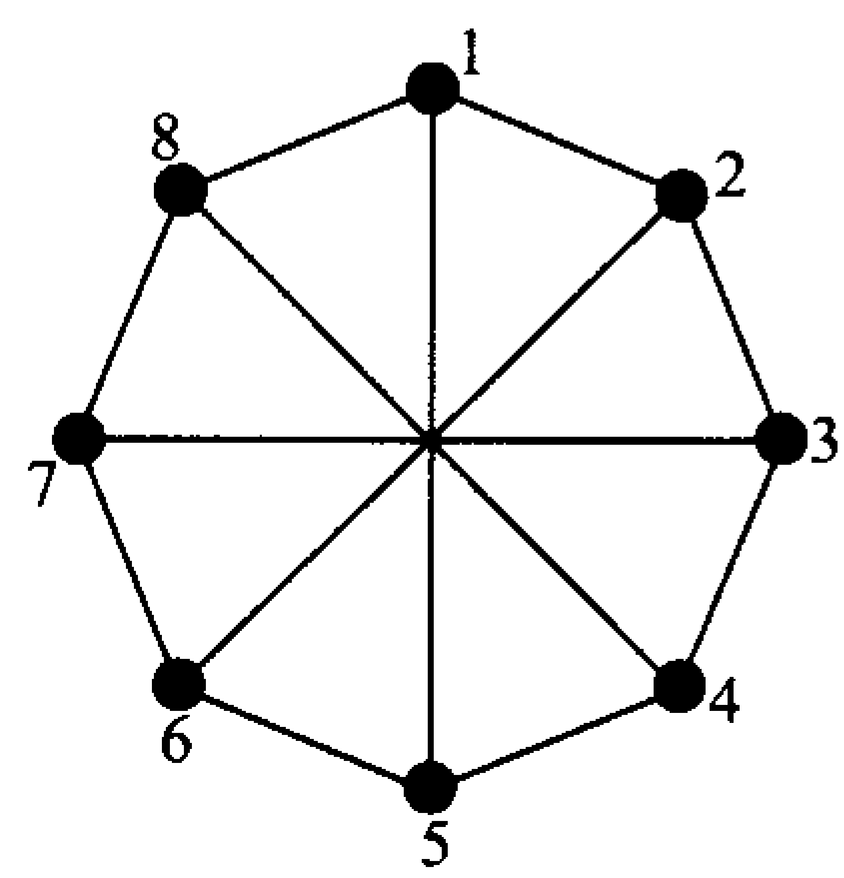


图 3-48

下面想办法得出 $r(3,4)\leqslant 9$。

为此考虑有 $r(3,3)+r(2,4)-1=9$ 个顶的图 G, G 有奇数个顶,至少有一个顶 v 是偶次的,于是下面①②会成立一个:

①v 至少与 G 中 $r(3,3)$ 个顶不邻。

②v 至少与 G 中 $r(2,4)$ 个顶相邻。

事实上,若 G 中与 v 不邻的少于 $r(3,3)$ 个,同时与 v 相邻的少于 $r(2, 4)$ 个顶,又 v 是偶次顶,所以与 v 相邻的不多于 $r(2,4)-2=2$ 个,而与 v 相邻与不相邻顶数之和为

$$9-1=8<r(3,3)+r(2,4)-2=8$$

即 $8<8$,矛盾,可见①、②至少会成立一个;若①成立,在 G 中与 v 不邻的 $r(3,3)$ 个顶的导出子图有三顶团或三顶独立集,则 G 中有三顶团或四顶独立集;若②成立,在 G 中与 v 相邻的 $r(2,4)$ 个顶的导出子图中必有二顶团或四顶独立集,于是在九顶图 G 中,必有三顶团或四顶独立集。所以 $r(3,4)\leqslant 9$。

至此得 $r(3,4)=9$。

与确定 $r(3,4)=9$ 相似地可以确定

$$r(3,5)=14,\ r(4,4)=18$$

事实上，如上可证

$$r(3,5)\leqslant r(2,5)+r(3,4)=5+9=14$$

由于图 3-49 上既无三顶团亦无五顶独立集，所以 $r(3,5)\geqslant 14$。于是得 $r(3,5)=14$。

$$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=9+9=18$$

由于图 3-50 上既无四顶团又无四顶独立集，所以 $r(4,4)\geqslant 18$。于是得 $r(4,4)=18$。

经过全世界数学家与计算机科学家的几十年奋斗，至今已确定的非平凡的拉姆赛数只有 10 个：

$$r(3,3)=6,\ r(3,4)=9,\ r(3,5)=14,\ r(3,6)=18,$$
$$r(3,7)=23,\ r(3,8)=28,\ r(3,9)=36,\ r(4,4)=18,$$
$$r(4,5)=25,\ r(3,3,3)=17$$

$r(k,l)-1$ 个顶且既无 k 顶团又无 l 顶独立集的图称为 (k,l) 阶拉姆赛图。图 3-48 是 (3, 4) 阶拉姆赛图，图 3-49 是 (3, 5) 阶拉姆赛图，图 3-50 是 (4, 4) 阶拉姆赛图，图 3-51 是 (4, 5) 阶拉姆赛图。

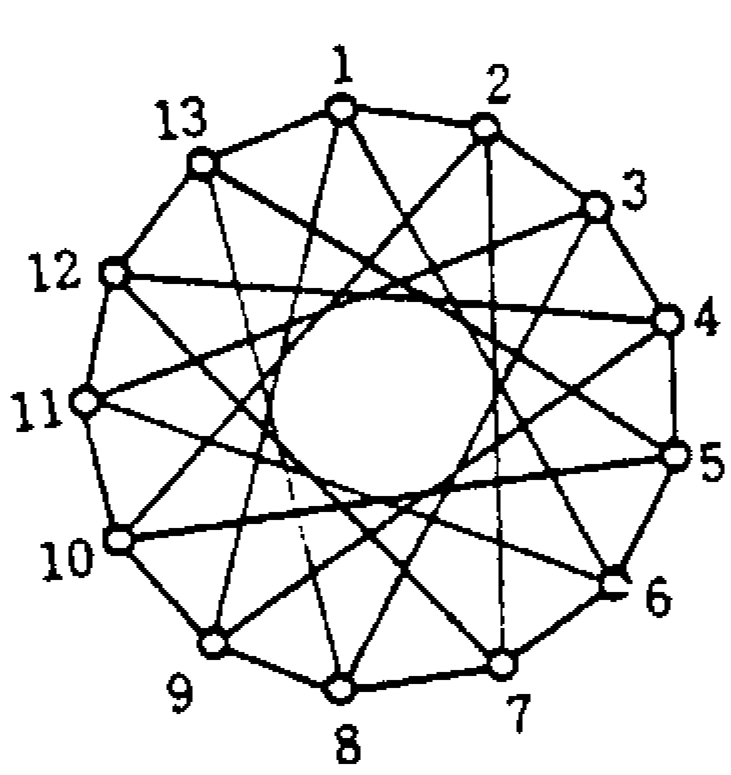


图 3-49

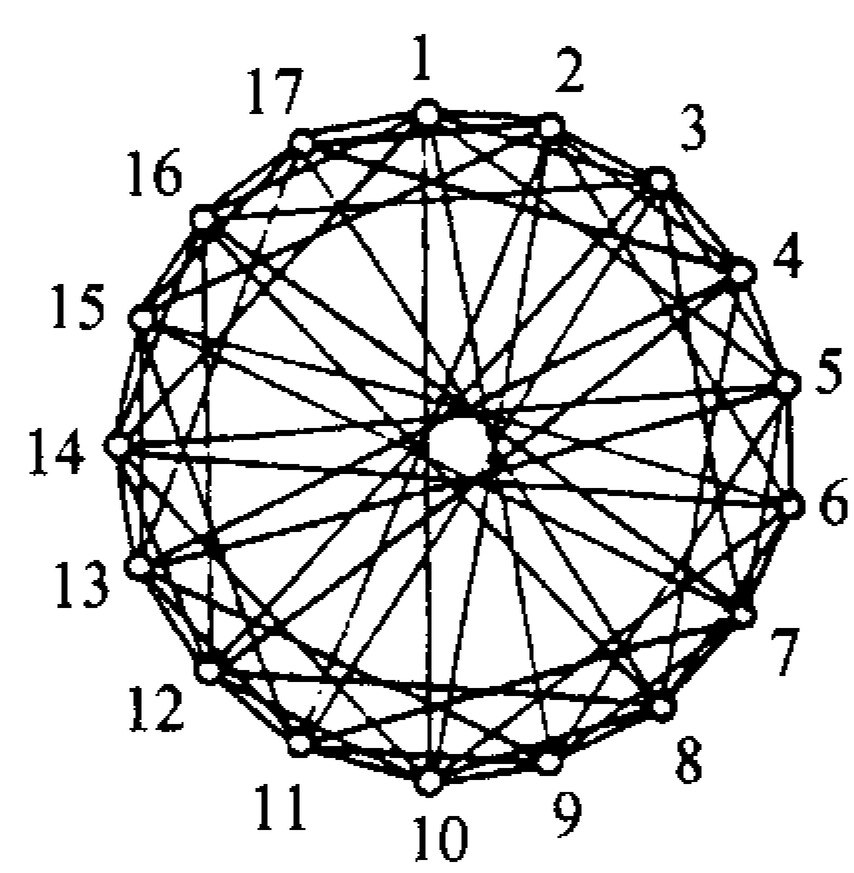


图 3-50

我们对拉姆赛图极端端正、极端对称、极端漂亮的形象十分欣赏，但拉姆赛图的绘制则需要鬼斧神工的数学技艺，其难度非常之大。

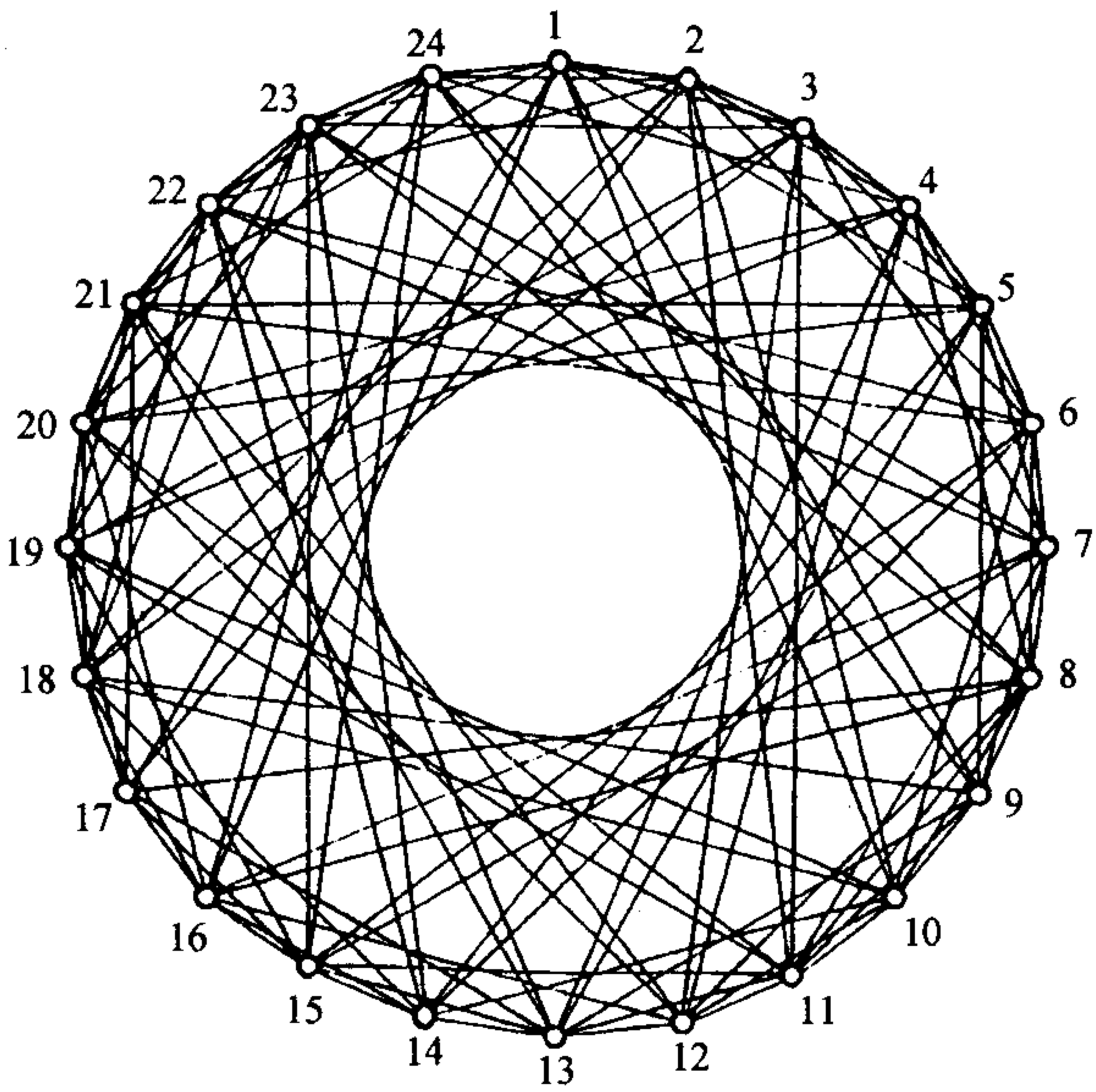


图 3-51

1993 年，罗彻斯特理工学院的拉齐斯佳威斯基（S. P. Radziszowski）和澳大利亚国立大学的麦凯（B. D. Mckay）用计算机求得 $r(4,5)=25$，这是自 1928 年以来拉姆赛数研究之中最不平凡的成果。他们的计算量相当于一台标准计算机 11 年的工作量。投入的精力与物力十分可观，美国著名编辑兰德斯（Amn Landers）在报纸上设专栏讨论这种研究的价值，甚至引起了一些读者的抱怨："花在拉姆赛问题研究上的钱，本该用来资助世界上那些饱受战争创伤国家的饥饿儿童。"但愿战争永不再起，但愿早日求得 $r(5,5)$，$r(5,6)$，$r(6,6)$，……当然这个艰而又巨的任务用手和笔是完不成了。著名的匈牙利数学家厄尔多斯（Erdös）曾经用下面的比喻来形容求拉姆赛数的困难程度：一伙外星强盗在地球着陆，威胁人类说，如果不能在一年内求出 $r(5,5)$，他们将动手灭绝人类！此时人类的最佳对策是调用地球上所有的计算机和计算机专家，日以继夜地来计算 $r(5,$

5)的值，以求人类免于灭顶之灾；如果外星人威胁说要求得 $r(6,6)$，那我们已别无选择，只能同仇敌忾，对这批入侵者施以先发制人的打击。

拉姆赛(Ramsey)是英国著名数学家、哲学家和经济学家，他于1928年在伦敦数学会上宣读的著名论文，提出拉姆赛数的问题和他本人在这方面的开创性工作。1930年，拉姆赛因腹部手术并发症不幸早逝，亡年仅仅26岁！但这位年轻人关于拉姆赛数的精神遗产却永远福泽数学界和一切热爱科学的人们。数学家认为，如果要从组合数学当中挑选一个最美的成果，那么大多数数学家将投拉姆赛理论的票。

拉姆赛理论中似乎含有更为深刻的哲理，体现出来的思想不仅仅属于数学，甚至不仅仅属于自然科学。例如，我们用两种颜色胡乱地对 K_n 的边涂上颜色，使得每条边都上了某种颜色，这时的操作不遵守任何规则，哪条边上什么颜色完全是随意的，造成的后果呢？对于任意指定的自然数 k，只要 n 足够大，即 $n \geqslant r(k,k)$，则会收获一个同色的 K_k；我们在染 K_n 时，是绝对盲目进行的，丝毫没有蓄意造成同色 K_k 的意向和努力。完全无序的活动却产生了规则有序的后果。无序中包含着某种规律性。可惜拉姆赛英年早逝，不然，他也许会再告诉我们更为富有哲理的数学理论。

拉姆赛向当代和后代数学家和计算机专家挑战，给本来已经难题多多的数学又增添如此之难的题目。

3.38 多心夫妻渡河

下面是四个妇孺皆知的民间数学游戏，我们很多人也都玩过这种趣题。

①三对多心的夫妻同时来到一个渡口，欲到河对岸去，当时只有

一条小船，最多能载两人，由于封建意识严重，妻在其夫不在场时拒绝与另外男子在一起，问应如何安排渡河才能最快地使六人都渡过河去？

②人、狗、鸡、米都要渡过河去，小船除一人划船外，最多还能运载一物，但人不在场时，狗要吃鸡，鸡要吃米，问人、狗、鸡、米应如何安全渡河且所用时间最短？

③有酒 8 升，装满一桶，另有只可装 5 升与 3 升的空桶各一，今欲平分其酒，应如何操作，才使分酒时间最短？

④敌我各两名军事人员同到某地去谈判，途中要渡过一河，无桥。仅一最多能乘两人的小船，为了安全，敌我双方同时在场时，我方人员不能少于敌方人员，每次过河往返需用 10 分钟，问最快多少时间四人都可到对岸？

作者用这些趣题考过学生，聪明的孩子们兴趣盎然地反复摸索试探，大都能完成渡河或分酒的任务，但在试验过程中往往发生失败后重新开始的现象，如果追问是不是最省时间的最优方案，则无言以对了。

这些数学游戏充满了棋弈味，纯属杜撰，几乎没有什么实用价值；随你胡乱折腾，失败了可以重来，如果是一项价值连城的科学工作，例如人造地球卫星的发射，则绝对禁止临场随便试验了！必须事先经过缜密的设计和计算，才敢点火。更何况，还要求满足最优化的条件，要有确定的操作步骤。

下面以敌我渡河问题为例来说明此类数学游戏的解法。

敌我人员同时在场的允许状态共六种

$$(2,2),(2,1),(2,0),(1,1),(0,1),(0,2)$$

括号内第一个数是我方在场人数，第二个数是敌方在场人数。以河的此岸这六种可能状态为 X 集，以彼岸这六种可能的状态为 Y 集，构作二分图 $G(X\cup Y,E)$，仅当两岸间的两种状态可以通过人员渡

河互相转化时，在此二顶间连一边，见图 3-52。

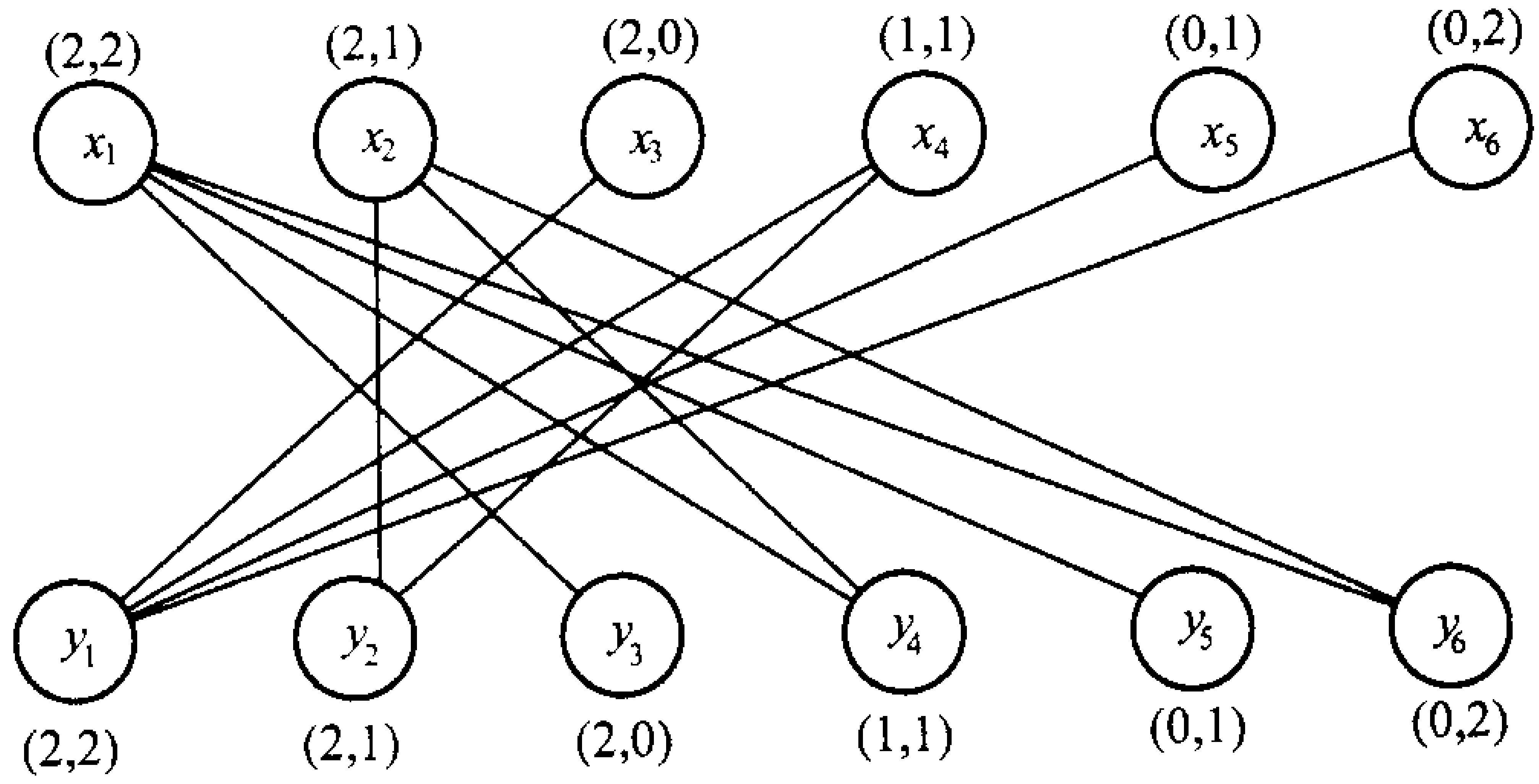


图 3-52

目标即求二分图 $G(X\cup Y,E)$中从 x_1 到 y_1 的最短轨。显然一次顶 x_3,x_5,y_3,y_5 不在所求的轨上。于是问题化成求图3-53中从 x_1 到 y_1 的最短轨。

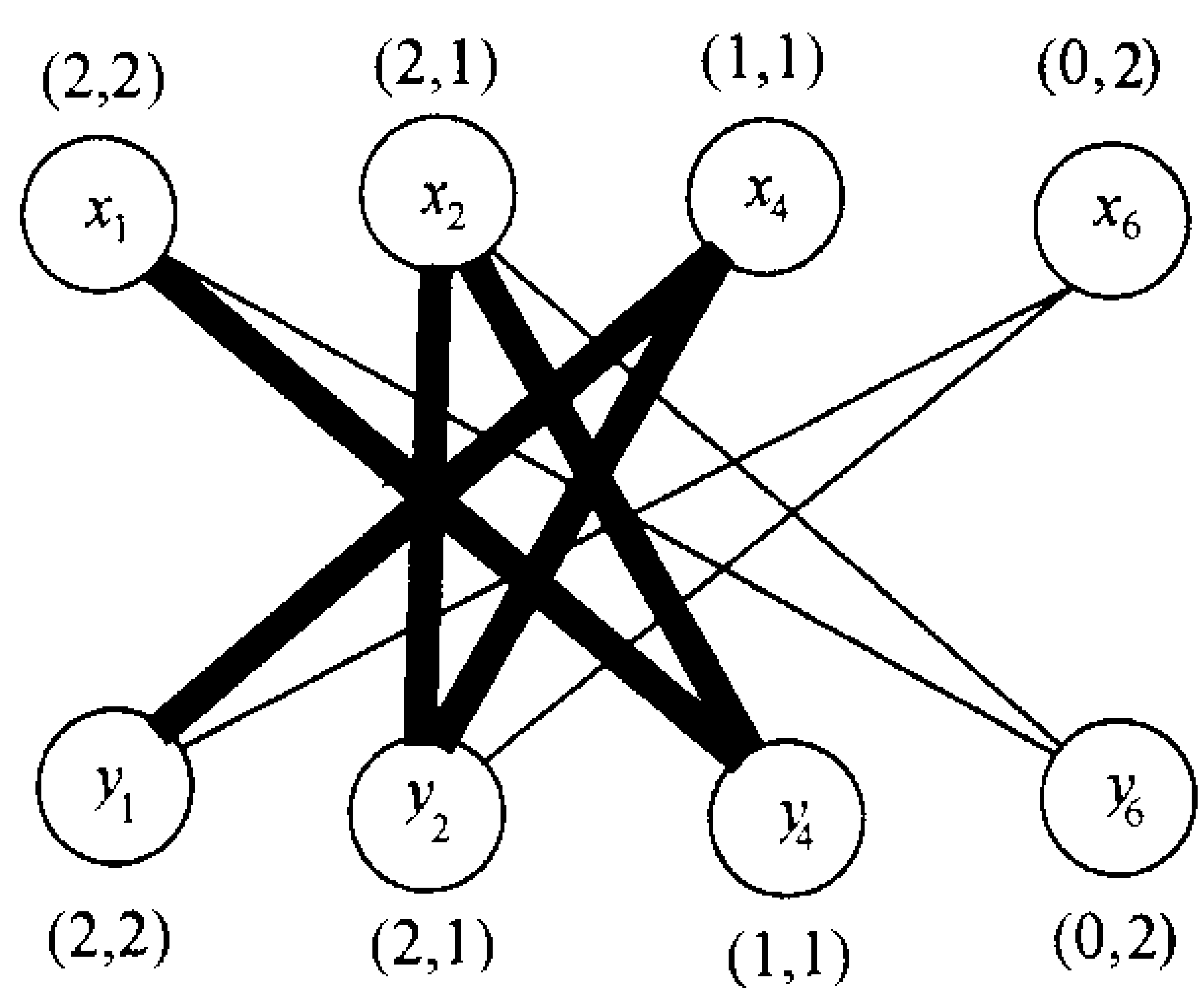


图 3-53

从图 3-53 看出，y_4 与 y_6 只能是所求最短轨的第二个顶点。于是从 x_1 出发的到 y_1 去的最短轨如图 3-54 所示，这是树结构，从根 (x_1) 到四个叶 (y_1) 四条轨：

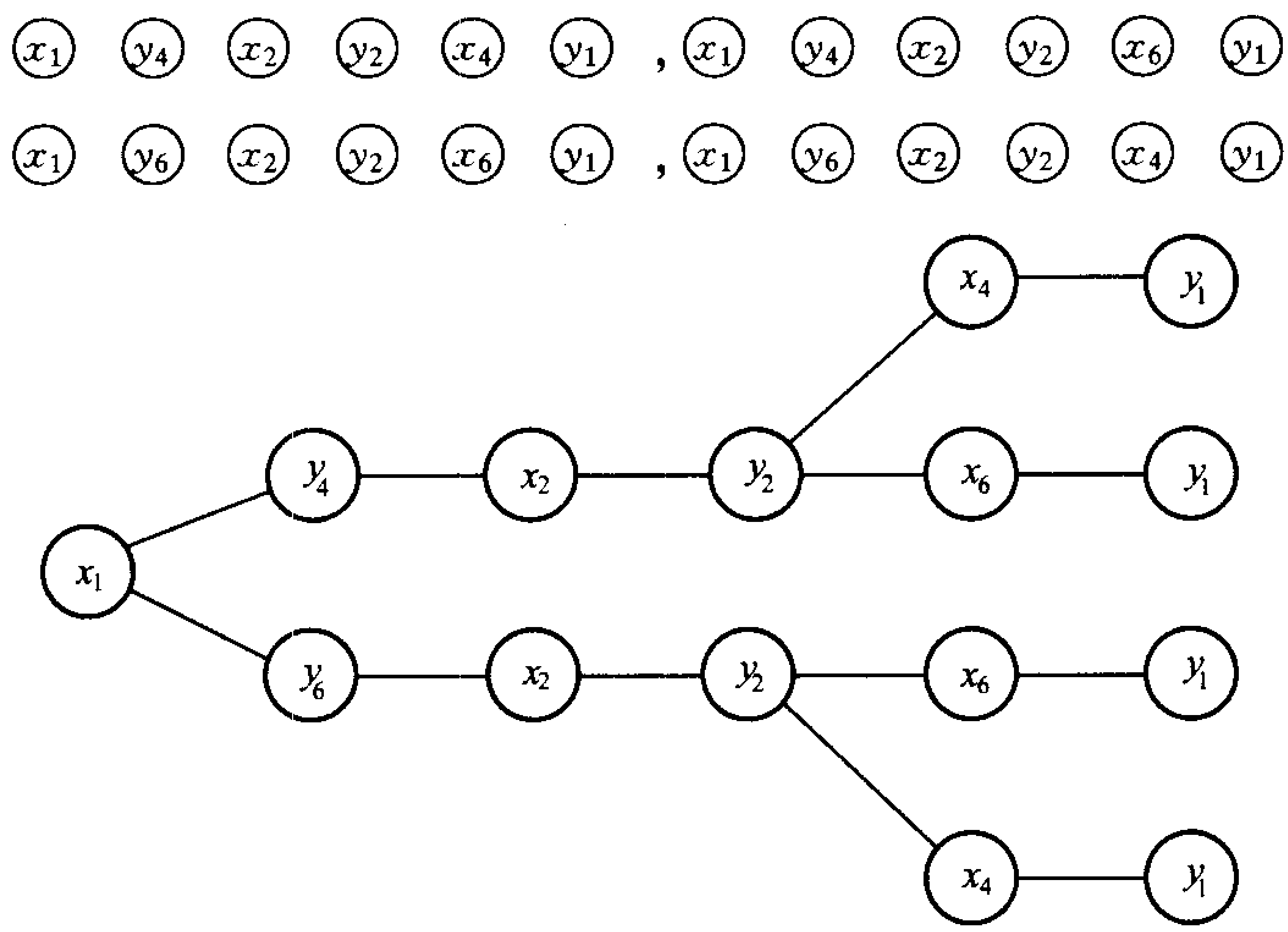


图 3-54

以 $x_1\ y_4\ x_2\ y_2\ x_4\ y_1$ 为例,即从北岸敌 1 人我 1 人上船到达南岸,北岸剩下敌我各 1 人;我方 1 人从南岸乘船返回北岸,北岸我 2 人敌 1 人,南岸敌 1 人,我方 2 人乘船到南岸,这时,北岸敌 1 人,南岸我 2 人敌 1 人;我方一人乘船从南岸返北岸,北岸敌我各 1 人,南岸敌我各 1 人;敌我各 1 人从北岸乘船到南,于是 4 人都到达了南岸。

其他三条轨仿此运作,这四条轨皆长 5,都是最短的从 x_1 到 y_1 的轨,即都对应最省时间的一种渡河方案,每种方案用时 25 分钟。

3.39 巧布骨牌阵

正方形骨质方片,上刻有从 1 个到 6 个“点儿”,还有一种不刻“点儿”,一共七类,再把点数相异的方片贴在一起形成长 2 宽 1 的长方片,称为多米诺骨牌对儿,没刻点儿的方片认为是零个点儿。如果把多米诺骨牌对儿摆成一圈,使得两两相异,且每两个靠近的骨牌对儿靠近的两端有相同的点数,则称此圈为一个骨牌连环阵。

如何构作一个最大的骨牌连环阵?

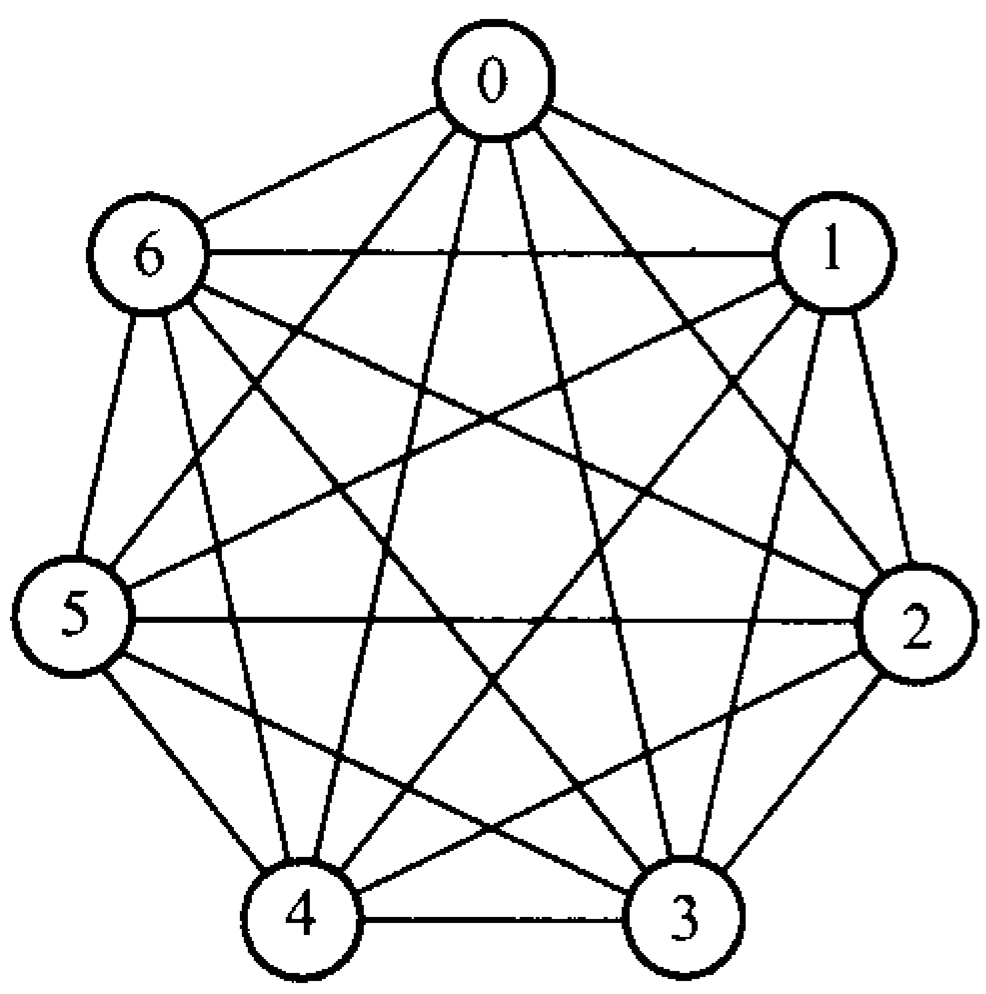


图 3-55

以 7 个点儿数的集合{0, 1, 2, …, 6}为顶集,(如图 3-55),构作 K_7,把此 K_7 的每条边视为一个骨牌对儿,其端点即骨牌对儿两端的点数,则知不同的骨牌对共有$\frac{1}{2}\times7\times6=21$ 种。可见最大的骨牌连环阵上的骨牌对个数不超过 21。

K_7 每顶皆 6 次,是欧拉图,它有一个欧拉回路:

0123456053164204152630 相应的最大骨牌连环阵如图3-56所示。

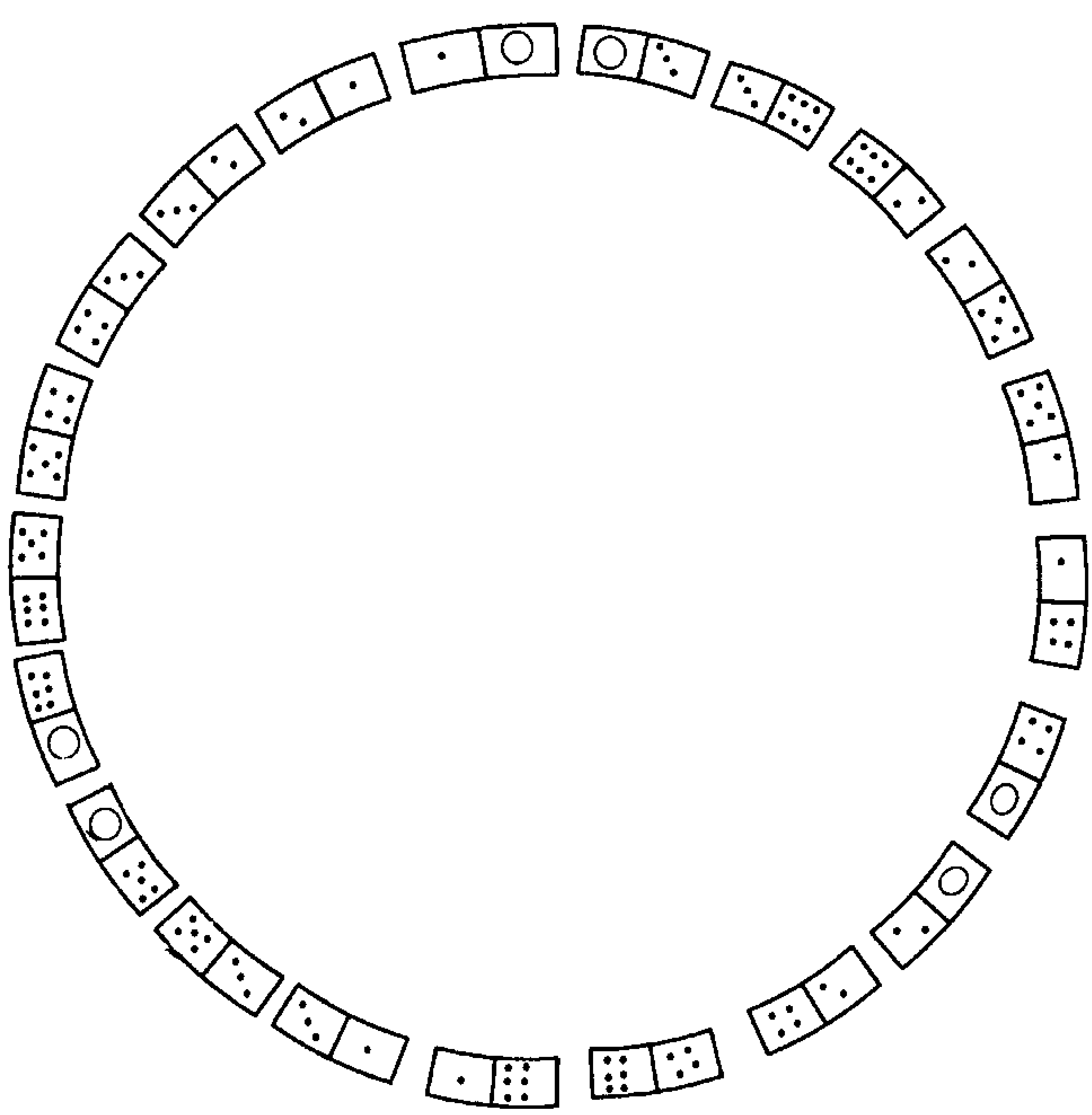


图 3-56

这种最大骨牌阵的排法不是唯一的，图 3-55 不同的欧拉回路对应不同的连环阵

0123456036251402461350

是另一欧拉回路，仿前可以画出与之对应的另一连环阵。

3.40 孙膑巧计戏齐王

相传战国时代，齐王派大将田忌为先锋，孙膑为军师，屡攻北邻燕国，燕国乃驷马名骥之产地，齐王与田忌掳得大批马匹。一日，齐王心血来潮，约田忌在泰山脚下的围猎场赛马。双方约定各自选上、中、下三种马各一匹比赛三局，每局胜者赢千金。同一等级的马，齐王的马比田忌的马略强，但田忌的上马比齐王的中马稍强，田忌的中马比齐王的下马稍强。齐王原以为田忌会用上马与其上马对抗，中马与中马对抗，下马与下马对抗，如此，田忌会连输三局，齐王赢得三千金已成定局，田忌忙找军师孙膑请教对策，孙膑笑曰："恭喜将军今日得胜千金！"田忌面带愁色而怨之："先生不可讥忌耳！"孙膑对田忌附耳献计，田忌笑曰："军师真神人也！"孙膑的策略用图论的语言可表述如下。

齐王的上、中、下三马分别记为 x_1, x_2, x_3，田忌的上、中、下三马分别记为 y_1, y_2, y_3，令 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$，$Y=\{y_1, y_2, y_3\}$，构作 $K_{3,3}$，$V(K_{3,3})=X\cup Y$，如图 3-57。

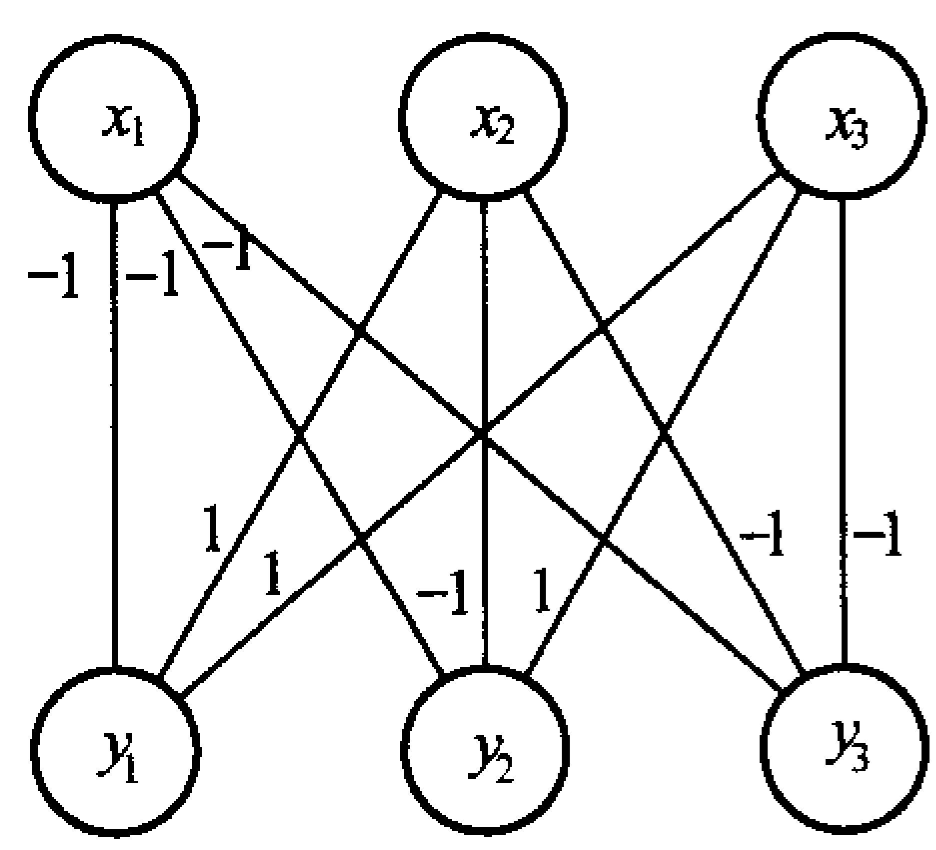


图 3-57

各边上标出的 ±1 是田忌相应的得分，胜得 1 分，败得 −1 分，每得 1 分，即赢得千金，得 −1 分，则输千金，例如 x_1 y_1 表示上马对上马田输千金。$K_{3,3}$是每顶三次

的二分图，由婚配定理，$K_{3,3}$中有完备匹配，且有三个无公共边的完备匹配

$$M_1=\{x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3\}$$
$$M_2=\{x_1y_2, x_2y_3, x_3y_1\}$$
$$M_3=\{x_1y_3, x_2y_1, x_3y_2\}$$

若田用 M_1 的对策，得分 $M_1=(-1)+(-1)+(-1)=-3$，即输金3千；若用 M_2 的对策，得分 $M_2=(-1)+(-1)+(+1)=-1$，即输金1千；若田用 M_3 的对策，得分 $M_3=(-1)+(+1)+(+1)=1$，即田赢1千。可见田用下马对齐王上马，故意输一局，但失去了齐王的上马优势，用中马对齐王的下马，用上马对齐王的中马，连扳两局，净胜一局。M_3 为上策。

在国际乒乓球锦标赛等赛事当中，为防止孙膑式的教练用排兵布阵的技巧以弱胜强，一般都采用运动员出场顺序抽签制。

3.41 图上谎言*

(1) 火星上的运河

C 国的人造火星卫星发现火星上的城市遗址及各城间的运河水道如图3-58所示。每个城市有一拉丁字母标志，T 是火星的"南极城"。《C 国日报》登了如下的悬赏征解题目：

从某火星城出发，沿水路而行，每城恰过一次，且所经城市的标志字母恰拼写成一句话，是否有这样的途径？如果有，请把它写出来。

编辑很快收到五万多读者的来稿，都回答说："不可能存在这样的途径(There is no possible way.)"

* 根据《萨姆·劳埃德的数学趣题》改编。



图 3-58

读者的答案是正确的，图 3-58 中已用 1～20 标出此途径。一路上所经的城市的标志字母拼写成的是“不可能存在这样的途径”，但这句话显示的恰为这样的途径，即这样的途径存在。

字面上，“不可能存在这样的途径。”(There is no possible way.)表示不存在题目中要求的途径，形成了类似说谎者悖论那样的自相矛盾的幽默。

读者回答的，“不可能存在的途径。”是此图上的一条哈密顿轨，若从 y 再行到 T，则从南极出发又回到南极，是一个 Hamilton 圈，即此图是哈密顿图。

此题是“判定一个图是否哈密顿图”这一极其困难的问题的一个实例。其一般问题是属于下面要谈的所谓 NPC 问题集团的，可见这一科幻型题目的背景很沉重，根子很深。

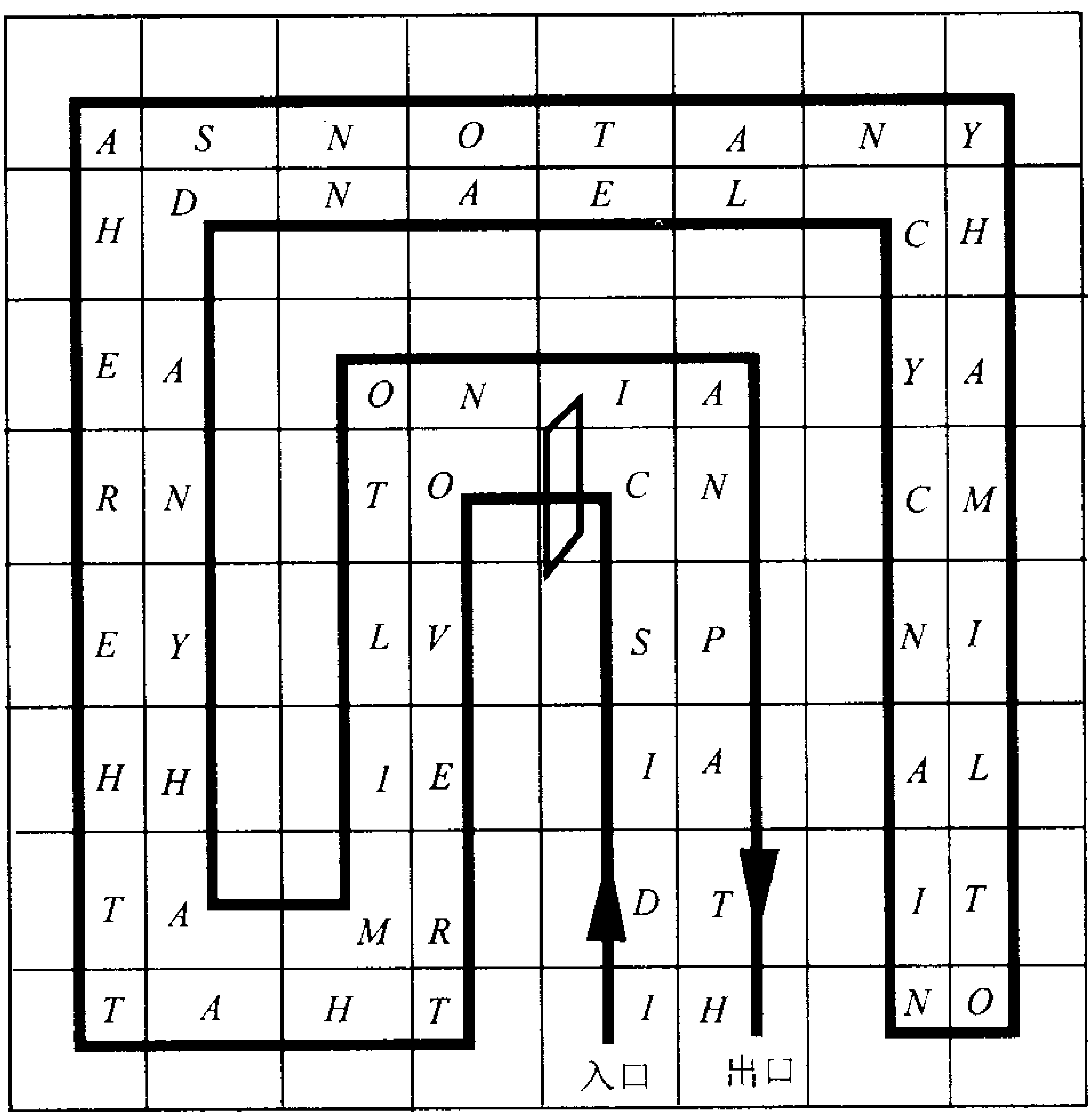
(2) 棋盘阅兵式

斯科特将军(W. Scott, 1786～1866)是 19 世纪美国的著名将领，他又是全美家喻户晓的国际象棋高手。一次斯科特对林肯的陆军部长斯

坦顿(E. M. Stanton, 1814～1869)抱怨说:"尽管我们有 20 位指挥官都能指挥一个师的士兵开进一个公园,但他们都无人完全知道如何指挥这些士兵按进入的队形开出公园。"

杰出的美国智力玩具专家萨姆·劳埃法(Samuel Loyd, 1841～1911)是最出名的全美国际象棋趣题的作者,曾主持编辑《科学美国人》的国际象棋副刊。下面介绍的是劳埃法有感于斯科特将军上述的牢骚编写的一道奇妙的棋盘阅兵趣题。

阅兵的公园划分成 8×8 个小方格,每个方格里有一个拉丁字母,如图 3-59,接受阅兵的部队从入口进入公园后,排头兵按国际象棋中车的走法每格恰过一次,且要穿过 O 与 C 之间的凯旋门,从出口把队伍带出公园,同时要求所经格子里的字母按排头通过的顺序抄出一句话。



A	S	N	O	T	A	N	Y
H D	N	A	E	L	C	H	
E	A		O	N I	A	Y	A
R	N	T	O	C	N	C	M
E	Y	L	V	S	P	N	I
H	H	I	E	I	A	A	L
T	A	M	R	D	T	I	T
T	A	H	T	I	H	N	O

图 3-59

行进路线已用粗实线画在图 3-59 中，我们看到，如果有公共边的两个小格作为图 G 的邻顶，如此形成的“车图”是哈密顿图，但抄出的那句话都偏偏是：“我发现此处无哈密顿圈也无哈密顿轨。(I discover that there has not any hamiltonian cycle and any hamiltonian path.)”

与火星运河上的谎言相似，“言行”相反，分明是画出了哈密顿圈和哈密顿轨，却硬说发现此处无哈密顿圈与哈密顿轨！

读者可以看出，如果不再要求“拼写成句”，图 3-59 的路线是所有哈密顿轨当中拐弯抹角次数最少者。

3.42 走投无路之赌

外地甲乙两司机同驾一轿车到我省旅游，甲先把车子开到某城旅游第一站，乙接着把车子开到某相邻的城市继续旅游，如此轮流驾车，每人每次都要把车从一城开往另一未曾观光过的新城。如果轮到谁开车，谁都走投无路，即找不到相邻近的未到过的城市，谁就是输家。问甲必胜的充分必要条件是什么？取胜策略如何？

把公路连通的各城视为一图 G 的诸顶点，每对有直通公路段的城市之间路段视为 G 的边，若 G 中有完备匹配 M，设甲选的出发点为 v_1，则乙选 $v_1v_2\in M$，甲选 $v_2v_3\notin M$，乙选 $v_3v_4\in M$，如此递推，乙坚持选甲把车交给他驾驶时的那座城在 M 中相配的城市，则乙行的路段为 $v_1v_2, v_3v_4, \cdots, v_{2k-1}v_{2k}$，$G$ 中的顶数为 $2k$，当乙把车开至 v_{2k}后，甲已走投无路，甲必败。

若 G 中无完备匹配，取 G 的一个最大匹配 M'，设 v_1 是未被 M' 许配的顶，甲首先选 v_1 为出发点，接着乙开往 v_2 时，v_2 一定是被 M' 许配的顶，不然，v_1v_2 可以添加到 M'中得一比 M'还要大的配匹，与 M'最大矛盾。以后甲坚持行径 M'中的边把车开往新的一城，迫使乙

每次只能选得被 M' 许配的顶，不然会出现乙把车开到 v_l，但 v_l 未被 M' 许配，这时把 $v_1v_2, v_3v_4, \cdots, v_{l-1}v_l$ 添加 M'，而把 $v_2v_3, v_4v_5, \cdots, v_{l-2}v_{l-1}$ 从 M' 删除，则 M' 扩大了一条边，与 M' 之最大性矛盾，见图 3-60。由于 G 的顶数有限，有限次交换驾驶后得一轨道如图 3-61。

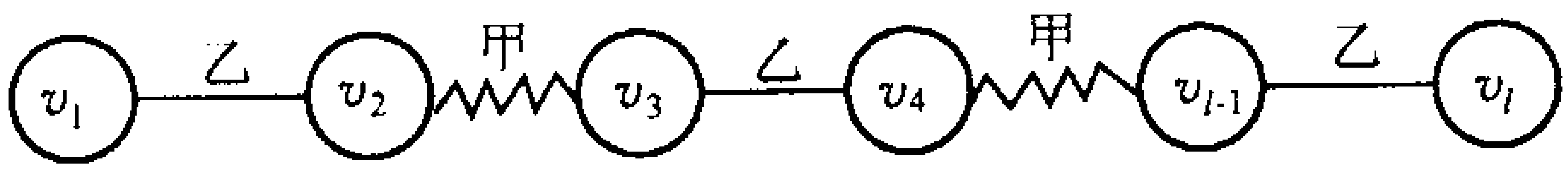


图 3-60

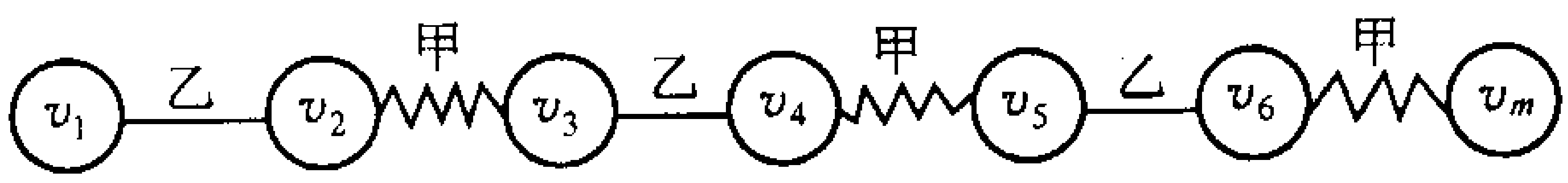


图 3-61

这时已无与 v_m 相邻的未观光过的城市了，但这时轮到乙开车，乙走投无路，甲必胜。

综上可知甲必胜的充要条件是 G 中无完备匹配。

甲取胜的策略是：首选一个未被某最大匹配 M' 许配的项(城)为出发点，把车交给乙，之后甲坚持把车沿 M' 中的边开行。

这种匹配技术在图上智斗中经常应用，例如有一种“捉乌龟”游戏，把 54 张扑克牌暗中藏起一张，剩下的 53 张牌中有一张没对儿的，称它为“乌龟”，把这 53 张牌随意分给甲乙二人，每人把手中的对子都甩出来，这时只要谁手里的牌多，谁手里定握有乌龟。因为把“对儿”视为图中最大匹配 M' 中的边的端点，当二人甩光手里的对儿后，M' 中其他边的两端点必分居于甲乙二人之手，那个唯一的未被 M' 许配的顶是乌龟，它定在牌多者手中。

3.43 图上智斗

甲乙二人约定如下：把圆周 n 等分，甲先连接其中两个分点画一

条绿色的弦，乙接着连接另一对分点画一条红色的弦，如此交替画弦，事先指定一个图$G(V,E)$，甲画出绿色 $G(V,E)$时为胜，甲画不出绿色$G(V,E)$则乙胜。

甲是成事者，努力画出 $G(V,E)$，乙是败事者，对甲的目标进行破坏。

如果 n 很大时，甲必能成功，今问：n 最小是多少，甲仍有必胜策略？

例如甲的目标是画三角形，$n=3$ 时显然不能成功，因为只有三条弦，甲只能占用两条，另一条被乙染红了；当 $n=4$ 时，甲仍不能成功，见图 3-62；事实上，四边形 $ABCD$ 及其两条对角线组成一个 K_4，不妨设甲第一次画绿了 AB 弦，甲至多占用六条弦中的三条，所以甲若成功，不是画成$\triangle ABC$，就是画成$\triangle ABD$，于是乙从 AD，AC，BD，BC 任取一弦，把它画红，则甲只能指望成功$\triangle ABC$ 与 ABD 中的一个了，不妨设$\triangle ABC$ 这时是AC，BC 皆无色待甲去画，甲画绿其中一条，另一条乙接着占用画红了，甲仍然成不了功。

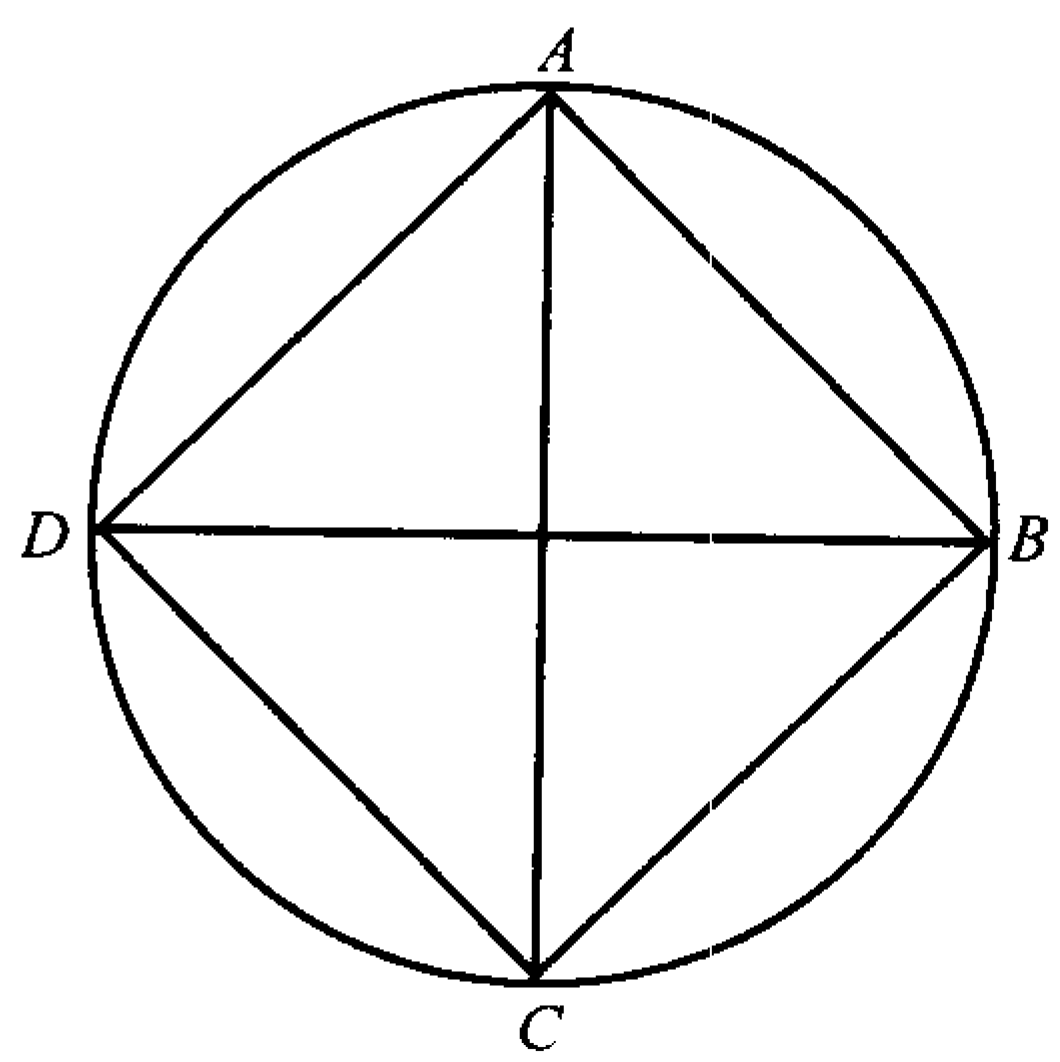


图 3-62

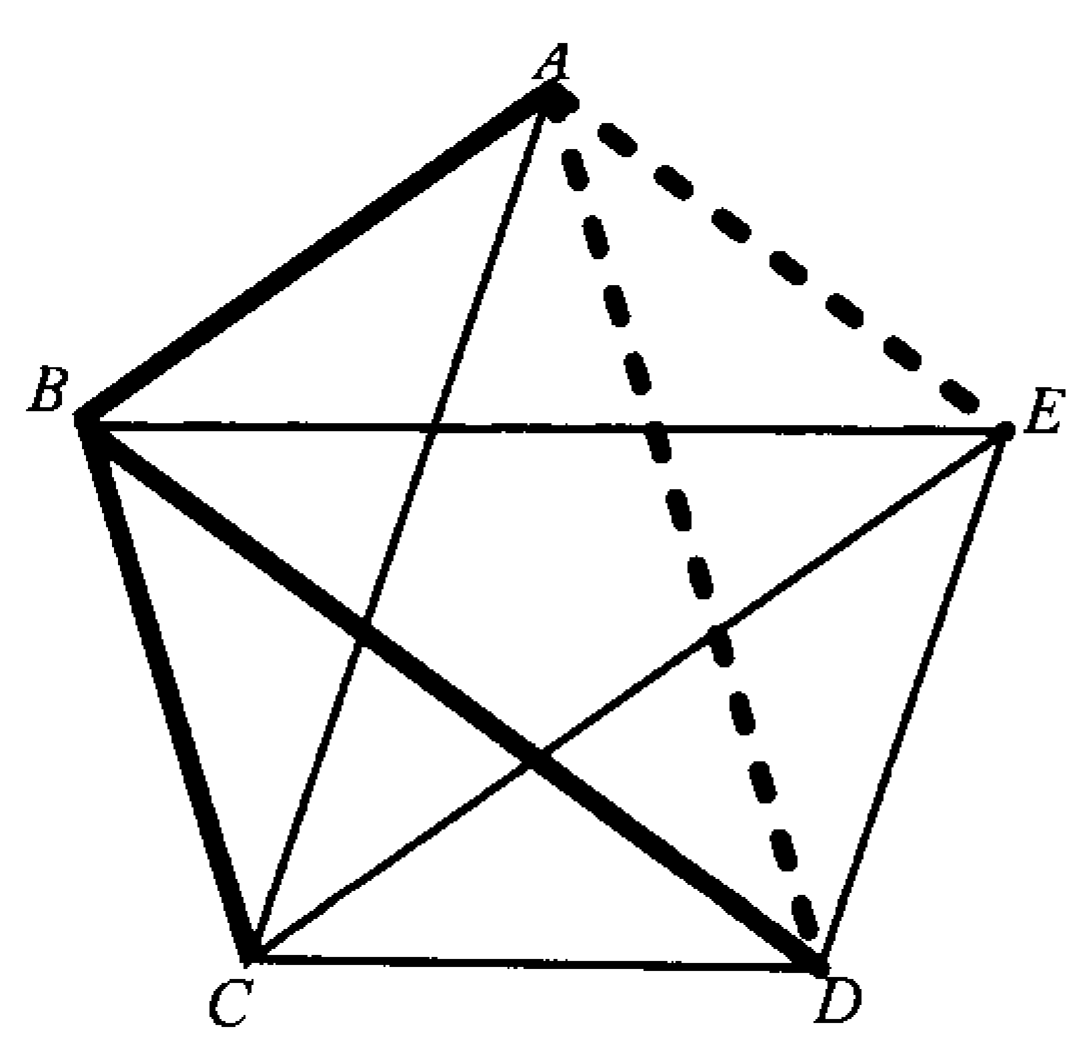


图 3-63

在 $n=5$ 的情况下，不妨设甲首次选 AB 画绿(粗实线)，见图 3-63。这时，以 AB 为底边的三角形有三个，其顶点分别是 C，D，E，

乙必须努力在每个三角形上占用一条无色边，不妨设乙首先占用了 AE(粗虚线)，接着甲占用了 BD，乙必须接着抢占 AD，甲接着占用了 BC，这时轮到乙画，$\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 皆有两边已画绿，乙面临顾此失彼的被动局面，甲必胜。故知，当 n 最小为 5 时，甲必胜，$n\leqslant 4$ 时，乙必胜；即仅当 $n\geqslant 5$ 时，成事者成，败事者败。

事先指定的目标图 G 可以是任意取定的。

例如是四边形、五边形，甚至长 n 的哈密顿圈，也可以是树，特别地是星或哈密顿轨，这种问题大都极为困难。建议读者以星为指定目标试试看，看 n 最小是多少，甲必胜；所谓星是仅一顶非叶的树。

甲乙活动的场地 K_n 也可以用 $K_{n,n}$ 替代来讨论类似问题。

在 $K_{3,3}$ 上画四顶星，见图 3-64(c)，甲必败，见图 3-64(a)、图 3-64(b)。

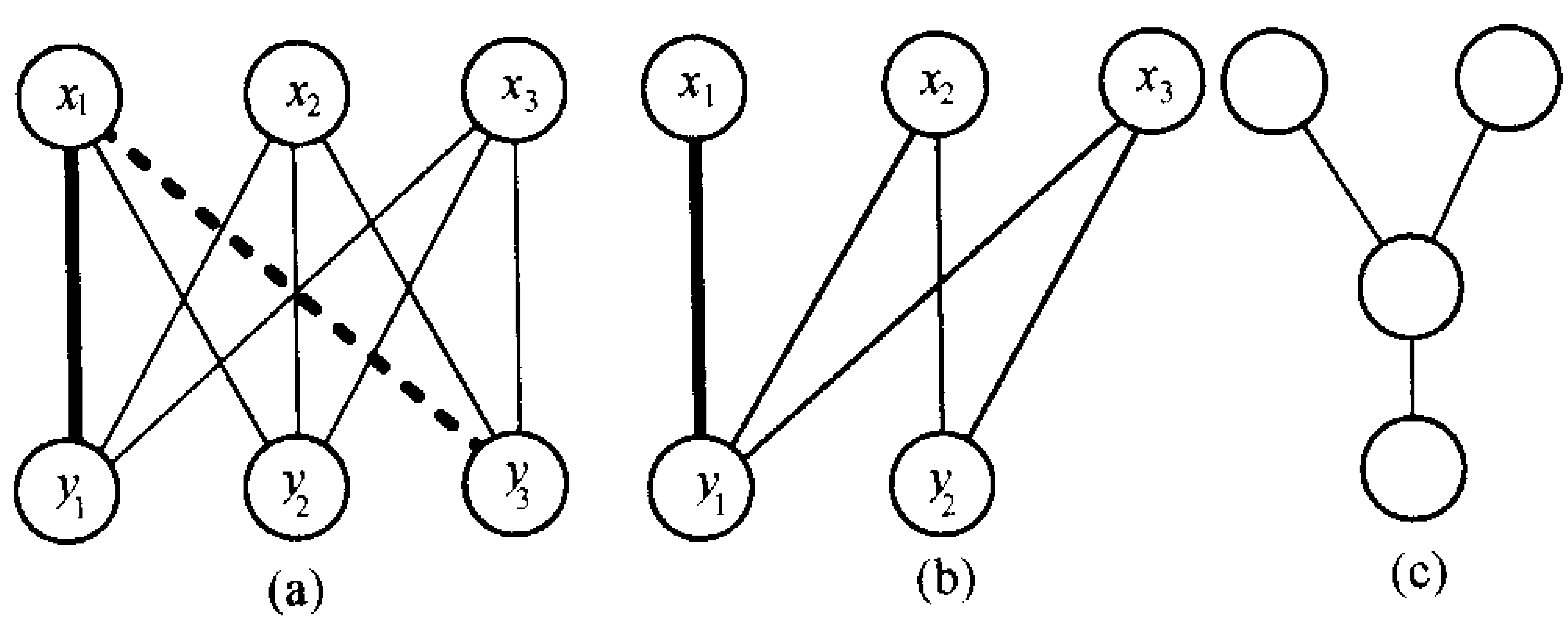


图 3-64

由于 $K_{3,3}$ 各边在全图中的位置对称性，不妨设甲第一笔画绿(粗实线)x_1y_1，乙接着画红(粗虚线)x_1y_3。至此甲放弃 x_1 顶与 y_3 顶，见图 3-64(b)，甲唯一的选择是在 y_1 处发展，但那里只两条无色边，甲只能分得一条，可见甲在 $K_{3,3}$ 上必败。

在 $K_{4,4}$ 上，见图 3-65，甲第一笔画绿 x_1y_1，这时与 x_1，y_1 关联的无色边皆三条，乙必须接着把与 x_1 关联的无色边画红一条，不然，等到甲把与 x_1 关联的无色边再画绿一条，还剩两条无色边与 x_1 关联，甲还能分得一条，于是甲胜。同理，当甲第一笔画绿 x_1y_1 后，乙必须

接着把与 y_1 关联的无色边画红一条，于是乙同时必须画一条与 x_1 关联的边和一条与 y_1 关联的边，这当然顾此失彼，所以在 $K_{4,4}$上甲必胜。

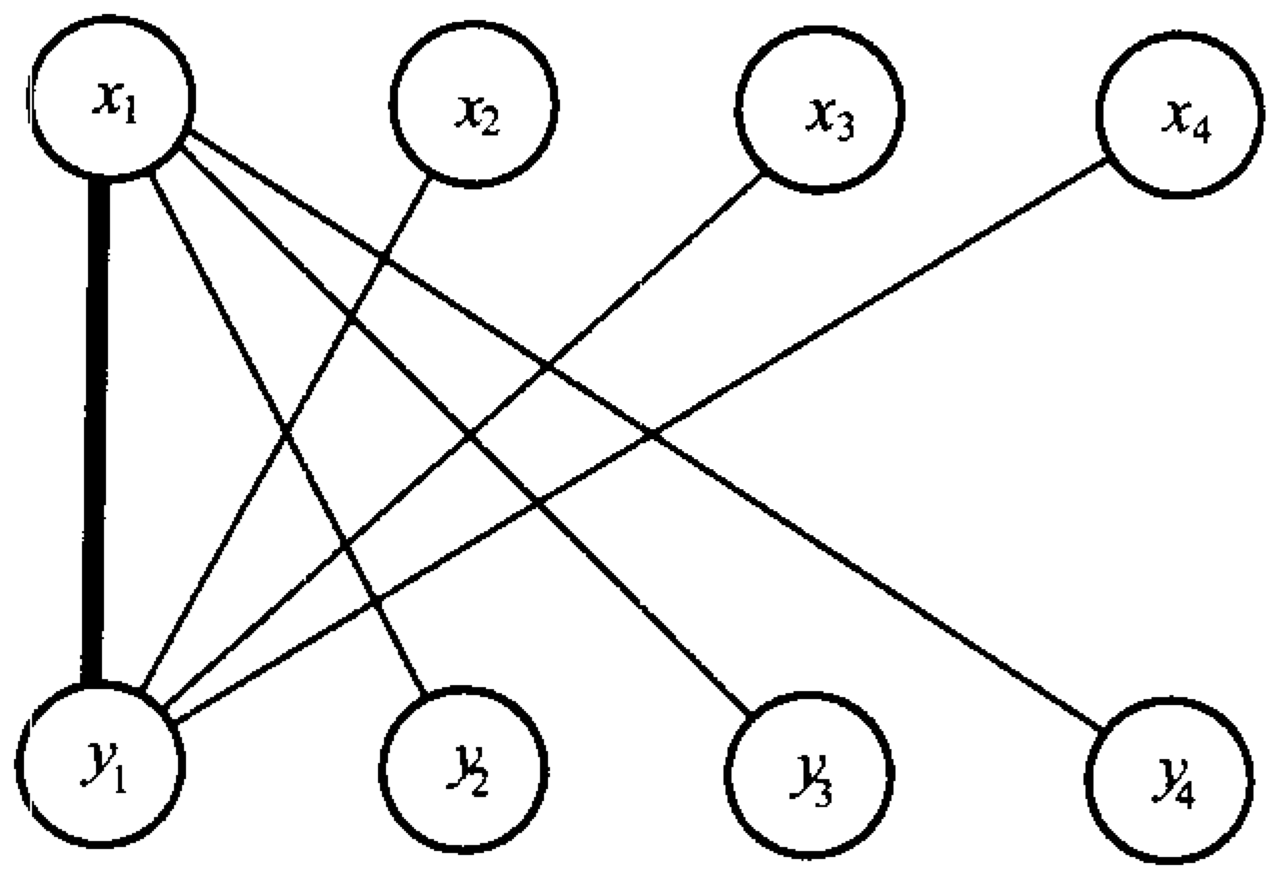


图 3-65

至此知对于目标图为四顶星，在 $K_{n,n}$上，n 最小为 4 时甲必胜，n 小于 4 时，甲必败。

3.44 平分苹果有多难

任给一堆苹果，每只苹果的重量以"两"为单位都是整数，问能否把这堆苹果平分成两小堆，使每堆重量占总重的一半，且不许把苹果切开。

这一问题的答案可以是"是"，例如一共两个苹果每个都是半斤；也可以是否定的答案，例如三只苹果，两个每只四两，一个半斤，判断平分的可能性可以如下进行：

设有 n 个苹果，从中任取 1 个为一堆，其余的为另一堆，有 C_n^1 种可能的分法；任取 2 个为一堆，其余为一堆，共有 C_n^2 种分法；……任取 $\left[\frac{n}{2}\right]$为一堆，其余为一堆，共 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$种分法，其中$\left[\frac{n}{2}\right]$指$\frac{n}{2}$的整数部分。于是共有 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$种分法，再把每种分法称量一

下，看是否平分。设每种分法与称量的耗时为 1 分钟，如果是每种分法都不是等分，则判此堆苹果不可等分，这种穷举法需要多长时间呢？

如果 $n=2k+1$，则由于

$$(1+1)^{2k+1}=1+C_{2k+1}^{1}+C_{2k+1}^{2}+\cdots+C_{2k+1}^{k}+C_{2k+1}^{k+1}+\cdots+C_{2k+1}^{2k}+1$$

所以

$$C_{2k+1}^{1}+C_{2k+1}^{2}+\cdots+C_{2k+1}^{k}=\frac{1}{2}(2^{2k+1}-2)=2^{2k}-1$$

即需要 $2^{2k}-1$ 分钟，若共有 101 个苹果，则 $2k=100$，于是 $\lg 2^{2k}=100\lg 2\approx 0.3010\times 100=31.10$，所以 2^{100}是 32 位数。大于 10^{31}，每年共计 525600 分钟，以每年 6×10^5 分钟计，$10^{31}\div 6\times 10^5=\frac{1}{6}\times 10^{26}$，即需要连续工作(分苹果)$\frac{1}{6}\times 10^{26}$年以上，或者说工作$\frac{1}{6}\times 10^{24}$世纪！这么多时间去做这件小事，其难度已经到了令人绝望的程度，是人类所不能完成的任务！

你一定想说，这种愚公移山式的办法太笨，应当想出一种有效的判别法来判别苹果能否平分。可惜至今仍未找到一种有效的方法，也无人证明这个“等分问题”不可能存在有效的方法，天底下那么多聪明人和数学家，硬是拿这个貌似平庸的问题没办法。

3.45 周游世界谈何易

有的图有哈密顿圈，例如 K_n，有的图没有哈密顿圈，例如树。任给一个图 G，如何判断它有无哈密顿圈呢？

把 G 的顶进行全排列，设 G 有 n 个顶，则有$\frac{1}{2}n!$ 种不同的全排列($abcd$ 与 $dcba$ 视为一种)，逐个检查每种全排列是否为 G 上的一

个圈。如果 G 是哈密顿图，总会从中查出一个哈密顿圈来，如果 G 不是哈密顿图，则必须把这 $\frac{1}{2}n!$ 个排列全查一遍，最后一个也不成圈时，才能判定 G 中无哈密顿圈。这种排山倒海式的普查似乎能万无一失地判定 G 是否有哈密顿圈。只可惜所需要的时间太多，谁也没有那么多时间把它进行到底。事实上

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta}{12n}},\ 0<\theta<1$$

当 $n\geqslant 6$ 时，$n! > 2^{n+1}$，从上述平分苹果的估计中我们已领教过 2^{n+1} 这个数之巨大。

这种穷举式方法的复杂性在于所耗时间太多，比 $k\cdot 2^{n+1}$ 还多，k 是判别一个排列是否有哈密顿圈用的时间。

用指数时间 $k\cdot a^n$ 的算法都是坏算法，一个 2^n 型时间复杂度的坏算法，即算法的运算（行为）次数是 2^n，其中 n 是图的顶数或输入的已知数据之长度，在每秒百万次运算的计算机上，解决 $n=60$ 的问题耗时为 366 个世纪！

通常把运算耗时为输入长的多项式的算法称为好算法或有效算法。例如，求支撑树的算法的时间复杂度为 kn，n 是图的顶数，是有效算法。

3.46 梵塔探宝黄粱梦

相传在古印度北方的一座圣殿中，曾有一巨大的黄铜板，竖有三根两米高的宝石柱，在其中一根上串着中间有孔的三厘米厚的金盘 64 个，它们两两不等，小盘压在大盘上。据说这 64 块金盘是世界始创时上帝留下来用以考验人类智慧的宝物，且有命令曰：把这些金盘全部转移到另一宝柱上串起，仍然是小压大。许愿说，一旦这 64 块金盘移动完毕，喜玛拉雅山将变成一座金山。一代代僧侣们日以继

夜地移动金盘，谁也没等到金山出现之日就都回到天国里去了。

设 $h(n)$是把 n 个盘子从a 柱移至c 柱移动的盘次数(图3-66)。$n=1$ 时，显然 $h(1)=1$，$n=2$ 时，先把小盘移到 b 上，再把大盘移至 c 上，最后把小盘从 b 移至c，即 $h(2)=3$。若有 n 个盘，已用 $h(n-1)$次把 $n-1$ 个盘从 a 移至 b，再把 a 柱上的底盘移至 c，把 $n-1$ 个盘从 b 移至c 又用了 $h(n-1)$ 次，所以共用了 $h(n)=2h(n-1)+1$次。容易验证，$h(n)=2^n-1$。对于 $n=64$，需移动 $2^{64}-1$ 盘次。它的时间复杂度是 2^n，是坏算法，但这些移动次数是不能缩小的，所以上述“梵塔”问题不存在有效算法，非用坏算法不可。

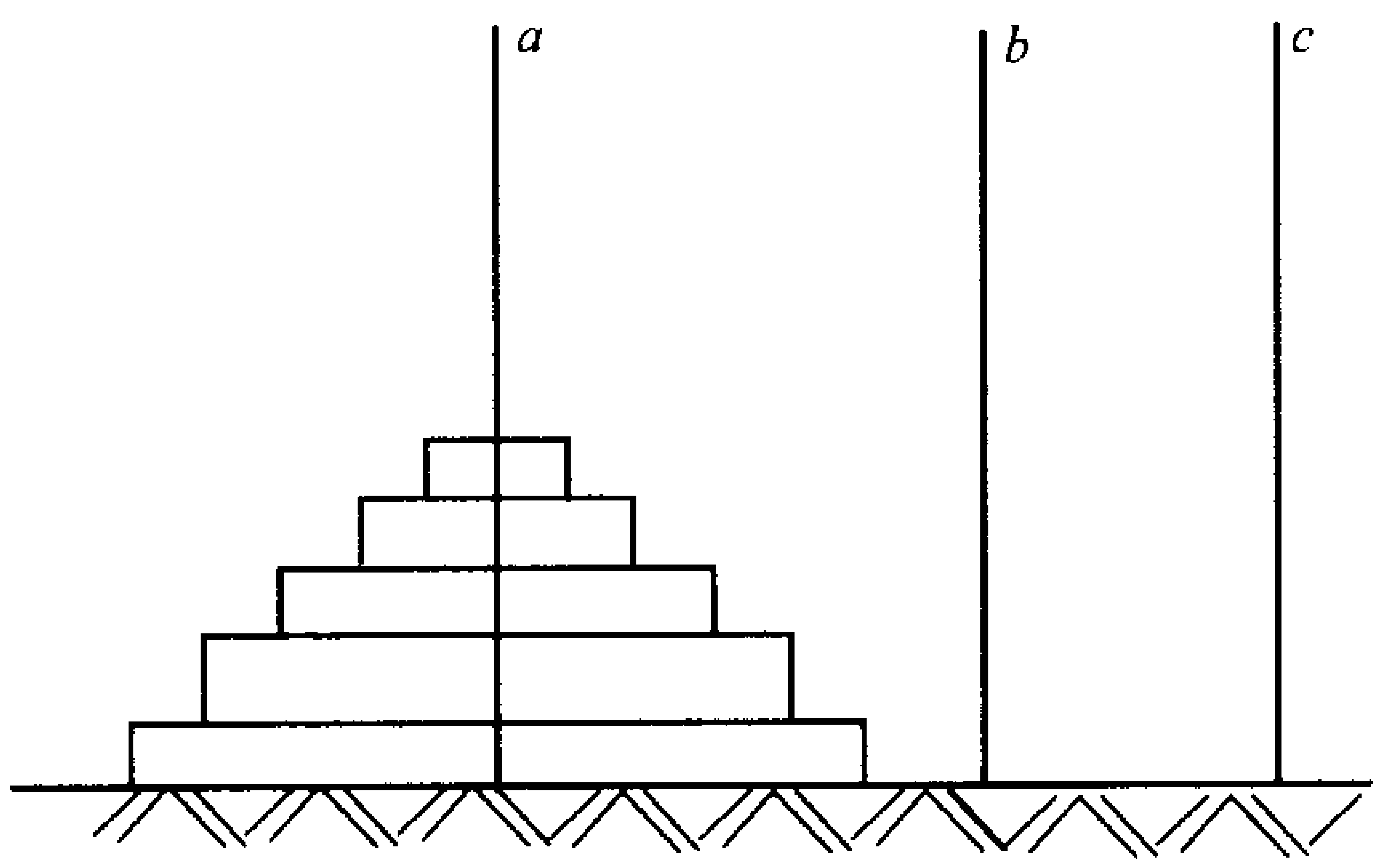


图 3-66

这一问题国际上通称“梵塔探宝”；即使每秒钟移一盘子，也需要 5800 亿年完成，可见喜玛拉雅山变成金山纯属财迷梦想。

3.47 软件要过硬

某计算中心主任是一个计算机科学的外行，他热衷于花费大笔外汇购置进口的大型计算机，对属下建议招聘高水平的软件制作人才，却不以为然，他说“刀快不怕脖子粗”，只要机器的运算速度高，软

件差点也可以。事实上，这位老兄不理解时间复杂性的降低是计算机科学的中心课题。1994 年程民德先生主编的《中国数学发展的若干主攻方向》把计算机数学列为十个主攻方向之首。把 P-NP 这一计算复杂度问题与机器证明列为重点课题。

下面让我们看一下算法的好坏对计算机的效能有何影响。

设算法 A 的时间复杂度是 n，算法 B 的时间复杂度是 2^n，其中 n 是已知数据的输入长。假设计算时间有限，例如是一个小时内必须完成计算。若用 B 算法，问题的输入长为 n_0 时，机器 C 一个小时内必须完成 2^{n_0} 个运算步骤，若花大笔资金买来一台新机器 C'，C' 的运算速度百倍于 C，指望用这台好机器来解决输入长比 n_0 大得多的实例，例如是否输入长也可以扩大百倍呢？

设 C' 一小时内处理的实例之输入长为 n，则

$$2^n = 2^{n_0} \times 100,\ n = n_0 + \log_2 100 < n_0 + 7$$

可见这台好机器只是把输入长增加了 7。

由于算法 B 太笨，埋没了好机器速度高的优势。而改用算法 A，则在 C' 上处理的输入长 n 满足 $n = n_0 \times 100$，即可以处理百倍输入长的复杂实例。

硬件要过硬，软件更要过硬。

3.48 选购宝石与满足问题

珠宝店柜台有三颗宝石，某顾客来购，他担心有假，征求三位识货行家的意见。行家甲说："1 号和 2 号是真的。"行家乙说："2 号和 3 号是真的。"行家丙说："3 号是真的，2 号是假的。"假如甲乙丙三位行家说对的可能都不少于 $\frac{1}{2}$，问顾客应选购哪颗宝石更保险？

记 x_1, x_2, x_3 分别是 1 号、2 号、3 号宝石的"真假变量"，当第 i

号宝石为真时，$x_i = 1$，否则 $x_i = 0$；"—"表示否定，即 $x_i = 1$ 时，$\bar{x}_i = 0$，$x_i = 0$ 时，$\bar{x}_i = 1$。由于每个行家说对了一半，故集合

$$\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, \bar{x}_2\}$$

中皆有元素 1；由 $\{x_2, x_3\}$ 与 $\{\bar{x}_2, x_3\}$ 中 x_2 与 $\bar{x}_2$ 必一个为 0；若 $x_3 = 0$，则 $\{x_2, x_3\}$ 与 $\{\bar{x}_2, x_3\}$ 中有一个是 $\{0, 0\}$，与 $\{x_2, x_3\}$ 与 $\{x_3, \bar{x}_2\}$ 中皆有元素 1 相违，故必有 $x_3 = 1$，选 3 号宝石保险。

一般而言，设有限变量集合为

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

X 中的每个变量在 $\{0, 1\}$ 中取值，且 $x_i = 1$ 时，$\bar{x}_i = 0$，$x_i = 0$ 时，$\bar{x}_i = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$；称

$$L = \{x_1, x_2, \cdots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n\}$$

为字集合，字集合的非空子集称为句子。对任给的一组句子 $\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$，是否存在一种对 X 元素的0～1 赋值方法，使得每个句子中都含有取值为 1 的字？

上述问题称为 SAT(satisfiabilty)问题。中文称为"满足问题"。

用满足问题来谈，在选购宝石的问题当中，变量集合为 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$，字集合为 $L = \{x_1, x_2, x_3; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$，给定的句子组为

$$C_1 = \{x_1, x_2\}$$

$$C_1 = \{x_2, x_3\}$$

$$C_1 = \{\bar{x}_2, x_3\}$$

由上所述，C_1，C_2，C_3 中皆有元素为 1，即存在赋值方法使每个句皆含取值 1 的字，对此 SAT 的实例(选购宝石问题)，判定为"是"。

3.49 计算机数学的心腹之患

我们把其答案不是"是"就是"否"的问题称为判定问题。例如前

面提到的满足问题 SAT 就是一个名彪数学史的判定问题。

对于判定问题 D，若存在一个多项式 $P(t)$，使得对 D 的每个输入长为 n 的实例，都能在多项式时间 $P(n)$ 内得以解决，则称此种判定问题 D 之全体组成的集合为 P 类问题集合。或者说 P 类问题是可用有效算法来解决的问题。

有的问题表面上看似乎不是判定问题，但可化成判定问题，例如对任给定的图 G，求色数 $\chi(G)=$？可以化成一个判定问题的有穷序列：

"是否可以用 $n-1$ 种颜色对 G 正常顶着色?"其中 n 是 G 之顶数。

若回答是，则再问：

"是否可以用 $n-2$ 种颜色对 G 正常顶着色?"

若回答是，则又问

"是否可以用 $n-3$ 种颜色对 G 正常顶着色?"如此步步追问，会出现问 k 种颜色是否可对 G 正常顶着色时，回答"是"；问 $k-1$ 种颜色是否可对 G 正常顶着色时，回答"否"；则知 $\chi(G)=k$。

图论问题当中有不少尚未发现它有无有效算法，这有两种可能：一是它存在有效算法，只是由于目前我们的无能(例如数学科学尚未发展到设计它的有效算法的水平)，暂时还没有找到那个有效算法，一是它犹如"梵塔问题"一样，本质上就不存在有效算法，我们盲目地探求其有效算法，只是徒劳。

由于我们讨论的是有限个数的事物，所以总可以用穷举法从中普查出那个适合要求的东西或最后宣布查无此事。例如判定一个图是否哈密顿图，目前未找到有效算法来判定，连哈密顿图的像样的充分必要条件都建立不起来。若猜想每一种顶的全排列是一个哈密顿图，然后用了多项式的时间判定每一猜想是否成立。我们已经知道，整个问题的最后解决用的总时间不是顶数的多项式，而是比指数时

间 2^n 还多的巨额时间，所以用这种方法，由于时间不够用，其实是不可能确定其答案的。

一般而言，对于一个判定问题 D，存在多项式 $P(t)$，对指定的 D 之任一实例，皆存在一批猜想，每个猜想都可以在 $P(n)$ 时间内解决，其中 n 是输入长，当且仅当存在回答为“是”的猜想时，对此实例的答案是“是”，这种判定问题 D 组成的问题集合记成 NP。显然 P⊆NP。

一个十分重要的问题是：P＝NP 是否成立？

但愿这一问题的答案是 P＝NP；如果这样，用笨拙的穷举法求解的 NP 问题就存在有效算法，剩下的问题便是努力设计其有效算法，而不必疑惑寻找有效算法的努力只是企图无中生有。可惜 P≠NP 这种坏事仍无法排除。P＝NP 是否成立是数学与计算机科学当中的主攻方向之一。它非常之困难，非常之重要，迫切需要回答，成了计算机数学的心腹之患！

3.50 同生共死 NPC

1972 年，数学家卡普（Karp）提出了 NPC 问题的概念，它们是由 NP 中最难的一批问题组成的。而且它们有繁殖能力和同生共死的特性。

设 D_1 与 D_2 是两个判定问题，存在一个映射 f 和一个多项式 $Q(t)$，使得对任给定的 D_1 的实例 I_1，若其输入长为 n，则在 $Q(n)$ 时间内 f 把 I_1 映射成 D_2 的一个实例的输入 $f(I_1)$，使 I_1 回答“是”的充要条件是 $f(I_1)$ 也回答“是”，则称在多项式时间内 D_1 可以转化成 D_2，记成 $D_1 \propto D_2$ 或 $D_1 \leqslant D_2$。

$D_1 \leqslant D_2$ 时，D_1 与 D_2 的一对实例 I_1 与 $f(I_1)$ 只要一个有了答案，另一个也跟着有了答案，但 D_1 中的全部实例 $I_1, I_2, \cdots, I_m$ 被一个个取出之后，$f(I_1), f(I_2), \cdots, f(I_m)$ 未必是 D_2 的全部实例输入，

可见 D_1 的时间复杂度不比 D_2 的时间复杂度大，这正是 $D_1 \leqslant D_2$ 中 "$\leqslant$"号的含义。即从一个判定问题转化出来的问题难度不减。

卡普把 NPC 定义为 NP 的如下子集：

$\mathrm{NPC} = \{D \mid D$ 是判定问题，$D \in \mathrm{NP}$，任一个 $D' \in \mathrm{NP}$，$D' \propto D\}$。

从上述 NPC 的 Karp 定义我们看出，NPC 中的每个问题集 NP 中所有问题在时间复杂性方面的难度于一身，是难上加难的一群问题！

$\mathrm{NPC} \neq \varnothing$，1972 年，多伦多大学的库克(Cook)用图灵机证明了 $\mathrm{SAT} \in \mathrm{NPC}$。这是历史上发现的首例 NPC 问题。它作为第一颗 NPC 的"种子"，繁衍了数以千计的著名的(有重要理论与实用背景的) NPC 问题。那位买宝石的顾客提出的问题，好像十分平凡，其中确含有现代科学的深刻道理。

NPC 有以下四条重要性质：

①$D_1, D_2 \in \mathrm{NPC}$，则 $D_2 \leqslant D_1$。

②$D \in \mathrm{NPC}$，假设 $D \in \mathrm{P}$，则 $\mathrm{NP} = \mathrm{P}$。

③$D \in \mathrm{NPC}$，假设 $D \in \mathrm{P}$，则 $\mathrm{NPC} \subseteq \mathrm{P}$；假设 $D \notin P$，则 $\mathrm{NPC} \cap \mathrm{P} = \varnothing$。

④$D \in \mathrm{NPC}$，$D' \in \mathrm{NP}$，$D \leqslant D'$，则 $D' \in \mathrm{NPC}$。

事实上，由 NPC 的定义，由 $D_1 \in \mathrm{NPC}$，则对每个 $D' \in \mathrm{NP}$，$D' \leqslant D_1$，令 $D_2 \in \mathrm{NPC}$，则 $D_2 \in \mathrm{NP}$，于是用 D_2 扮 D' 之角色知 $D_2 \leqslant D_1$，即(1)成立。注意，从(1)也可得 $D_1 \leqslant D_2$，即 D_1, D_2 都属于 NPC 时，在时间复杂度意义下，两者的难度一致。

若 $D \in \mathrm{NPC}$，则 $D \in \mathrm{NP}$，且任一 $D' \in \mathrm{NP}$，$D' \leqslant D$，若 $D \in \mathrm{P}$，由 $D' \leqslant D$ 知 $D' \in \mathrm{P}$，即这时当任 $D' \in \mathrm{NP}$ 时，$D' \in \mathrm{P}$，故 $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$，又 $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$，所以 $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$，②成立。结论②说明，只要抓住 NPC 中的一个问题，搞清楚它确为 P 类问题，则 $\mathrm{NP} = \mathrm{P}$。

由②知，当 $D \in \mathrm{NPC}$，$D \in \mathrm{P}$ 时，$\mathrm{NP} = \mathrm{P}$，但 $\mathrm{NPC} \subseteq \mathrm{NP}$，故 $\mathrm{NPC} \subseteq \mathrm{P}$，另一方面，若 $D \in \mathrm{NPC}$，但 $D \notin \mathrm{P}$ 时，$\mathrm{NPC} \cap \mathrm{P} \neq \varnothing$，则存在

$D_1 \in$ NPC∩P，即 $D_1 \in$ P，同时 $D_1 \in$ NPC，但由③的前半部，NPC⊆P，于是 $D \in$ P，与 $D \notin$ P 矛盾，故 NPC∩P=∅，③成立。③告知 NPC 中若有一个问题存在有效算法，则 NPC 中每个问题都有有效算法，即若一个问题“得救”（有有效算法）则 NPC 中每个问题都可得救；若一个问题确不存在有效算法，则 NPC 中每一问题都无有效算法，即一个问题不可救药（无有效算法），则 NPC 中每个问题都不可救药，简言之，NPC 问题同生共死。

若 $D \in$ NPC，则对每个 $D'' \in$ NP，$D'' \leqslant D$，又知 $D' \in$ NP，且 $D \leqslant D'$，则 $D'' \leqslant D'$，由 NPC 定义，$D' \in$ NPC。即④成立。④告知用“转化”的技术，可以从一个 NPC 问题生育出另一个 NPC 问题。事实上，正是从 NPC 种子 SAT 出发，逐次转化出形形色色的 NPC 问题的。

命题④说 NPC 转化出的问题仍在 NPC 的范围内，此即 NPC 的完备性或完全性。

成千上万的 NPC 问题互相牵连、互相攀比，形成一个顽固可怕的难题集团。数学和计算机科学的实践反复印证，NPC 中每个问题确实极难对付，谁也不敢期望何年何地何人能为这批声名狼藉的 NPC 问题中的某一问题设计出有效算法或证明出它的有效算法存在。从学术界的情绪上看，似有一种意向尽在不言中，那就是 NPC 中的问题不存在有效算法的可能性更大。

作者可以坦言：“诗是像你我这样凡人写出来的，只有上帝才能找出一个哈密顿圈；上帝并不存在，所以有效地判别图有无哈密顿圈就成了难以解决的问题了。”我们应当去解决那些我们能解决的问题，承认 NPC 中的问题我们尚无能为力，并学会区分 NPC 与 P 的本领。

3.51 NPC 题谱

①任给定图 G，$\chi(G) \leqslant 3$ 吗？（代号 3C）

这一问题称为三色问题，它是 NPC 中一员。在库克证明了 SAT $\in$ NPC 之后，接着证明了 SAT$\leqslant$3SAT，所谓 3SAT 是 SAT 中每字恰三个字的情形，用 3SAT$\leqslant$3C(三色问题)可证明 3C$\in$NPC。

事实上，显然 3C$\in$NP，这可以把 $V(G)$的顶划分成两个非空子集 V_1，V_2，把 V_1 着 1 色，V_2 着 2 色，再检查有无邻顶同色，对所有可能的各种划分都如此检查，如果发现有一种划分，无邻顶同色，则知 $\chi(G)\leqslant 2$，否则，把 V 划分成三个非空子集 V_1，V_2，V_3，V_i 着以 i 色，$i=1,2,3$。再检查有无邻顶同色，对所有各种三子集划分都如此检查，如果发现有一种划分，无邻顶同色，则知 $\chi(G)\leqslant 3$，否则 $\chi(G)\geqslant 4$。可见 3C$\in$NP。

下证 3SAT$\leqslant$3C。

设 3SAT 的输入为 I，I 是字集 $L=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}$，句子集为$\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$，相应的 3C 的输入 $f(I)$为下面的图 $G(V,E)$，见图 3-67。

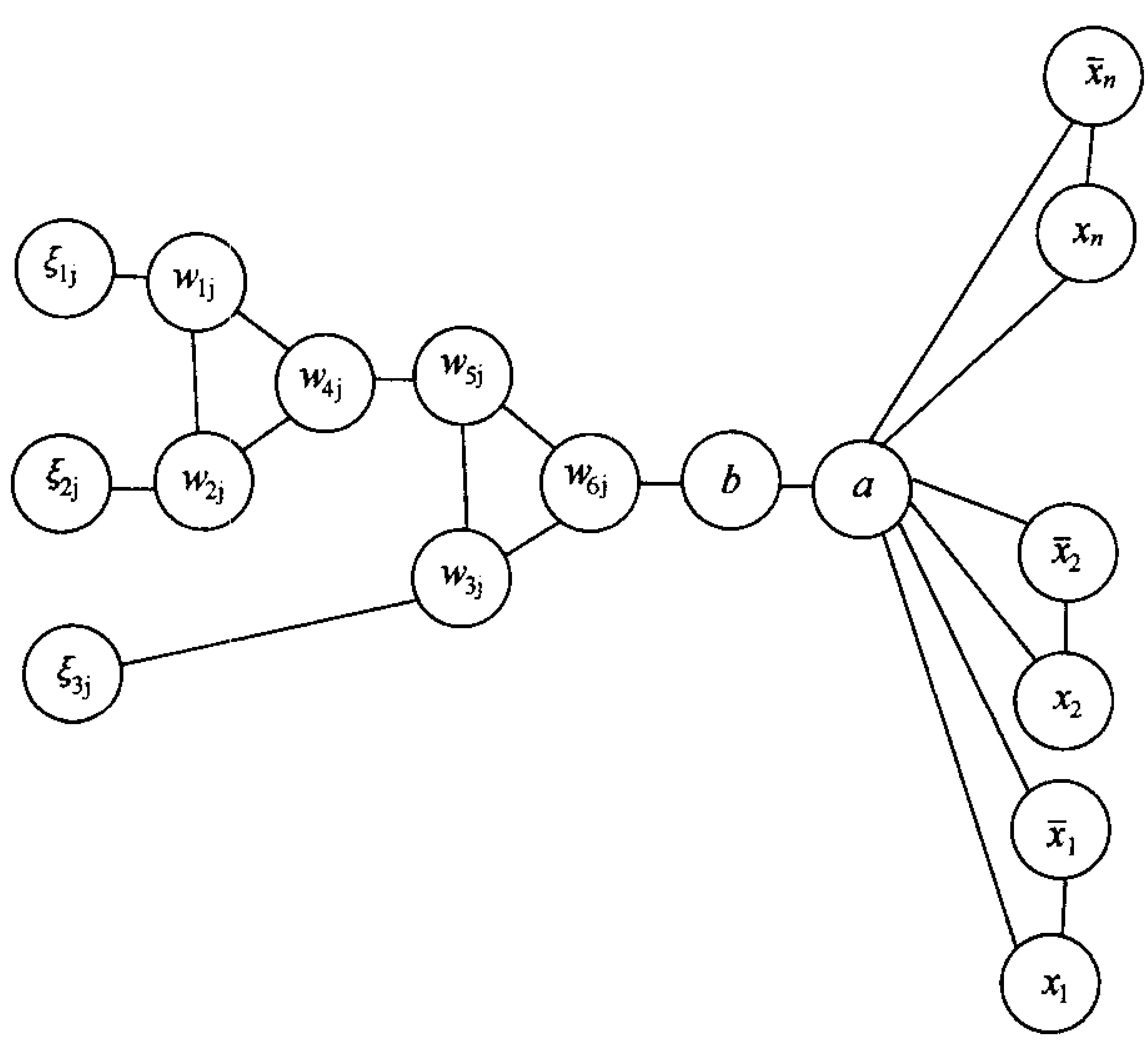


图 3-67

$$V(G)=\{a,b\}\cup\{x_i,\bar{x}_i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{w_{ij}\mid 1\leqslant i \leqslant 6, 1\leqslant j\leqslant m\}$$

$$E(G)=\{ab\}\cup\{ax_i, a\bar{x}_i, x_i\bar{x}_i \mid 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{w_{1j}w_{2j}, w_{1j}w_{4j}, w_{2j}w_{4j}, w_{4j}w_{5j}, w_{3j}w_{5j}, w_{3j}w_{6j}, w_{5j}w_{6j}, w_{6j}b \mid 1\leqslant j\leqslant m\}\cup \{\xi_{1j}w_{1j}, \xi_{2j}w_{2j}, \xi_{3j}w_{3j}\mid 1\leqslant j\leqslant m\}$$

$C_j=\{\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j}\}, j=1,2,\cdots,m, \xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j}\in L$。图 3-67 左侧的 $\textcircled{\xi_{1j}}$，$\textcircled{\xi_{2j}}$ 和 $\textcircled{\xi_{3j}}$，是右侧的某三个顶。

设 0,1,2,是使用的三种颜色，若 I 已是句句“满足”，我们约定当字 $\xi_{kj}=1$ 时，顶 ξ_{kj} 上 1 色，字 $\xi_{kj}=0$ 时，顶 ξ_{kj} 上 0 色，$k=1,2,3$。由于 I 中句句满足，所以没有$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j})=(0,0,0)$的情形。

把 b 着以 0 色，a 着以 2 色，w_{6j}着以 1 色，$j=1,2,\cdots m$。于是可得正常着色。

反之，若 $f(I)$已用三种颜色正常着色，我们称 a 上的颜色为 2 号色，b 上的颜色为 0 号色，于是各“字”上的颜色为 0 色或 1 色，且 w_{6j}不是 0 色；用反证法容易证明$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j})\neq(0,0,0)$。这时我们规定 3SAT 的赋值法为：

“字”为 1 色时，此字赋值 1；“字”为 0 色时，此字赋值 0。

于是$(\xi_{1j},\xi_{2j},\xi_{3j}), j=1,2,\cdots,m$ 皆“满足”，即每句中有 1 值，至此证出 3C∈NPC。

从上述证明我们看到，欲证一个问题属于 NPC，很需要技巧，这种证明一般都比较难！ 下面不证明地列出一些重要的 NPC 名题题谱。

②甲乙丙三个班学生数一样多，今欲分组，每组三人，分别来自三个班；有一批卡片，每张上写着一个小组的名单，但卡片不是出自一人之手，可能有一位同学的名字两张卡片上都有，问能否从这些卡片中选出一些作为分组方案，使得每个同学恰参加一个小组？

③一个班的学生,分成三人一组,要求每个学生恰参加一个小组的活动;今有卡片若干,每张卡片上写有三个同学的姓名,问是否可以从这批卡片中挑出一些来,作为分组的一种方案?

④一个班的学生选修了一些教授的课,问最少几位教授,他们收到的选课生名单合在一起,写有全班每个同学的名字?

⑤全校同学选修一些教师的课,如果一位同学选了两位老师的课,则这两位老师的课不能排在同一时间,问至多有多少位老师同时上课?

⑥一个背包至多能装 b 千克东西,今有 a_1 千克,a_2 千克,…,a_n 千克的 n 件物品,问能否从中挑出几件,装入背包后,总重量恰为 b 千克,其中 $b,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆自然数。

⑦m 个盒子,每个都标志着封存了若干相同的球,不许拆封,能否把这些球平分?

⑧在已有的网络上选择连接指定的一些城市的最廉价的交通或通信子网络。

⑨在一个通信网中找出一些城市,使得这些城市两两直通信息且城市个数最多。

⑩在信息传输当中,基本信号集合中有些信号易于混淆,如何筛选出尽可能多的信号,使得筛选出来的信号两两不会混淆?

⑪炸毁鬼子至少几个火车站,可使其铁路网全部瘫痪?

⑫在全国乘火车旅游,要求每个车站都恰为到过一次,又回到家,是否可能?

⑬一位货郎到各村去卖货,再回到出发的商店,他管辖的每个村子都要串到,为其设计一条路线,使得旅行售货的时间最短。

⑭在若干城镇建立有线通信系统,再从这些城镇中选出几座在那里建中心台站,使得中心台站数目最少,且这些中心台站与其余各城镇有直通电缆。

⑮把一群人划分成若干小组,使得每个小组以外的每个人员都

是该小组中某人的熟人，问最多能分成几组？

⑯一个电路网络的结点放在一条直线上，两结点间有导线相通时，导线要拉直，且结点间距为1，问应如何安置结点，使得导线总长最短？

⑰一位邮递员从邮局选好邮件去投递，然后回到邮局，他必须经过他管辖的每条街道至少一次，有些街道是单向交通的，试为他选择一投递路线，使其所行路程尽可能少。

⑱甲乙工厂的产品在同一铁路网上分别运往各自的市场，每个市场对相应的那个厂子的商品有一定需求，如何协调运输方案，使得甲乙的市场需求都得到满足？

⑲开始时，一部分人得知一个消息或谣言，知情人同时用电话把此消息通知了自己的一位朋友，这些更多的知情人又用电话同时扩散这一消息，是否可以使得所有的人都得到这个消息，且扩散时间最短？假设每人至多打一次电话。

⑳一个负责对几个乡村送信的邮递员，他必须行遍他管辖的每个村子的每条街道至少一次，然后返回邮局，问他行程最短是多少？

㉑圆桌会议上欲使邻座尽可能相识，问至少有几对邻座不相识？

以上这些问题貌似朴实平凡，若不深入研究，看不出它们有什么了不起的数学含量和难度；事实上，由于它们的数学模型个个都是NPC问题，其计算的时间复杂程度真可谓似天高似海深！

此前，我们讲出了那么多十分有趣，十分生动、十分精彩的图论问题，使我们欣悦轻松，我们对其喜称“美丽图论”；但自从接触到NPC的难题，我们便眉头紧皱，心情沉重，那么多非常实际的问题，其数学模型却是该死的NPC成员。一方面是生产科研与生活实践迫切要求数学家有效地解决这些问题；另一方面是数学家和计算机专家对这种问题一筹莫展。图论给科学工作惹出这般的困惑和难堪，实为图论的丑陋。

4 组合篇

组合数学这个特殊的分支是沿着现代数学主流的边缘或者离开主流行进的。

——贝尔热

4.1 神龟龙马，洛书河图

公元前2200年，我国商周时代的《易经》中载：大禹治伏水患之后，洛河上浮出一只巨型神龟，背驮如图4-1所示的“洛书”献给大禹，作为苍天对他治水有功造福百姓的奖励。这幅天书横看、竖看和斜看，每一组由黑点子●与白点子○合成，总点数皆为15。后来人们把此洛书翻译成如图4-2所示的一个所谓幻方。

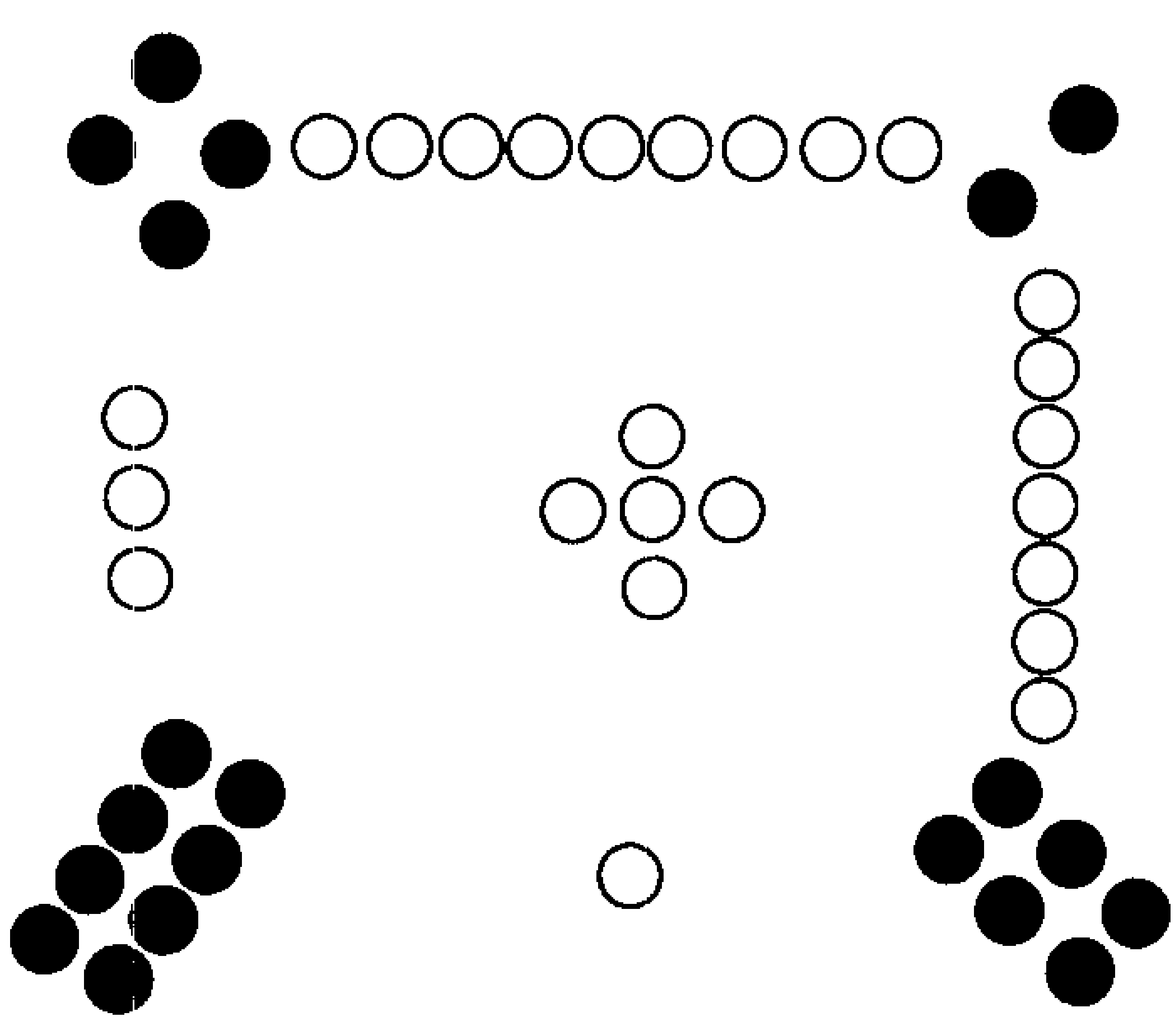


图4-1

所谓幻方，是由 1, 2, 3, …, n^2-1, n^2 组成的一个数字方阵，每数恰在此阵中出现一次，且每行之和，每列之和和两条对角线上的数字之和皆相等。

1275 年，我国宋代著名数学家杨辉把洛书形象地描写为："九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺进，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足。"破译了洛书的玄机，见图 4-3。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 4-2

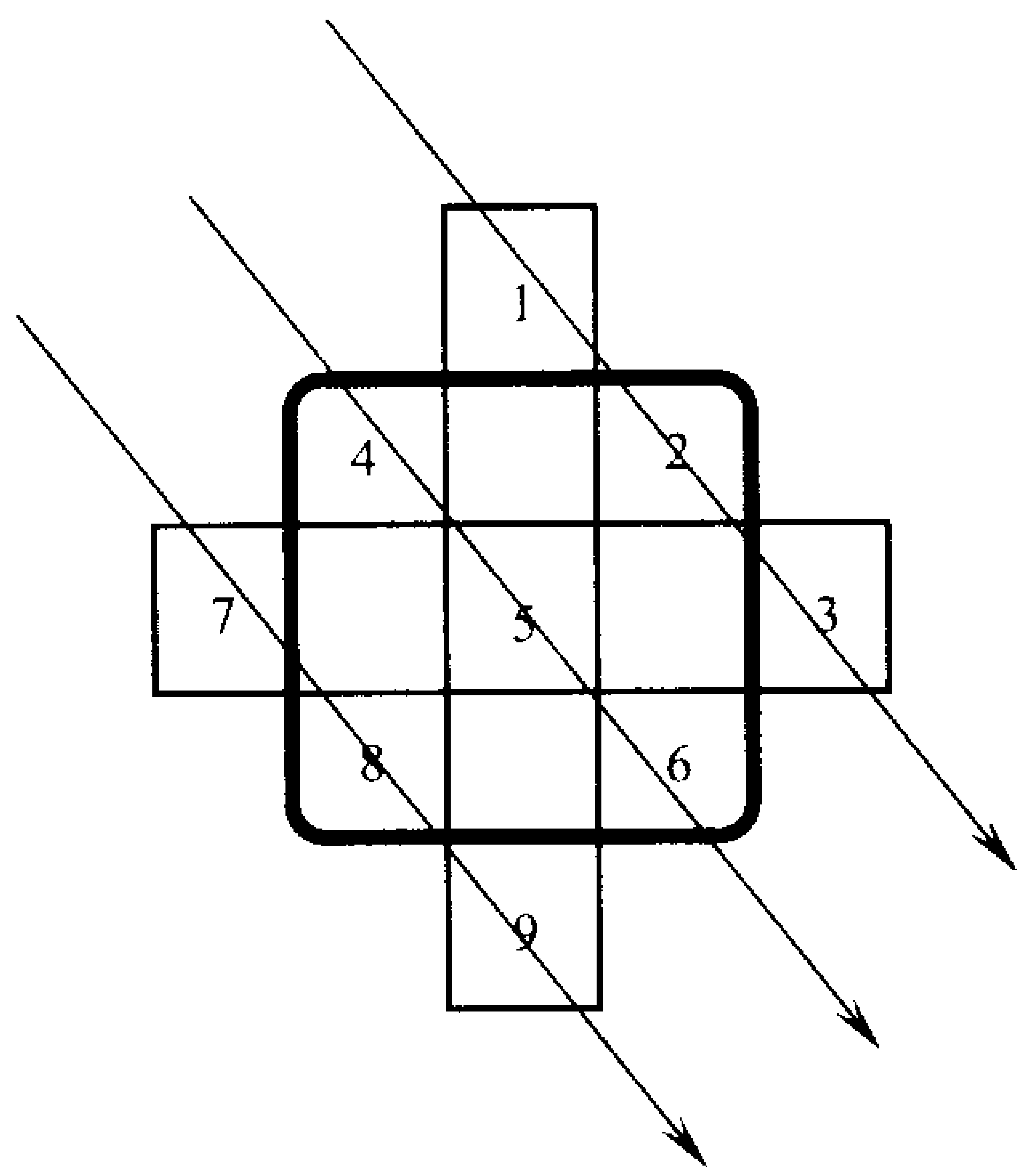


图 4-3

"九子斜排"是按箭头方向分别把 1, 2, 3, 4, 5, 6 和 7, 8, 9 排成具有右下方走向的一排，三个斜排组成一个倾斜 45°角的正方形阵。

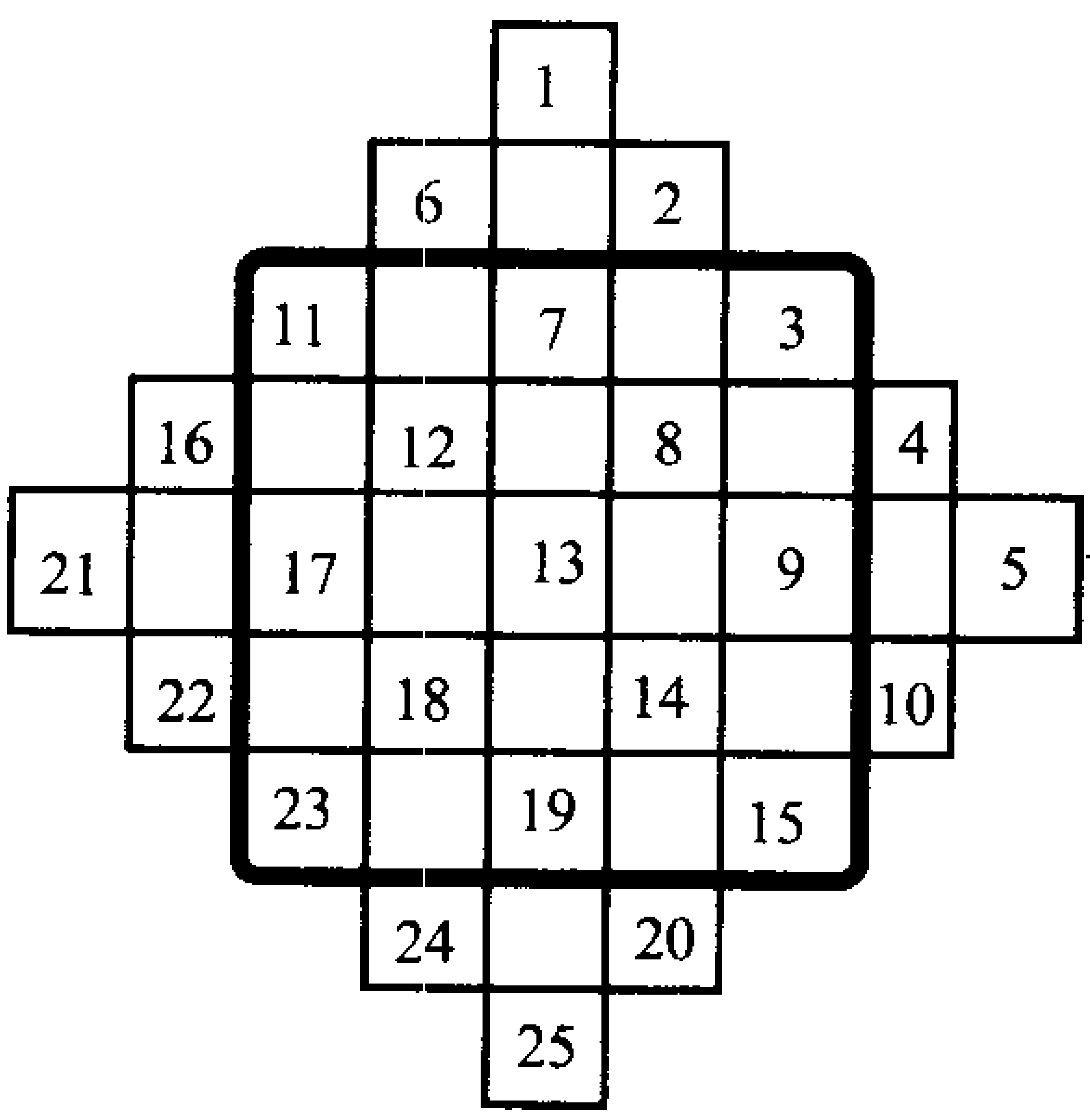
"上下对易"，指 1 与 9 对换，1 移入最下空格，9 移入最上空格，使得正中的头部戴了一个 9 的帽子，正中最低处穿了一双 1 字鞋，即"戴九履一"。

"左右相更"，指最右边的 3 与最左边的 7 对调，3 移至左侧空格，7 移至右侧空格。

至此造成一个四方阵，即"四维挺进"，又 2 与 4 分别在右上角

(肩)与左上角,6 与 8 分别在右下角(足)与左下角,即“二四为肩”“六八为足”。

杨辉的这种口诀中的关键词是“n^2 子斜排”“四维挺进”“上下对易”和“左右相更”四句。图 4-4 和图 4-5 分别给出按杨辉口诀构作的 5 阶幻方和 7 阶幻方,任意奇数(大于 3)阶的幻方皆可照此制作,但同阶幻方不是唯一的,高阶幻方的个数非常之巨大,例如五阶幻方就有一千多万个! 另外,杨辉口诀不适用于偶阶幻方,偶阶幻方的构作十分困难。



(a)

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

(b)

图 4-4

“对易”和“相更”时,移动的步数恰为幻方的阶数,例如图4-5(a)中顶上的 1 下降 7 步至 33 的上方邻格内,图 4-5(a)中的 9 下降 7 步至 33 的下方邻格内,图 4-5(a)中的 7 左移 7 步至 25 的左侧邻格,等等。

洛书对应的幻方史称“神农幻方”。

《易经》上又云,为奖励大禹功绩,一匹龙马从黄河跃出,把如图 4-6所示的一张“河图”赠予大禹。

图 4-6(b)是相应位置上“点子”的个数,不过 4 个 10 的意思是被虚线联络的 10 个黑点子视为分布在它们形成的正方形的四个顶处。

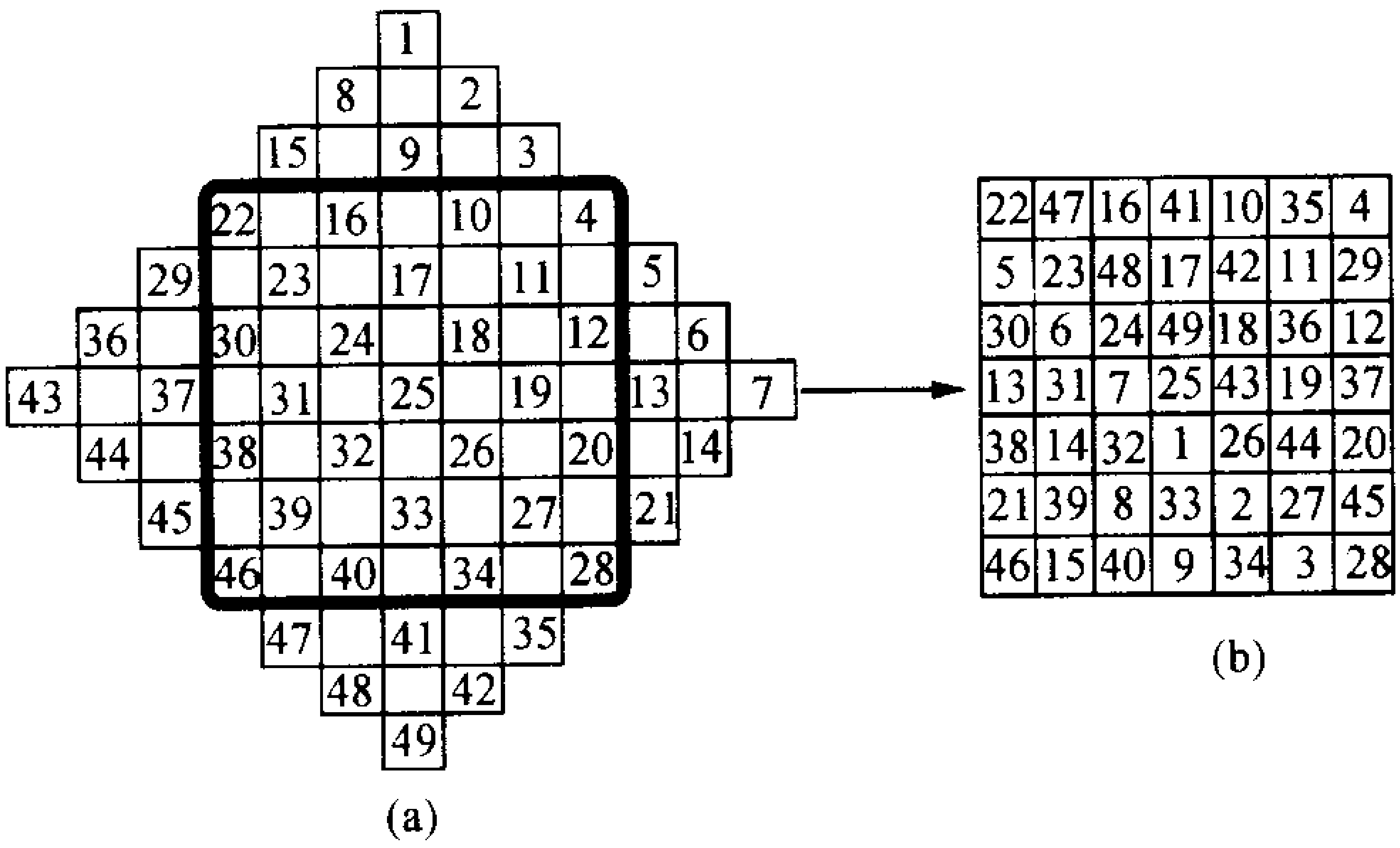


图 4-5

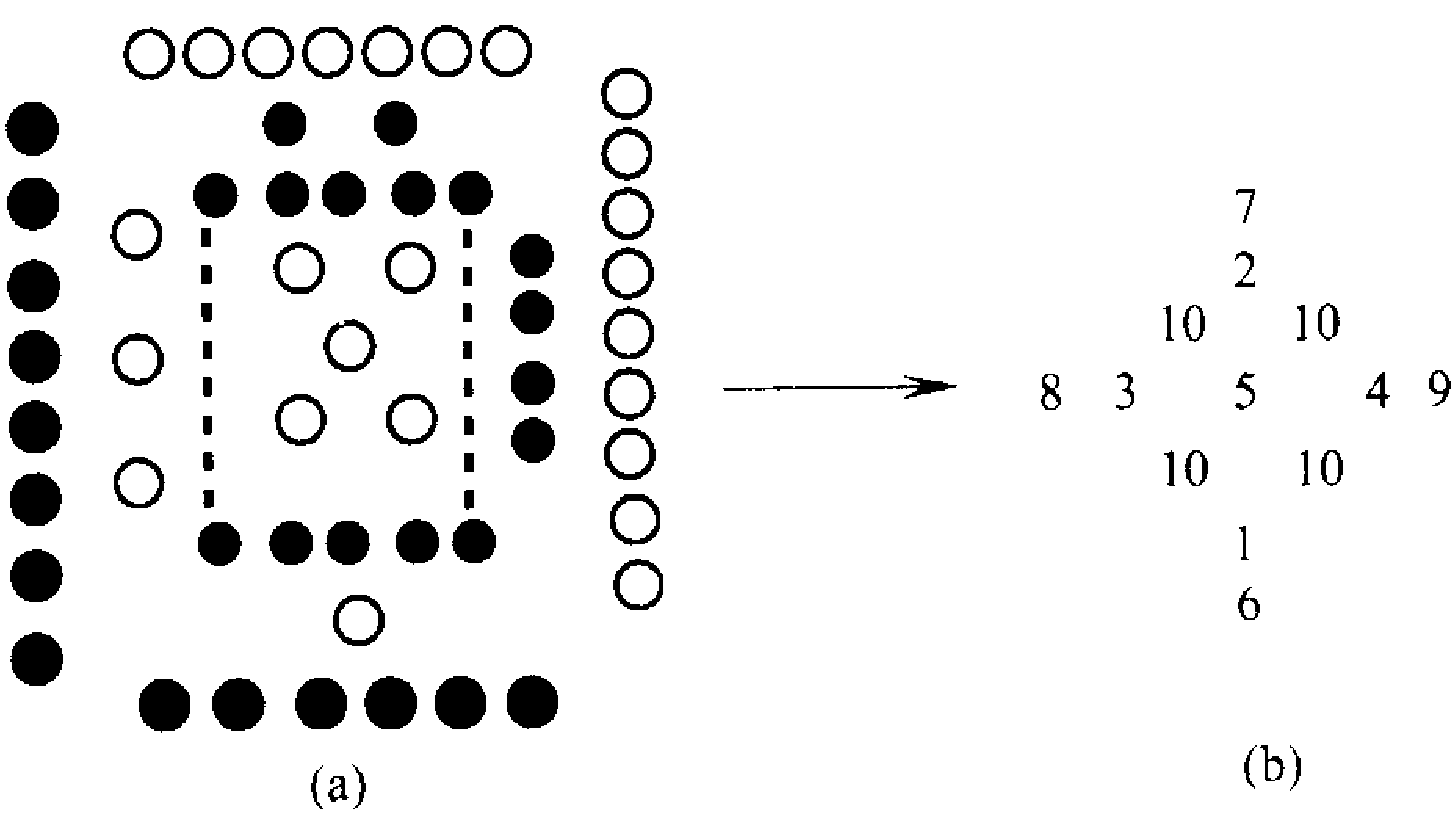


图 4-6

这样,河图的数学含量就大了:

从中心 5 向右加上 4 等于最右端的 9;

从中心 5 向左加上 3 等于最左端的 8;

从中心 5 向上加上 2 等于最上端的 7;

从中心 5 向下加上 1 等于最下端的 6。

斜着看,7+9=2+10+4=16,8+6=3+10+1=14,9+6=4+10+1=15,8+7=2+10+3=15。

洛书和河图出自四千多年前中华民族之手，是世界组合数学的最早成果，值得我们自豪；可惜它被后人神化，未能发展成系统的理论；中国几千年的封建君主统治，鼓励乃至强迫知识分子为皇帝歌功颂德，使大多数知识分子成为什么科学知识也没有只会呼喊皇帝万岁的奴才，在这种社会背景之下，中国的许多本应领先的数学分支和组合数学一样，并没有发展起来。事实上，组合数学不仅是数学科学的重要分支，而且是信息产业和计算机科学的数学基础之一，现代数学教育和数学科研当中，必须给以足够的重视。

4.2 三只鸽子两个窝

三只鸽子出去觅食，晚上归巢栖息，它们共有两个窝，显然必有一个窝里至少住有两只鸽子，不然，即使每巢一只鸽子，还有一只鸽子不能回巢。一般而言，对于自然数 n，$n+1$ 只鸽子住在 n 个巢中，至少有一巢里不少于两只鸽子。

这一结论称为鸽笼原理或抽屉原理。

把 m 本书放入 n 个抽屉，$m>n$，至少一个抽屉里放了多于 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 本书，其中 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 表示 $\frac{m-1}{n}$ 的整数部分。当 $m=n+1$ 时，$\left[\frac{m-1}{n}\right]=1$，即 $n+1$ 本书放入 n 个抽屉，至少一个抽屉里放不少于两本书。

事实上，若每个抽屉里放的书都不超过 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 本，则总的本数不超过 $n\cdot\left[\frac{m-1}{n}\right]\leqslant n\cdot\frac{m-1}{n}=m-1$，与共有 m 本书矛盾。所以一定是有的抽屉里放了多于 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 本书。

就是这么一个几乎不证自明的道理却能解千种难题，有万般应用。

下面是一些应用鸽笼原理的生动实例。

①某军弹药库每天需一个班保卫，保卫排六个班，一周内至少有一个班出勤两天。

②13 人中必有两人同一个月份出生。

③商店里有 10 双皮鞋放在货架上，有 11 位顾客同时来购鞋，售货员给每位顾客拿出一只鞋试穿，则顾客们手中必有两只鞋恰是一双。

④从{1, 2, …, 2000}中选 1001 个数，其中必有两个，一个是另一个的整数倍。

事实上，取出的每个数可表成 $2^n a$，n 是非负整数，a 是奇数，故对 1 到 2000 的每个数，a 是 1000 个奇数 1, 3, 5, …, 1999 中的数，可见在所选的 1001 个数中，有两个数的奇数因数 a 是一样的，它们是 $2^{n_1}a$ 和$2^{n_2}a$，不妨设 $n_2>n_1$，则 $2^{n_2}a\div 2^{n_1}a=2^{n_2-n_1}$，即后者能被前者除尽。

⑤在正六边形内任放七个点，则至少有两点之间的距离小于或等于该正六边形外接圆的半径。

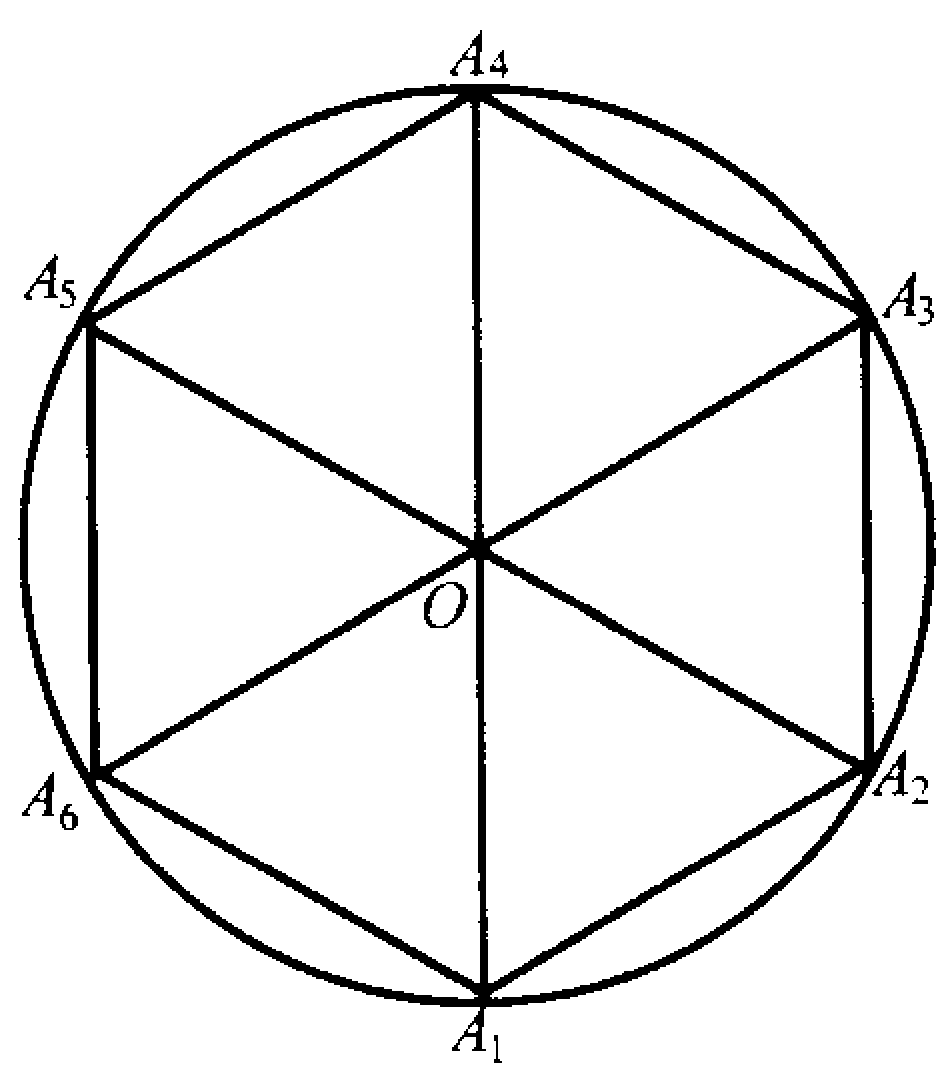


图 4-7

连接正六边形的三条对角线如图 4-7，由鸽笼原理，在图4-7的六个三角形的某个上面必然有放置的七个点中的两个，它们的距离不大于正六边形外接圆的半径。

⑥把 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$ 个球放入 n 个盒子，其中 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 皆正整数，则下面 n 件事至少发生一件：第一个盒子中至少有 m_1 个球，第二个盒子中至少有 m_2 个球，…，第 n 个盒子中至少有 m_n 个球。

事实上，若这 n 件事都不发生，则总球数不会超过$(m_1-1)+$

$(m_2-1)+\cdots+(m_n-1)=m_1+m_2+\cdots+m_n-n$，而原来有球 $m_1+m_2+\cdots+m_n-n+1$，矛盾。

⑦$n(r-1)+1$ 个鸽子进入 n 个窝，r 是自然数，则至少一个窝里的鸽子不会少于 r 只。

⑧n 个自然数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的平均值大于 $r-1$ 时，$m_1, m_2, \cdots, m_n$ 中至少有一个不小于 r，r 是自然数。

事实上，如果 $m_i<r$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $m_1+m_2+\cdots+m_n<nr$，$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}<r$，与 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的平均值大于 $r-1$ 矛盾。

⑨任给定 n^2+1 个不等的实数组成的数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$$

则此数列中至少存在由 $n+1$ 个实数组成的单调递增或单调递减的子数列。

事实上，记 m_i 是从 a_i 开始最长的单调递增子数列的长度，若存在某个 $m_i \geqslant n+1$，则命题⑨已成立。否则，$m_i<n+1$，$i=1,2,\cdots,n^2+1$。于是 m_i 在 1 与 n 之间，这相当于把 n^2+1 个球 $m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$ 放入 n 个盒子，由命题⑦，这是 $r=n+1$ 的特殊情形，则 $m_1, m_2, \cdots, m_{n^2+1}$ 中至少有 $n+1$ 个数相等，不妨设

$$m_{i_1}=m_{i_2}=\cdots=m_{i_{n+1}}=m$$

其中 $1 \leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n+1} \leqslant n^2+1$；于是 $a_{i_1}>a_{i_2}>\cdots>a_{i_{n+1}}$，若不然，例如 $a_{i_1}<a_{i_2}$，而由 a_{i_2} 开始的递增子列的长度 $m_{i_2}=m$，再把 a_{i_1} 接到此子列前面，则知 $m_{i_1} \geqslant m_{i_1}+1=m+1$，与 $m_{i_1}=m$ 矛盾。至此找到由 $n+1$ 个数组成的递增子序列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{n+1}}$。

例如 17 个数组成的数列

$$9,8,18,20,7,5,4,6,11,15,10,13,12,19,17,3,14$$

$17=4^2+1$，由命题⑨，上述数列中有 $4+1=5$ 个数组成的单调子数

列，事实上，5，6，11，15，19 就是一个。20，7，5，4，3 是另一个。

从⑨我们看到了“无序中的有序现象”，任意给定的两两相异的若干实数随意排列，却造成单调子列，而且当原数列很长时，此种单调子列也很长，数列无穷，则必含无穷长的单调子列。

⑩圆形舞台，其圆形屋顶匀称地安装两圈灯，外圈 100 只固定，其中 50 只红灯，50 只绿灯，两色灯随意混合排列；内圈也有红、绿两色灯共 100 只，其中红绿只数不限，混合在一起，内圈可以绕屋顶中心旋转。则内圈转到某一位置时，会使得内外圈对应位置上的灯至少有 50 对同色。

事实上，内圈旋转一周的过程中，内圈每只灯都与外圈的灯有 100 个对应位置，内圈的每只灯在其旋转一周的过程中，与外圈的同色灯有 50 个对应位置，这一过程中造成同色灯成对的次数为 $50\times100=5000$，每一位置上同色灯对应的平均次数为 $5000\div100=50$，由命题⑧知，内圈转到某位置时，会使得同色灯至少 50 对。

仿⑩中的道理可知下面判断成立：

全班共 60 名同学，从中选 30 名同学赴黄河上游考察，选出的同学当中男女各半；剩下的同学男女个数不详，随机地排成一队来欢送。出发的同学们随机地列队与欢送同学面对面握手告别，为了和留下的每位同学都握手，他们最右边的那位同学握过手之后就跑到最左侧去与另外的同学一一握手，则定有一个时刻，有 15 对正在握手的同学是同性别的。

4.3 好括号和姊妹洗碗

饭后，姐妹去厨房洗碗，妹妹只管把姐姐洗好的碗一个一个放入碗橱摞成一摞。共有 n 个图案两两相异的碗要洗，洗前已摞成了一摞；妹妹贪玩，碗拿进碗橱可能不及时，姐姐就把洗过的碗摞成一摞

等妹妹一个个来拿，问妹妹摞起的碗可能有几种方式？

与此姐妹洗碗问题有血缘关系的问题很多，例如下面的汽车队加油问题和括号列问题就是同种问题：

一个汽车队在狭窄路面上行驶，不得超车，但可以进入一个路过的死胡同里的加油站去加油，之后再插队行驶，共有 n 辆汽车，问可能有几种排列不同的汽车队开出城去？

$(a+b)(a-b)$中的括号列“(　)(　)”是正确使用的括号，如果写成“$(a+b)(a-b$”，或“$(a+b))(a-b)$”则是错用括号了，一般而言，所谓正确使用的括号列或称好括号列是指：

①“(　)”是好括号列；②若 A 与 B 是好括号列，则 AB 也是；③A是好括号列，“(A)”也是。除此三种之外再无别样好括号列。

不是好括号列的括号列为坏括号列。

一个括号列的好坏一读便知。

一个括号列是好括号列的充分必要条件是它由偶数个括号组成，其中半数是左括“(”，且从左向右读这个括号列时，读出的右括号“)”不会比左括号多。

这一判别法的证明很通俗易懂。若括号列是好的，显然它是由左括占半数的偶数个括号组成的。下面用关于括号数的归纳法证明从左至右读时，读出的左括号不比右括号少。事实上，若括号数为 2，命题显然成立，它就是“(　)”。假设对 m 个左括 m 个右括的好括号列，命题已真，$m<n$，考虑由 n 个左括 n 个右括组成的好括号列。

情况 1　若造这一括号列时，最后一步是②，此括号列形如 AB，A 与 B 皆好列，从左向右读时，只要还在读 A，由归纳法假设，读出的左括号不比右括号少，当读到 A 的最后一个括号时，读出的左右括号一样多。再向右读，即读 B，由归纳法假设，读出的右括号总数仍然不会超过读出的左括号总数。

情况 2 若造此括号列时最后一步是③，命题显然成立。至此必要性证出。

下面证明充分性，即在左括占半数的括号列中，从左向右读时，读出的左括号不比右括号少，则此括号列是好列。仍用关于括号数的归纳法。括号数为 2 时，命题显然为真。假设 $m<n$ 时，对 m 个左括和 m 个右括组成的括号列命题已真，考虑 n 个左括 n 个右括的括号列，从左向右读时，若读了 $2m$ 个括号后，读得的左右括号个数相等，由归纳法假设，读出的这个子列 A 是好括号列，右面未读的子列 B 也满足命题条件，由归纳法假设，B 亦是好括号列，所以整个括号列 AB 是好括号列。

若上述括号列 A 不存在，从左向右读时，读了第一个括号而未读其他括号时，由命题条件，第一个括号必为左括号"("，读到只剩下一个括号未读时，已读出的左括号不比右括号少，而左右括号总数各占一半，故最后一个括号必为右括")"，于是原括号列形如"(A_1)"，A_1 仍满足命题条件，由归纳法假设，A_1 是好括号列，故"(A_1)"也是好括号列。至此好括号列的充要条件证完。

由 $2n$ 个括号组成的好括号列可能有多少？为了算出这个数，先从坏括号列谈起，设 $p_1p_2\cdots p_{2n}$是 n 个左括 n 个右括构成的坏括号列，由好括号列的充要条件，此坏括号列必有一个前缀，其中的右括比左括多，设 $p_1p_2\cdots p_j$是右括比左括多的最短前缀，这时右括号只比左括多 1 个，把从 p_{j+1}开始的每个括号"翻"过来，则得 $n-1$ 个左括 $n+1$ 个右括的坏括号列，显然这一变换是可逆的，故 n 个左括号与 n 个右括号组成的坏括号列与 $n-1$ 个左括 $n+1$ 个右括组成的括号列一一对应；$n-1$ 个左括 $n+1$ 个右括组成的括号列共计 C_{2n}^{n+1} 个，n 个左括 n 个右括组成的括号列共计 C_{2n}^{n}个，所以 $2n$ 个括号的好括号列共有

$$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1}=\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!}-\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n)}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$$

至此求得 $2n$ 个括号的好括号列共计$\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$个。

回到姐妹洗碗问题，姐姐洗一个碗放在碗橱外洗好的碗摞上时，立即画一个左括“(”，妹妹从橱外碗摞上拿一个碗放入橱内时，立即画一右括“)”，如果姐俩共需洗 n 个碗，则一共要画 $2n$ 个括号，而且姐姐画了 n 个左括，妹妹画了 n 个右括，又画完括号后，从左向右读时，读到的左括号不少于右括号，因为姐姐洗过的碗任何时候也不比妹妹拿进碗橱里的碗少，由好括号列的充要条件，姐妹的括号列是好括号列，而且任给一个好括号列，都唯一地确定一种妹妹摞碗的方式，又知好括号列可能有$\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$个，所以妹妹摞起的碗摞可能有$\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$种。

例如有 10 个碗，则洗后碗摞可能有

$$\frac{1}{10+1}C_{20}^{10}=\frac{20\times19\times18\times17\times16\times15\times14\times13\times12\times11}{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=16796\text{ 种}$$

只有 10 只碗就可以摆出数以万计的碗摞来！

如果汽车进胡同口时画“(”，出胡同口时画“)”，一辆车不加油，则连画“(　)”，于是得一好括号列，而且任给一个好括号列，都唯一地确定一种汽车的排列，所以汽车加油问题的答案也是$\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$。

用括号列技术还可解决许多有趣的难题，再看几例。

【例 1】 一行树，共 n 个顶，这种树林共计有$\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$种。例如共

3 个顶的树林如图 4-8 所示，共可形成 5 种林子，恰有$\frac{1}{4}C_6^3=5$。

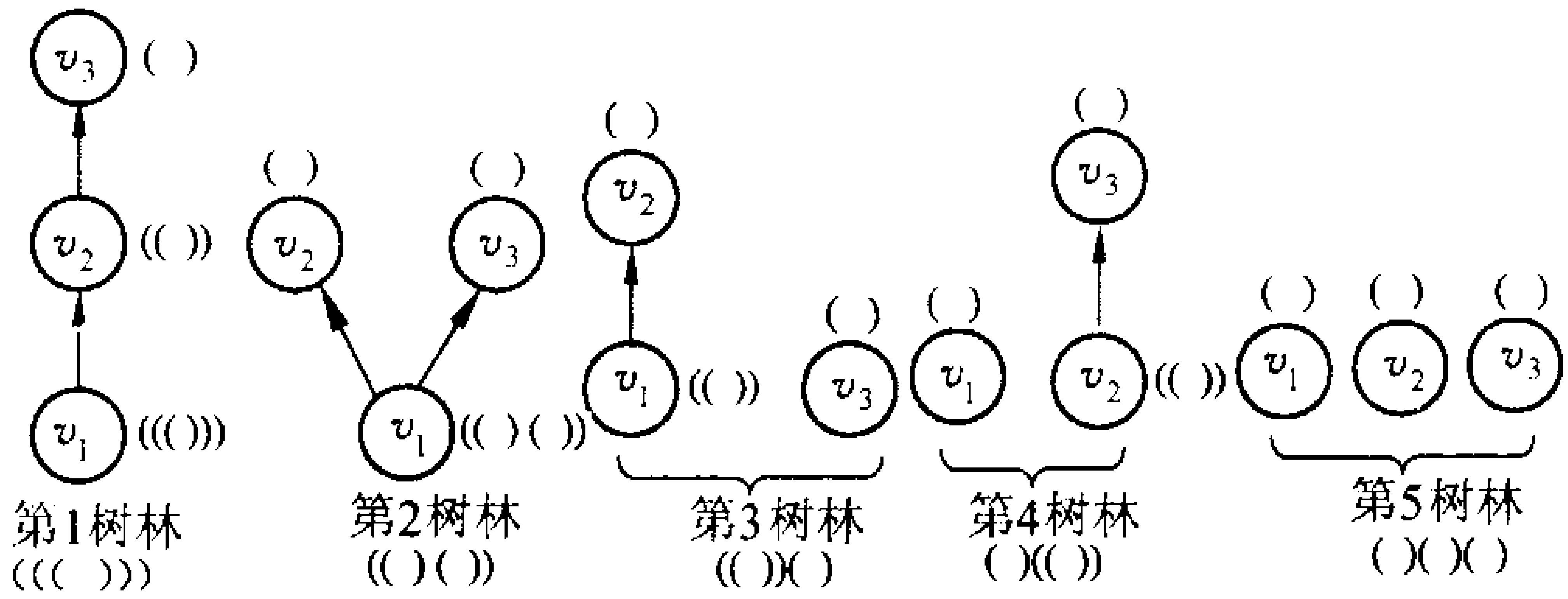


图 4-8

一般地，把叶标志成“(　)”；若一顶长出的顶从左到右依次已标为 $v_1, v_2, \cdots, v_s$，则此顶标为$(v_1, v_2, \cdots, v_s)$；从左到右每棵树的根已标成 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 时，则此林的整体标志为$x_1x_2\cdots x_r$，见图 4-8。显然，任一林的整体标志得出一个 $2n$ 个括号组成的好括号列，反之，若任给一个由 $2n$ 个括号组成的好括号列，则可由上述标志的逆向过程画出一个林，所以 n 顶有序林的个数是

$$C(n)=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$$

【例 2】 $2n$ 个点均匀分布在一个圆圈上，用 n 条不相交的弦把它们连接成 n 对儿，求这种匹配的个数。

例如图 4-9 下方写出了其相应的好括号列。一般地，把 $2n$ 个点按顺时针顺序抄成一个横行，仅当两点是一条弦的端点，把它们用括号括起来，于是每种配对儿产生一个好括号列，反之，任给一个好括号列，可以画出一个配对儿方式，可见所求匹配的个数是$\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$。

【例 3】 有 $2n$ 个人在售票处排队买票，门票 5 元一张，恰有 n 个人每人有 5 元一张的人民币，另 n 个人每人只有 10 元一张的人民币，问什么情形才能使售票员(他开始时手中没有钱)可以对每个需要“找零”者找给他 5 元钱？这种情形的队列共几种？

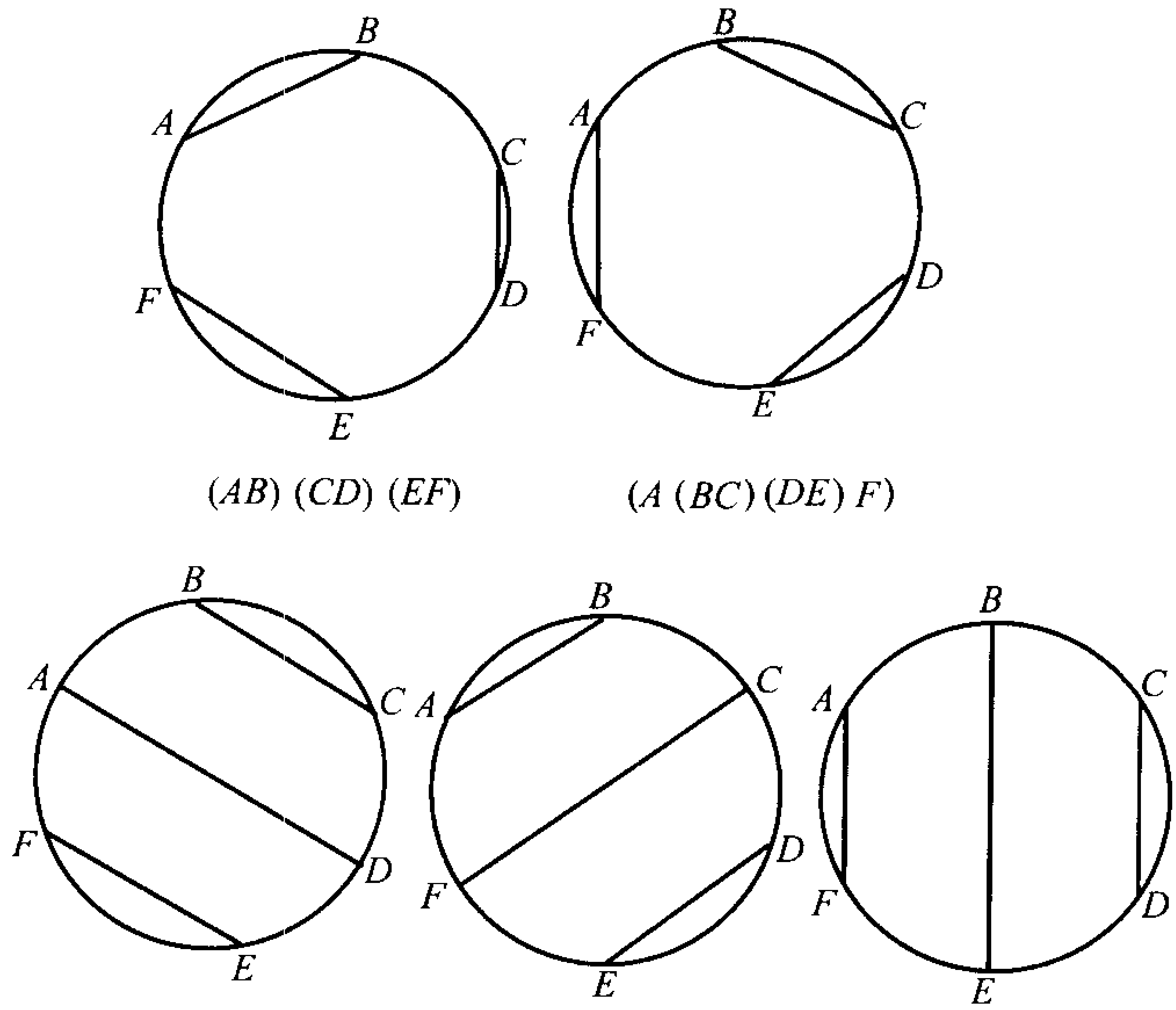


图 4-9

我们从排头起，依次对持五元币者记一个“(”，对持十元币者记一个“)”，如果写出的“(”总不比“)”少，则仅这种排列售票员才总有钱找零，而这种情形等价于形成一个好括号列，可见不会发生售票员无钱找零的队列共$\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$种。

【例 4】 不同高度的 20 人，左低右高排二路横队，每队 10 人，前排的人都比他后面站的人矮，问这种排法有多少种？

我们把第一排的每个人记成一个“(”号，第二排的每人记成一个“)”，再把这 20 个人依大小个儿为序小个在左排成一路横队，则相应的括号列中有一半是左括“(”，而且读这个括号列时，读出的左括不会比右括少，所以是个好括号列，反之每个好括号列对应一个题中所述的前低后高的二横队排列，可见此题答案为

$$\frac{1}{11}C_{20}^{10}=16796$$

数学上把 $C(n)=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ 称为卡塔兰(E. C. Catalan, 1814~1894)数。最早研究卡塔兰数的是欧拉,欧拉利用卡塔兰数算出凸多边形三角割分不同方式之数目的第一人;后来卡塔兰用括号列技术把$C(n)$这个数应用到形形色色的许多实际问题中去了。

4.4 兔子不是濒危物种

兔子善良温顺,以青草为食,从不加害于人和任何动物。在弱肉强食的动物世界里,兔子似为弱者,虎狼以它为食,猎人以它为目的;兔肉可烹为美食,皮毛可制成裘衣,是人类消费最多的动物之一,但至今没有任何国家把兔子列为濒危物种。究其原因,一是它对食物等的生态环境要求很低,一是它们的繁殖能力极强。

欧洲黑暗时代之后第一位有影响的数学家是斐波那契(Fibonacci, 1170~1250),他早年随父在北非师从阿拉伯人学习数学,后游历地中海沿岸诸国,1202 年回到意大利故乡比萨,用拉丁文编译了其代表作《算经》。《算经》系统地介绍印度记数法和阿拉伯与希腊的数学成就,影响并改变了当时欧洲的数学面貌,书中引进了著名的"斐波那契数列"

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,\cdots$$

斐波那契数列的通项公式及其一系列珍宝般数学现象是后人花了几个世纪的心血得到的,但是所有那些成果都起源于下面的"兔子问题":

某人买一对兔子,养殖在完全封闭的围墙内,我们希望知道一年内能繁衍到多少对?如果事情是这样的:每对兔子每月生一对小兔子,小兔子出生后,第二个月就能生育。

设第 n 个月有 $f(n)$ 对兔子,则 $f(0)=1, f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$,一般地,第 n 个月兔子的对(儿)数是第 $n-1$ 个月的对数加上第 $n-2$ 个月的对数,即

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2), & n = 2,3,\cdots \\ f(0) = f(1) = 1 \end{cases}$$

因为 $f(0)=1$,根据上述递推公式,得知第 0 月与第 1 月对数之和为第 2 月的对数,第 1 月与第 2 月对数之和为第 3 月的对数,等等,于是有下表:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
兔子对数	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

即到一周年时有 377 对兔子。

如果欲求两年后、三年后、四年后等时间的兔子对数,这么一次次加下去也未免有点太笨了,既然兔子对数这个变量有如此之好的规律性,是否存在 $f(n)$ 的用 n 来表达的公式呢?

把兔对满足的递推关系改写成

$$f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0, n = 2,3,\cdots \tag{4.1}$$

对于这种每一项都是 f 的一次方又没有常数项的一次递推方程,设 $f(n)=\lambda^n$,则 $f(n-1)=\lambda^{n-1}, f(n-2)=\lambda^{n-2}$,代入递推方程(4.1)之后得

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

用 λ^{n-2} 去除各项得 λ 满足的一元二次方程

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \tag{4.2}$$

求得 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$,即 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 与 $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 都是(4.1)的解,又(4.1)的解的和仍是(4.1)的解,(4.1)的解乘以任意常数仍是(4.1)的解,于是

$$f(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{4.3}$$

也是(4.1)的解，其中 c_1, c_2 是待定常数，由于 $f(0)=f(1)=1$，代入(4.3)得

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2 \\ 1=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \tag{4.4}$$

(4.4)是以 c_1, c_2 为未知数的二元一次方程组，解得

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

所以

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \tag{4.5}$$

(4.5)就是斐波那契数列的通项公式。

有一个与兔子繁衍风马牛不相及的问题如下：

某人去登泰山，此人一步可登一个台阶也可以登两个台阶。问他登上 n 个台阶的方式有几种?

设登上 n 阶台阶的攀登方式有 a_n 种。

考虑此人第一步，若他第一步登了一阶，则登上 n 阶台阶的方式有 a_{n-1}种；若他第一步登了两阶，则登上 n 阶的方式有 a_{n-2}种，于是

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, \qquad n\geqslant 2(a_0=1) \\ a_1=1,\ a_2=2。 \end{cases}$$

可见登山方式数 a_n 组成的数列正是兔子序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n\cdots=1,2,3,5,8,13,\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

这里出现了一个很妙的命题

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} n=0,1,2,\cdots$$

是自然数。

如果知道 a_n 是兔子序列的通项，则此命题是无需去证的事；不然，它的证明将会十分麻烦，不信你试试看。

把递推方程(4.1)的求解化成代数方程(4.2)的求解方式不是一次性的，它带有普遍性，适合于任何一次的无常数项递推方程。兹举例为证。

平面上 n 条直线，每两条直线皆相交，任三条直线不共点，求总交点数 $h(n)$。

由于第 n 条直线与前 $n-1$ 条直线的交点数为 $n-1$，所以

$$h(n)=h(n-1)+n-1 \tag{4.6}$$

同理

$$h(n-1)=h(n-2)+n-2 \tag{4.7}$$

(4.6) − (4.7)得

$$h(n)-2h(n-1)+h(n-2)=1 \tag{4.8}$$

$$h(n-1)-2h(n-2)+h(n-3)=1 \tag{4.9}$$

(4.8) − (4.9)得

$$h(n)-3h(n-1)+3h(n-2)-h(n-3)=0 \tag{4.10}$$

与(4.10)对应的 λ 满足的方程为

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0,(\lambda-1)^3=0 \tag{4.11}$$

解得 $\lambda=1$，是 3 重根。于是 $h(n)=c_1$ 是(4.10)的解，c_1 是任意常数，由于 $h(1)=0$，所以 $c_1=0$，可见我们还要寻求(4.10)的其他解。设它的解形如 $n\lambda^n$ 或 $n^2\lambda^n$，代入(4.10)得

$$n\lambda^n-3(n-1)\lambda^{n-1}+3(n-2)\lambda^{n-2}-(n-3)\lambda^{n-3}=0 \tag{4.12}$$

$$n(\lambda^n-3\lambda^{n-1}+3\lambda^{n-2}-\lambda^{n-3})$$

$$+3(\lambda^{n-1}-2\lambda^{n-2}+\lambda^{n-3})=0$$

$$n\lambda^{n-3}(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1)+3\lambda^{n-3}(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

由于 $\lambda=1$,故(4.12)式成立。即 $n\lambda^n$ 确为(4.10)的解。同理可以验证 $n^2\lambda^n$ 也是(4.10)的解,但 $n^3\lambda^n$ 就不再是(4.10)的解了。事实上,若 $n^3\lambda^n=n^3$ 是(4.10)的解,则应

$$n^3-3(n-1)^3+3(n-2)^3-(n-3)^3=0 \qquad (4.13)$$

$n=2$ 时,(4.13)式左端为 5,所以(4.11)不可能成立。

可以证明(4.13)的解形如

$$h(n)=(c_1+c_2n+c_3n^2)\lambda^n$$

令 $\lambda=1$, 又 $h(1)=0, h(2)=1, h(3)=3$, 则

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+2c_2+4c_3=1 \\ c_1+3c_2+9c_3=3 \end{cases}$$

解得 $c_1=0, c_2=-\frac{1}{2}, c_3=\frac{1}{2}$,最后得交点总数为

$$h(n)=-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$$

下面从数学上总结一下:我们这里涉及的(4.1)与(4.10)称为线性齐次递归方程,(4.2)与(4.10)分别是它们的特征方程,λ 称为特征根。一般而言

$$H_n+a_1H_{n-1}+\cdots+a_rH_{n-r}=0 \quad (n>r) \qquad (4.14)$$

称为 r 阶递归方程

$$\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r=0 \qquad (4.15)$$

称为(4.14)的特征方程。若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 分别是重数为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 的特征根,$n_1+n_2+\cdots+n_s=r$,则(4.14)的解的一般形状为

$$c_1^{(1)}\lambda_1^n+c_2^{(1)}n\lambda_1^n+\cdots+c_{n_1}^{(1)}n^{n_1-1}\lambda_1^n+$$

$$c_1^{(2)}\lambda_2^n+c_2^{(2)}n\lambda_2^n+\cdots+c_{n_2}^{(2)}n^{n_2-1}\lambda_2^n+$$

……

$$+ c_1^{(s)}\lambda_s^n + c_2^{(s)}n\lambda_s^n + \cdots + c_{n_s}^{(s)}n^{n_s-1}\lambda_s^n \tag{4.16}$$

其中的常数 $c_j^{(i)}$ 由初值来确定。

再看一个有趣的例子

n 条封闭曲线在平面上两两相交，每对曲线恰两个交点，但任三条曲线不交于同一点(图 4-10)，问这些闭曲线把平面分割成几个区域?

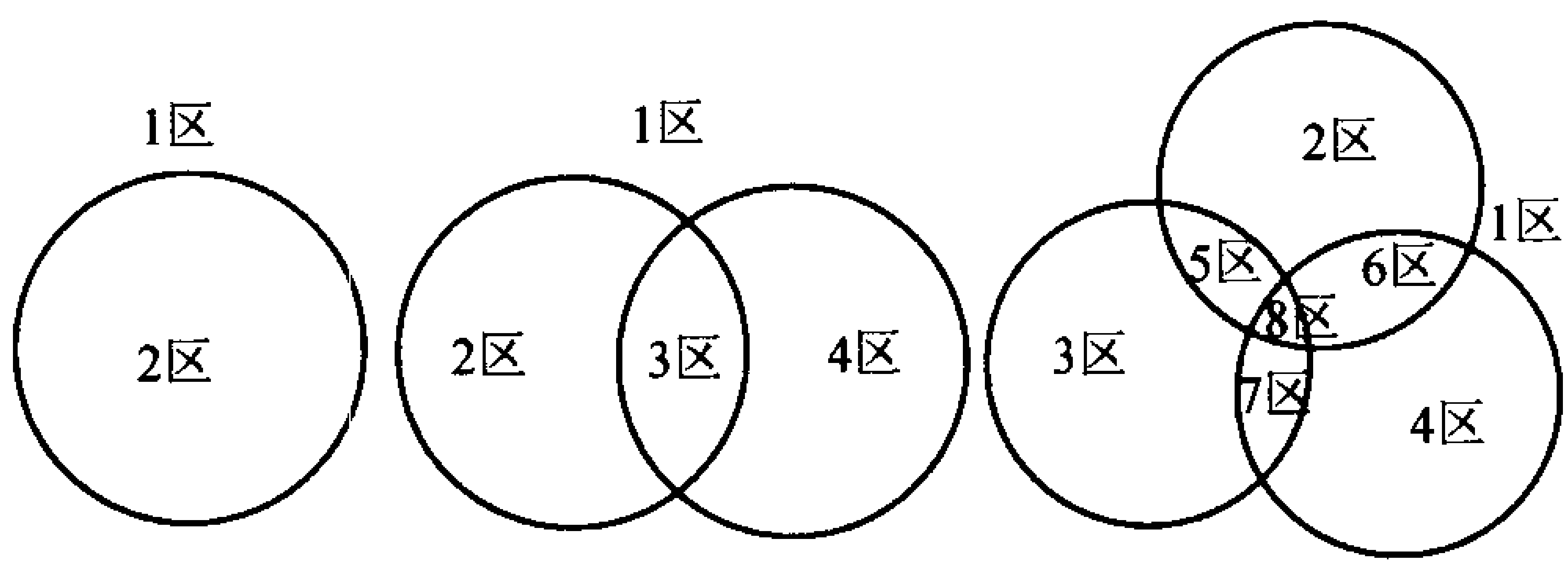


图 4-10

记$n-1$ 条闭曲线分割平面成 a_{n-1}个区域，则第n条闭曲线与这$n-1$ 条闭曲线的交点共计 $2(n-1)$个，它们把第n条闭曲线分成 $2(n-1)$段弧，每段弧把由前$n-1$ 条闭曲线分割成的某一区域划分成两个区域，所以 n 条闭曲线分割成的区域数为

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \tag{4.17}$$

(4.17)与(4.6)何其相似，解法也雷同。我们看到实际过程不同的问题却有着相同的数学模型，宇宙间一些状似相异的运动变化过程或结构关系实有统一性，统一在数学模型的旗帜下。

由(4.17)得

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-2) \tag{4.18}$$

(4.17) - (4.18) 得

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2 \tag{4.19}$$

$$a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} = 2 \tag{4.20}$$

(4.19) - (4.20) 得

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0 \tag{4.21}$$

(4.21)的特征方程为

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

特征根 $\lambda=1$ 是三重根，由(4.16)知(4.17)的解形如

$$\begin{aligned} a_n &= c_1^{(1)}\lambda_1^n + c_2^{(1)}n\lambda_1^n + c_3^{(1)}n^2\lambda_1^n \\ &= c_1^{(1)} + c_2^{(1)}n + c_3^{(1)}n^2 \end{aligned}$$

由于 $a_1=2, a_2=4, a_3=8$，见图 4-10，得

$$\begin{cases} c_1^{(1)} + c_2^{(1)} + c_3^{(1)} = 2 \\ c_1^{(1)} + 2c_2^{(1)} + 4c_3^{(1)} = 4 \\ c_1^{(1)} + 3c_2^{(1)} + 9c_3^{(1)} = 8 \end{cases}$$

解得 $c_1^{(1)}=2, c_2^{(1)}=-1, c_3^{(1)}=1$，于是 n 个此种闭曲线把平面分割成 $2-n+n^2$ 个区域。

4.5 兔儿兔孙与优选法

蒸馒头要放碱，放得太少，蒸出的馒头酸，放得太多，蒸出的馒头黄，而且对胃有害；加多少碱有一个最佳量，从少到多，开始时，碱越多馒头越好吃，到了最佳之后，碱越多馒头越不好吃，形成了碱量与好吃程度的一种单峰关系。如果用实验的办法确定碱量，自然希望实验次数要少。这里的单峰关系事先只知其存在，并不知其定量关系，所以不能用求函数最大值的办法来解决。

设 $F(x)$是未知的，只知它是单峰的函数，今欲求 $F(x)$的最大值点 x^* 的近似值。设试验范围是 $x\in[0,1]$，先把$[0,1]$等分成$f(n)$等分，$f(n)$是斐波那契数列第 n 项，在 $f(n)-1$ 个$[0,1]$内的等分点上安排试验，从中比较选优。例如 $n=13$，$f(13)=377$，即一对兔子一周年内繁衍出的兔子家庭的成员的对儿数，如果做 376 次试验

来选优，那就太劳民伤财了。实际上只需做 12 个试验即可与做 376 次试验有一样的效果，精度都是$\frac{1}{377}$，即选得的近似值与最佳值 x^* 相距不超过$\frac{1}{377}$。

事实上，由于 $F(x)$的单峰性，以及 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$，知第 $f(n-1)$个分点与第 $f(n-2)$个分点关于区间中点对称，在这两个分点处各试验一次，把长为 1 的纸条从 F 值小的分点上剪开，留下含 F 值大的分点的那一段，把剩下的纸条对折，即从其中点折叠，与保留的试验点重合的那个点上再做一次试验，与上一轮留下的点上的 F 值比较，从 F 小的点剪开，还是“留大弃小”，如此反复试 $n-1$ 次，就求得了一个 x^* 的近似值。

例如，卡那霉素发酵液培养温度最佳值的确定，原来国内外采用 37℃ ±1 ℃，培养时间为 16 小时，某药厂欲缩短其培养时间，对培养温度进行了优选，试验范围为 29～50℃，每隔 1℃ 做一次试验，共需 20 次试验，后采用优选法，把试验区间定为[0, 21]，0 对应于 29℃，1 对应于 30℃，等等，试验实施过程如图 4-11 所示。

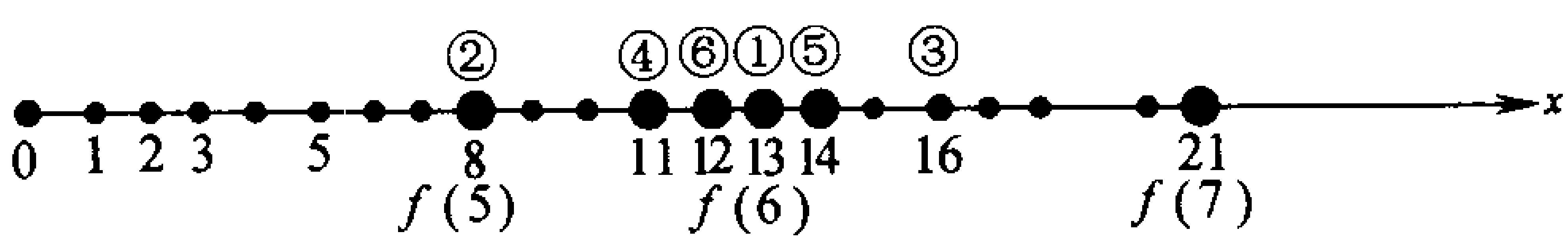


图 4-11

图 4-11 中①②③④⑤⑥表示六次试验，试验中依次保留的试验点为 $x=$①，①，①，①，①，最后留下的区间是(12, 14)，即最佳温度近似值为 $x=13$，即 42℃，误差 1℃。共进行了 6 次试验，节省了 14 次试验，与 20 次均匀试验相比，效果不减。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n-1)}{f(n)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，所以在[0, 1]区间（试验范围）的 0.618 处做第一次试验，在其关于中点 $x=\frac{1}{2}$的对称点 0.382 处做第二次试验，用弃小留大的对折剪纸法，相似地可以得到最佳值

x^*的近似值，最后剩下的纸条长度给出了误差上界。这种优选称为0.618法或黄金分割法。

优选法是美国数学家基弗(Kiefer)1953年发明的，他首创了斐波那契法和黄金分割法(0.618法)，1970年，在华罗庚教授倡导与带领之下，我国许多数学家深入工厂农村，做了大量的优选法普及与应用的工作，在数理方面和经济效益方面取得了双丰收。

4.6 36军官问题与拉丁方正交试验

1782年，欧拉提出著名的36军官问题：

有1，2，3，4，5，6六个兵团，从每个兵团选出A, B, C, D, E, F六种军衔的军官各一名，把这36位军官列成方阵，使得每行每列的六位军官均来自不同的兵团且有不同的军衔。

欧拉潜心研究多时不得其解，他猜想36军官问题无解；欧拉猜对了。1900年法国数学家塔瑞(Tarry)严格证明了36军官问题无解。

事实上，若36军官问题有解，则方阵中的36位军官若都亮出他们所在兵团的号码，则每一行每一列皆1，2，3，4，5，6的全排列，若亮出他们的军衔，则每行每列皆A, B, C, D, E, F的全排列。

把由n个两两相异的拉丁字母排成的方阵称为n阶拉丁方，如果其每行每列皆这些字母的全排列。

把拉丁字母换成别的什么东西也可以，例如每行每列是$1, 2, \cdots, n$的全排列的数字方阵也叫做n阶拉丁方。

36军官问题的方阵可以分成两个拉丁方，一个由六种军衔构成，一个由六个兵团号码构成，如果36军官问题有解，由于每两个位置上是相异的两个人，如果先写兵团号码再写军衔，则36个位置上写出的内容两两相异。

把两个同阶拉丁方重叠，先写上层的元素再写下层的元素，如果

抄出的 n^2 个符号两两相异，则称这两个 n 阶拉丁方正交。

36 军官问题即问相应的“军衔拉丁方”与“兵团号码拉丁方”是否正交。

2 阶拉丁方仅有两个

$$A_2^{(1)}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad A_2^{(2)}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

它们不会正交；除了两阶与 6 阶拉丁方出现不正交的现象，其他阶数的拉丁方都有正交者，例如

$$A_3^{(1)}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix},\quad A_3^{(2)}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$$

是正交的 3 阶拉丁方。

$$A_4^{(1)}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\3&4&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix},\quad A_4^{(2)}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&2&1\\2&1&4&3\end{pmatrix},$$

$$A_4^{(3)}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\2&1&4&3\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

是两两正交的 4 阶拉丁方。

正交拉丁方可以巧妙安排试验，使试验结果满意，且试验次数尽可能少。

例如试制一种新药，需要进行试验，以确定各种成分的最优剂量。设有 A,B,C,D 四种成分，每种成分取三种剂量来试验，欲得到一种满意的配方，如果所有的配方组合都进行试验，则试验次数为 $3^4=81$，今设计仅做九次试验，具体操作如下：

A_1, A_2, A_3 代表 A 的三种剂量，B_1, B_2, B_3 代表 B 的三种剂量，先考虑 A 与 B 的各种剂量搭配，共有以下九种

$$A * B = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{bmatrix}$$

再考虑 C 的三种剂量如何与 A, B 搭配，我们取 C 的三个剂量序号 1,2,3 构成三阶拉丁方

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

把 C 的每一列写在 $A * B$ 每列的右侧得

$$(A * B, C) = \begin{bmatrix} A_1B_1C_1 & A_1B_2C_2 & A_1B_3C_3 \\ A_2B_1C_2 & A_2B_2C_3 & A_2B_3C_1 \\ A_3B_1C_3 & A_3B_2C_1 & A_3B_3C_2 \end{bmatrix}$$

由于 C 是 3 阶拉丁方，所以造成 A 的每个剂量与 C 的每个剂量各相配一次，B 的每个剂量与 C 的每个剂量各相配一次；这样，A, B, C 的剂量搭配就比较全面，而且仅仅有九次搭配。

最后再加入 D 的三个剂量来试验，为此构作 D 的三个剂量号码的三阶拉丁方 D，且要求 D 与拉丁方 C 正交，于是取

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

把 D 的每一列抄在$(A * B, C)$相应列的右侧，得试验方案

$$(A * B, C, D) = \begin{bmatrix} A_1B_1C_1D_1 & A_1B_2C_2D_2 & A_1B_3C_3D_3 \\ A_2B_1C_2D_3 & A_2B_2C_3D_1 & A_2B_3C_1D_2 \\ A_3B_1C_3D_2 & A_3B_2C_1D_3 & A_3B_3C_2D_1 \end{bmatrix},$$

$(A*B, C, D)$中各项 $A_iB_jC_kD_l$ 表示做一次试验时，用 A 的第 i 剂量，B 的第 j 剂量，C 的第 k 剂量，D 的第 l 剂量搭配来进行，$(A*B, C, D)$的九个试验中效果最佳的那种处方即为所求的最佳处方的近似配方。

上述这种运用正交拉丁方搭配进行试验的试验设计，分布均匀，试验次数少，程序也颇为规则有序，对于 $n+1$ 个因子，每个因子分 n 个水平的情形，用正交拉丁方安排试验，仅做 n^2 个试验即可，是一种有效算法型的试验，若全面试验，即所有可能的水平搭配都进行试验，则需 n^{n+1}个试验，当 n 较大时，则成了天文数字，例如 8 个因子，每因子分成 7 个水平，全面试验则需 $7^8=5764801$ 次试验，这 500 多万次试验是人力物力和时间所不允许的，而用正交拉丁方安排试验仅需 $7^2=49$ 次试验即可，由于正交拉丁方各种情形搭配均匀，试验结果仍然是可以满意的。

4.7 这些钱怎么花

父子上街，拿了九张人民币，其中 1 元三张，2 元两张，5 元一张，10 元一张，50 元一张，100 元一张，父问子曰："如果售货员无钱找零，我们能买多少钱一份的商品，付款有几种方式？例如，我们可以买 7 元一份的商品，付款方式有付三张 1 元的，两张 2 元的；也可以付一张 5 元的，一张 2 元的；还可以付一张 5 元的，两张 1 元的；共三种付款方式；你能把一切可能的购物付款方式列出一个清单吗？"

儿子惑然，父提示说："你们数学老师不是正在给你们讲授同底幂的乘法吗？"

儿子当然聪明，一点就透，他考虑片刻叫道："老爸，听我给您讲，我把可以花出的钱数作底数 $a(a>0)$的指数，例如百元钞一张可以花出的方案是 a^0+a^{100}，2 元钞两张，可以花出的方案是 a^0+a^2+

a^4，如果只花 2 元和 100 元的两种钞票，则

$$(a^0+a^2+a^4)(a^0+a^{100})$$
$$=a^0+a^2+a^4+a^{100}+a^{102}+a^{104}$$

即可以不花，对应上式 a^0 中的 0 指数，可以花出 2 元，4 元，100 元，102 元，104 元，花出的方式都是一种，见上式各项的系数。”

于是父子上街花钱方案的清单为

$$(a^0+a^1+a^2+a^3)(a^0+a^2+a^4)(a^0+a^5)(a^0+a^{10})(a^0+a^{50})(a^0+a^{100})$$
$$=a^0+a^1+2a^2+2a^3+2a^4+3a^5+2a^6+3a^7+2a^8+2a^9+3a^{10}+2a^{11}+3a^{12}+2a^{13}+2a^{14}+3a^{15}+2a^{16}+3a^{17}+2a^{18}+2a^{19}+2a^{20}+a^{21}+a^{22}+a^{50}+a^{51}+2a^{52}+2a^{53}+2a^{54}+3a^{55}+2a^{56}+3a^{57}+2a^{58}+2a^{59}+3a^{60}+2a^{61}+3a^{62}+2a^{63}+2a^{64}+3a^{65}+2a^{66}+3a^{67}+2a^{68}+2a^{69}+2a^{70}+a^{71}+a^{72}+a^{100}+a^{101}+2a^{102}+2a^{103}+2a^{104}+3a^{105}+2a^{106}+3a^{107}+2a^{108}+2a^{109}+3a^{110}+2a^{111}+3a^{112}+2a^{113}+2a^{114}+3a^{115}+2a^{116}+3a^{117}+2a^{118}+2a^{119}+2a^{120}+a^{121}+a^{122}+a^{150}+a^{151}+2a^{152}+2a^{153}+2a^{154}+3a^{155}+2a^{156}+3a^{157}+2a^{158}+2a^{159}+3a^{160}+2a^{161}+3a^{162}+2a^{163}+2a^{164}+3a^{165}+2a^{166}+3a^{167}+2a^{168}+2a^{169}+2a^{170}+a^{171}+a^{172}$$

例如 $3a^{157}$，即可以拿出 157 元去花，有三种拿钱方式：100 元 + 50 元 + 5 元 + 2 元，100 元 + 50 元 + 5 元 + 1 元 + 1 元，100 元 + 50 元 + 2 元 + 2 元 + 1 元 + 1 元 + 1 元。

用这种技巧还可解决其他实际问题。

①今有红球两个，黄球两个，白球三个，同色球无区别；从中拿出四个球来，有几种取法？

用 r 代表红球，y 代表黄球，w 代表白球，则模仿上面花钱技巧得

$$(r^0+r^1+r^2)(y^0+y^1+y^2)(w^0+w^1+w^2+w^3)$$
$$=r^0+r^1+r^2+y+ry+r^2y+y^2+ry^2+\underline{r^2y^2}+w+rw+r^2w+ yw+ryw+\underline{r^2yw}+y^2w+\underline{ry^2w}+r^2y^2w+w^2+rw^2+\underline{r^2w^2}+ yw^2+\underline{ryw^2}+r^2yw^2+\underline{y^2w^2}+ry^2w^2+r^2y^2w^2+w^3+\underline{rw^3}+ r^2w^3+\underline{yw^3}+ryw^3+r^2yw^3+y^2w^3+ry^2w^3+r^2y^2w^3$$

拿出四球的项是：r^2y^2, r^2yw, ry^2w, r^2w^2, ryw^2, y^2w^2, rw^3, yw^3，指数是该色球取出的个数，例如 r^2y^2 是取两个红球，两个黄球；共有八种取法。

②邮局有 1 角，2 角，5 角，8 角，1 元的邮票，张数不限（可以不停地印制），可以贴出多少种不同的邮资？每种邮资有几种贴法？

考虑下面积的展开式

$$(a^0+a^1+a^2+a^3+\cdots)(a^0+a^2+a^4+a^6+\cdots)$$
$$(a^0+a^5+a^{10}+a^{15}+\cdots)(a^0+a^8+a^{16}+a^{24}+\cdots)$$
$$(a^0+a^{10}+a^{20}+a^{30}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{1}{1-a^5}\cdot\frac{1}{1-a^8}\cdot\frac{1}{1-a^{10}}$$
$$=\frac{1}{(1-a)(1-a^2)(1-a^5)(1-a^8)(1-a^{10})}$$

在 1 被多项式 $(1-a)(1-a^2)(1-a^5)(1-a^8)(1-a^{10})$ 除的商（按升幂排）中，某项 ka^m 表示可贴出邮资 m 角，贴的方式有 k 种。

③用 1 克，2 克，3 克，4 克，5 克，6 克，7 克，8 克，9 克，10 克的 10 只砝码可称出多少种质量？各有几种可能的加砝码的方案？

$$(a^0+a^1)(a^0+a^2)(a^0+a^3)(a^0+a^4)(a^0+a^5)$$
$$(a^0+a^6)(a^0+a^7)(a^0+a^8)(a^0+a^9)(a^0+a^{10})$$

的展开式中的项 ka^m 指出可以称出 m 克的物质，其砝码的使用有 k 种方案。

上面我们讨论的是用已知的一些自然数组合成更大的自然数的

各种可能的方案。这个问题的逆问题是所谓整数的“拆分”，例如 5 的拆分有以下七种方案：

$$5, 4+1, 3+2, 1+2+2, 1+1+3, 1+1+1+2,\\ 1+1+1+1+1$$

例如

$$\begin{aligned}&(a^0+a^1+a^2+a^3+\cdots)(a^0+a^3+a^6+a^9+\cdots)\\&(a^0+a^5+a^{10}+\cdots)\\&\quad=1\div(1-a)(1-a^3)(1-a^5)\\&\quad=a^0+a^1+a^2+2a^3+2a^4+3a^5+3a^6+4a^7\\&\qquad+5a^8+\cdots\end{aligned}$$

其中例如 $5a^8$ 表示把 8 拆分成若干奇数部分，且每个奇数不超过 5 的方案有五种：

$$1+1+1+1+1+1+1+1,\ 1+1+1+5,\\ 1+1+1+1+1+3,\ 1+1+3+3,\ 3+5$$

其他拆分仿此进行。

4.8 劝君多画示意图

有些计数问题，如果画个示意图，往往帮助我们确定计算的步骤，直观准确地求得所求数值。极而言之，凡数学问题，大都应设法设计一个示意图，尤其是抽象的本来没有几何直观的问题，更需要示意图的启发。其中集合示意是常用的方法之一。请欣赏以下实例。

①一个特务班 12 名战士中，有 6 名搞侦察，7 名搞收发秘电，其中既搞侦察又搞收发的 4 人，问既不搞侦察也不搞收发的几人？

设搞侦察者组成集合 A，搞收发者组成集合 B，见示意图4-12，用 $\overline{A}$ 表示在A 集之外特务班的人组成的集合，用$|A|$表示 A 中的人数，则所求为

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=12-|A|-|B|+|A\cap B|$$
$$=12-6-7+4=3$$

即不搞收发也不搞侦察的有 3 人。

②30 个房间，有 15 个房间装有电视机，8 个房间装有空调器，6 个房间装有电话机，且其中有 3 个房间每种设备都有，问至少几个房间没有提供上述任何三种设备？

设 A_1, A_2, A_3 分别代表装有电视、空调和电话的房间组成的集合，则 $|A_1|=15$，$|A_2|=8$，$|A_3|=6$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$，见图 4-13。于是有

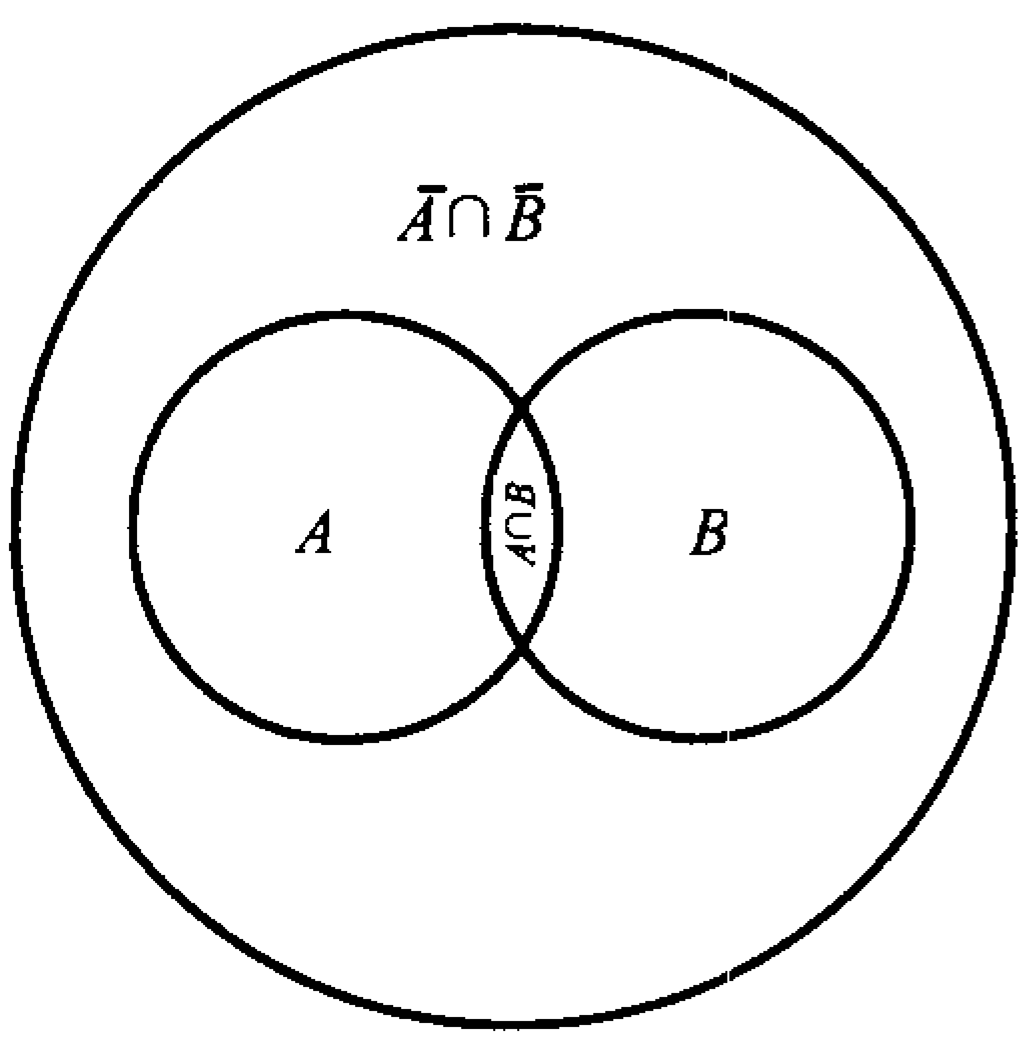


图 4-12

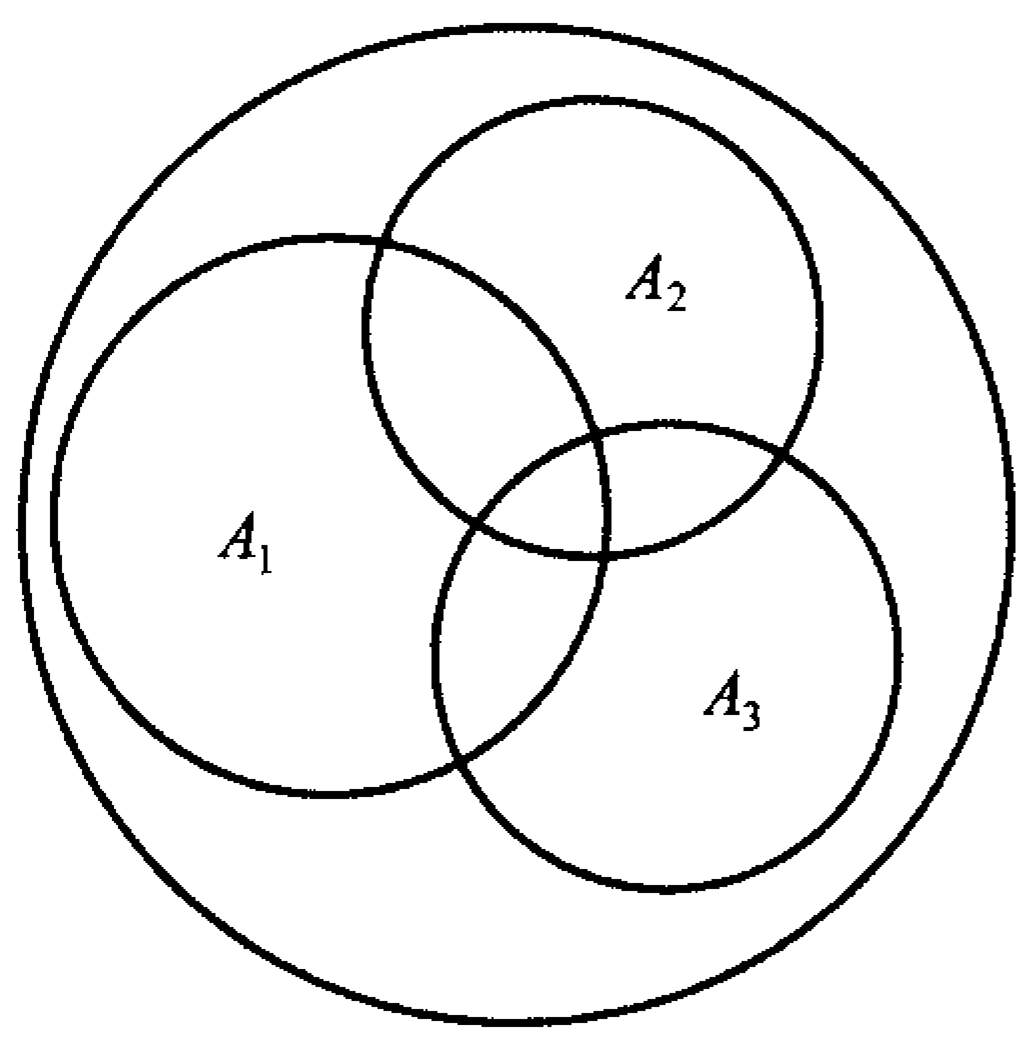


图 4-13

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|$$
$$-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$=15+8+6-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|$$

$-|A_2\cap A_3|+3$，又 $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ 不大于 $|A_1\cap A_2|$，$|A_1\cap A_3|$，$|A_2\cap A_3|$ 中的任一个，所以

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|\leqslant 15+8+6+3-3-3-3=23,$$

即不超过 23 个房间提供了上述某种设备，至少有 $30-23=7$ 间房子三种设备都没有。这里写的公式

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-$$
$$(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)+$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

称为容斥原理，看图4-13，欲求 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 中元素个数，认为是 $|A_1| + |A_2| + |A_3|$ 可能多了，减掉 $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$ 又可能减多了，再添上 $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ 就恰好修正成 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ 的准确值。

相似地，还有公式

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &+ |A_4| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| \\ &+ |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

对于更多的集合，依此类似地可写出容斥公式。

③求1～1000这些自然数当中3或4或5或7的倍数的个数。

设 A_1, A_2, A_3, A_4 是分别被3，4，5，7除尽的不超过1000的正整数组成的集合，则

$$|A_1| = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333,\ |A_2| = \left[\frac{1000}{4}\right] = 250$$

$$|A_3| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200,\ |A_4| = \left[\frac{1000}{7}\right] = 142$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{1000}{3 \times 4}\right] = 83,\ |A_1 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{3 \times 5}\right] = 66$$

$$|A_1 \cap A_4| = \left[\frac{1000}{3 \times 7}\right] = 47,\ |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{4 \times 5}\right] = 50$$

$$|A_2 \cap A_4| = \left[\frac{1000}{4 \times 7}\right] = 35,\ |A_3 \cap A_4| = \left[\frac{1000}{5 \times 7}\right] = 28$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{1000}{3 \times 4 \times 5}\right] = 16$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left[\frac{1000}{3 \times 4 \times 7}\right] = 11$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{1000}{3\times5\times7}\right] = 9$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{1000}{4\times5\times7}\right] = 7$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{1000}{3\times4\times5\times7}\right] = 2$$

其中$[x]$是 x 的整数部分，由容斥原理得

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 333 + 250 + 200 + 142 -$$

$$(83 + 66 + 47 + 50 + 35 + 28) + (16 + 11 + 9 + 7) - 2$$

$$= 925 - 309 + 43 - 2 = 657$$

即 1～1000 的自然数中为 3 或 4 或 5 或 7 的倍数者有 657 个数。

④赵钱孙李周武郑王八人排成一个横队，但孙李有怨，郑王有怨，有怨的二人不能相邻，问有多少种排法。

设 A_1, A_2 分别表示孙李相邻和郑王相邻的排列之集合，则可以认为孙李绑在一起好似一个人，郑王绑在一起好似一个人，于是

$$|A_1| = |A_2| = 7! \qquad |A_1 \cap A_2| = 6!$$

由容斥原理

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 7! \times 2 - 6!$$

孙与李不相邻同时郑王也不相邻的排列个数为(图 4-14)

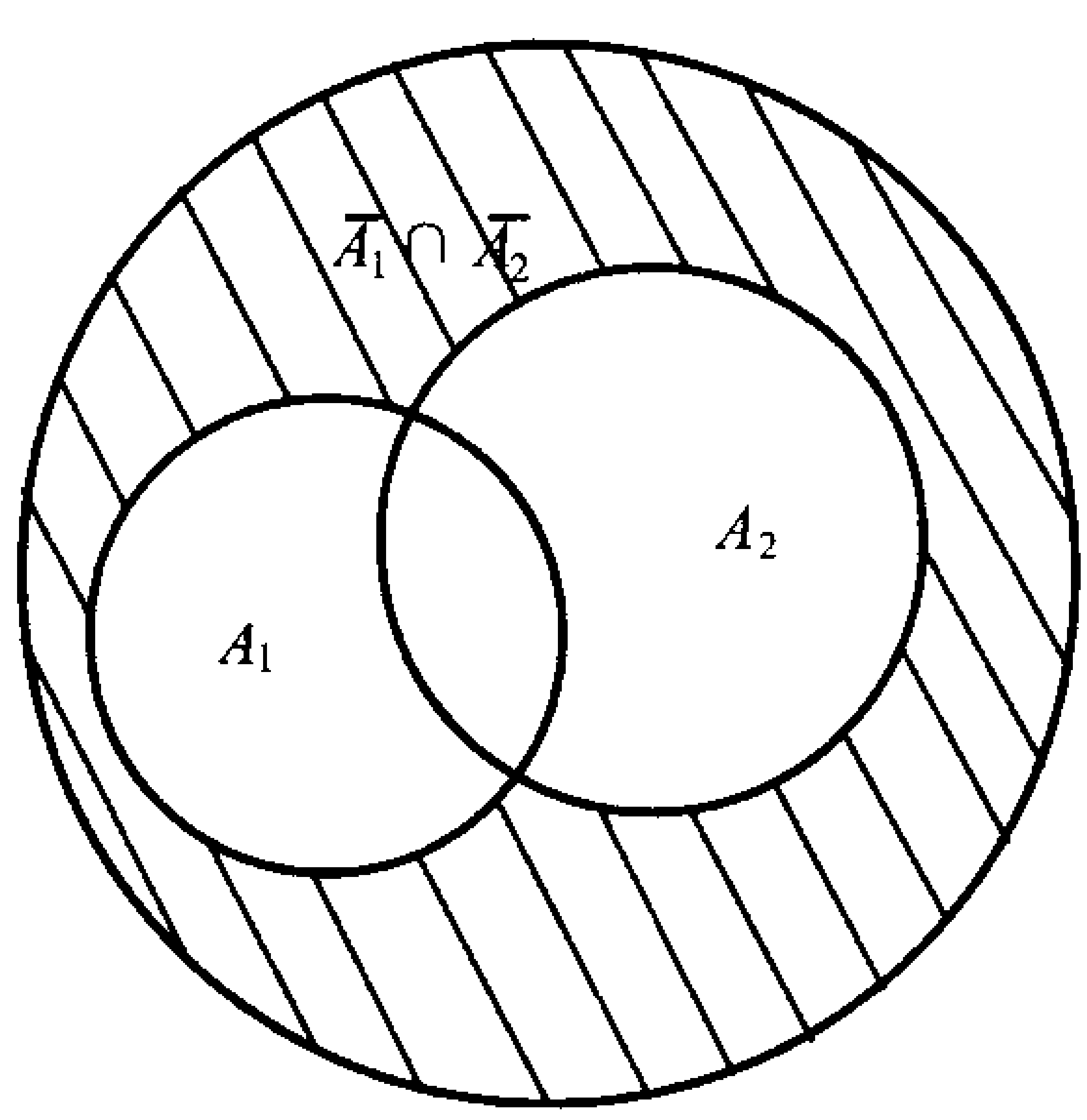


图 4-14

$$8! - (7! \times 2 - 6!)$$
$$= 40320 - 10080 + 6! = 30960$$

4.9 棋盘之旅

旅行者在图 4-15 所示的棋盘路网上从 O 点向 A 点走去，他只上行或右行，但最右不能走到对角线 OA 右侧，问该旅行者可选的路线有多少种?

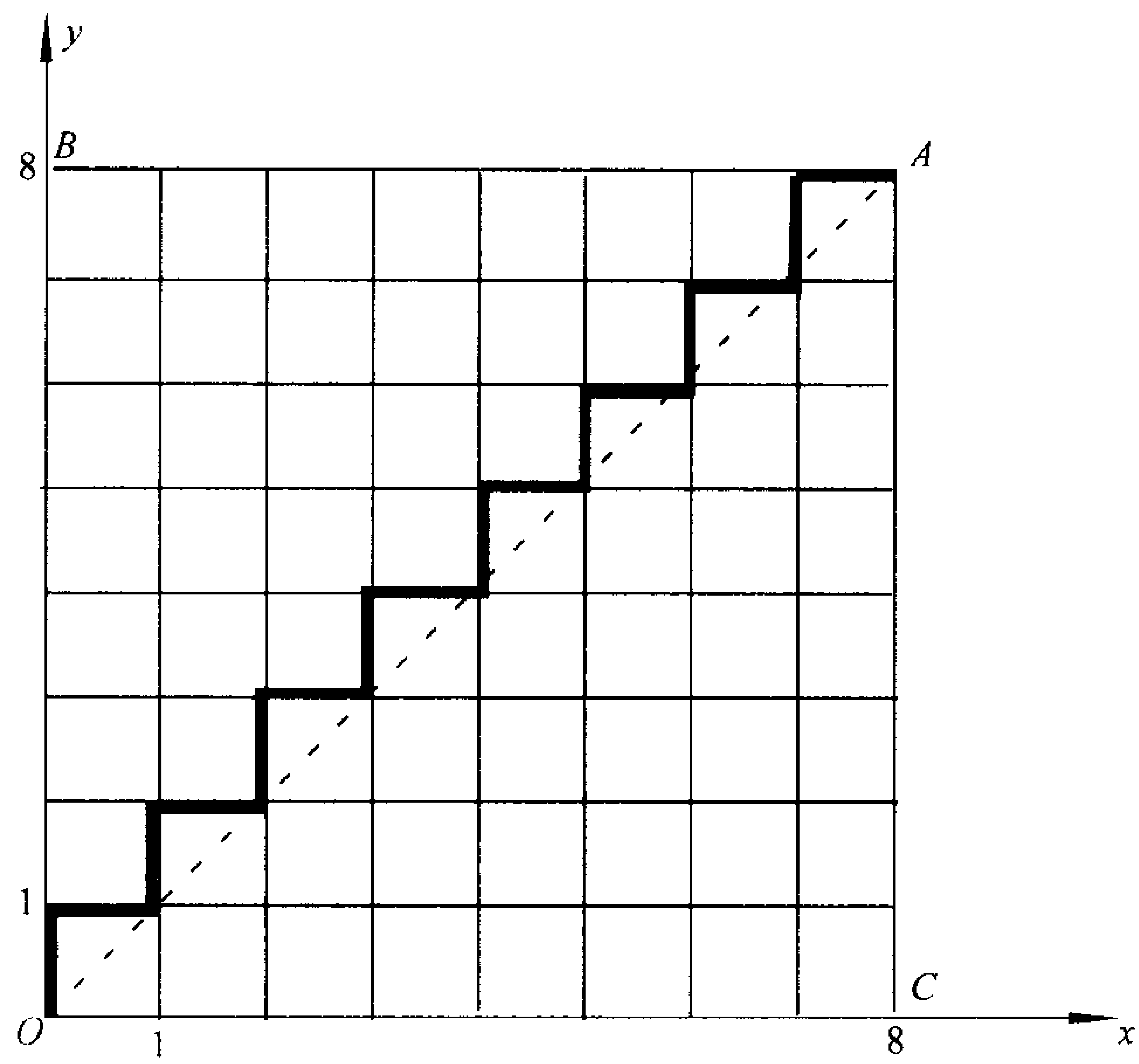


图 4-15

我们用画括号的办法记录旅行者的行迹，当他从一个街口上行时，画左括"(";当他从一个街口右行时，画右括")"。由于他不走到对角线 OA 右侧去，以 O 为原点，以水平方向为 x 轴，向上为 y 轴方向，每小格边长为 1，则该旅行者所到的每个街口之坐标都是纵坐

标不小于横坐标，从而到每个街口时，记录下来的括号列总是左括不少于右括，且到达 A 时，左括与右括各占一半，于是旅行者的每个行迹皆由一个好括号列所刻画，而且每个好括号列对应着一个行迹，所以他的可能的路线有 $\frac{1}{8+1}C_{16}^{8}=1430$ 条。

如果允许走到对角线右侧，他的路线可能是多少？

图 4-16 中每个拐角（街口）标出的数字是旅行者行至该街口可能的路线数目，行至 A 点可能有 12870 条路线可选，把图4-16以 O 为“顶”来看，图中数字恰为杨辉三角形，见图 4-17。

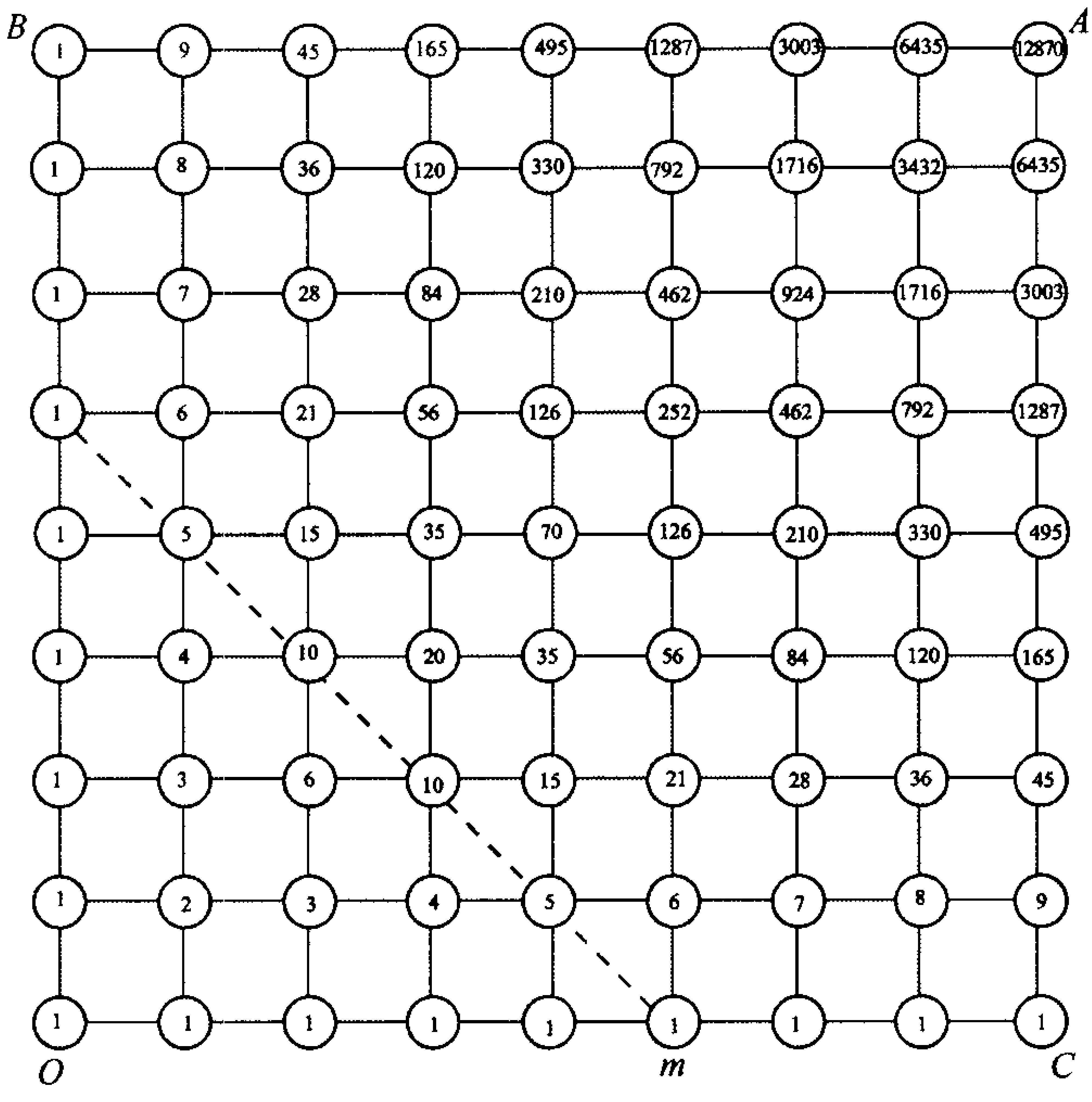


图 4-16

显然，只许上行与右行可以使行程最短，所以这 12000 多条路线的长度都是最短的，长皆为 16。

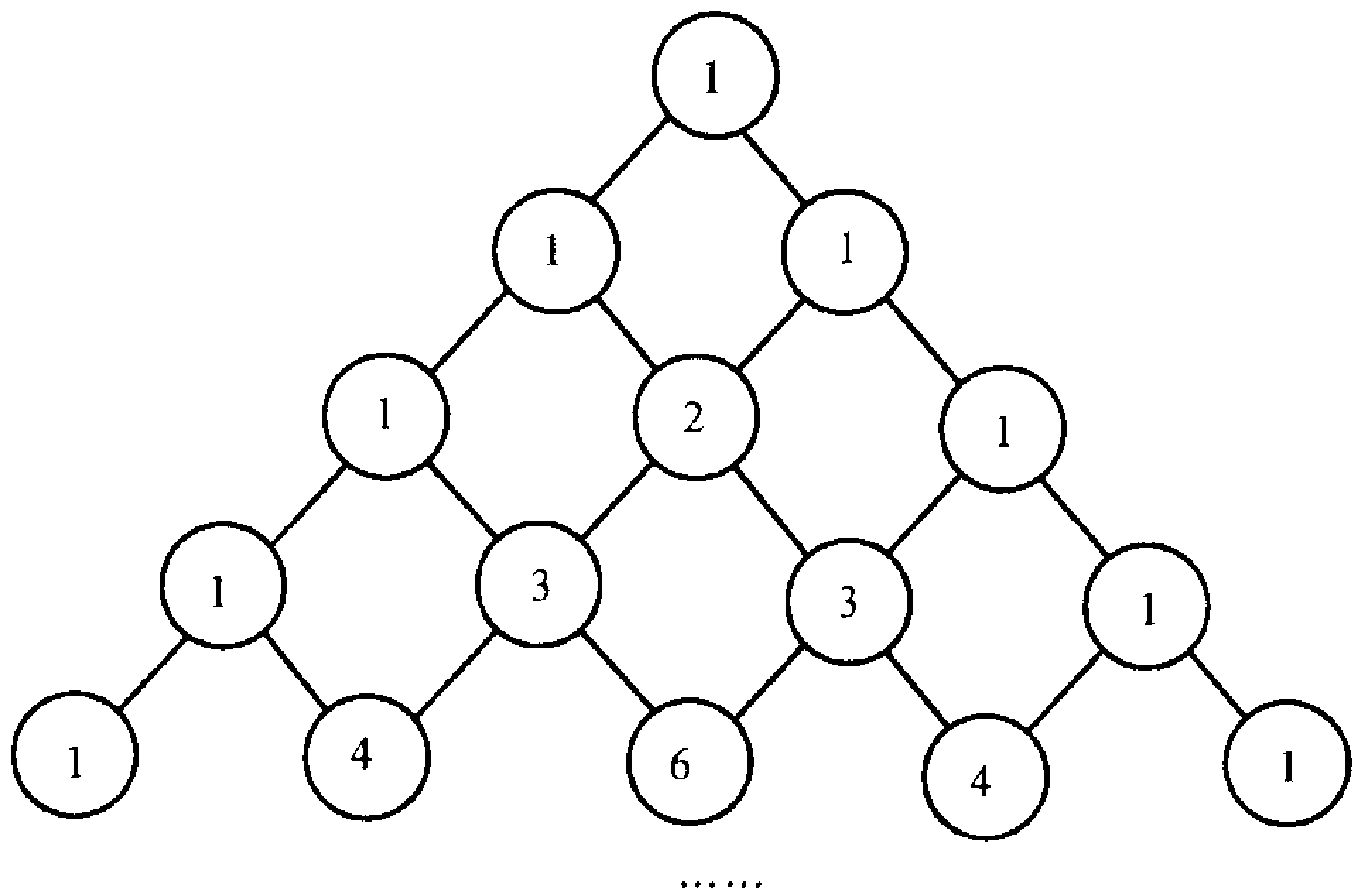


图 4-17

如果问旅行者有几种路线可选，使他由 O 点行至对角线 BC 上？

答曰：$2^8=256$，即有 256 种走法，可使其行至 BC 上。一般而言，当 $m\leqslant 8$ 时，有 2^m 个可能的路线使他行至 $x+y=m$ 这条直线上。

如果旅行者上行时每行到下一路口就休息一次，而右行可以一口气走任意多路口，问他从 O 点行至对角线 BC 上有多少种走法？这里的"走法"包括路线的选定以及休息的方式。

如果他行至 $x+y=m$ 的最后一次中途未休息的行走（$m\leqslant 8$）是上行，则他是在 $x+y=m-1$ 上最后一次休息的；设走至 $x+y=k$（$k\leqslant 8$）的方式数为 p_k，这时旅行者行至 $x+y=m$ 上的方式为 p_{m-1} 种。

如果他行至 $x+y=m$ 的最后一次中途未休息的行走是向右一直走到 $x+y=m$，这时，$p_m=p_1+p_2+\cdots+p_{m-1}+1$，事实上，他可以从 O 一次走到 $x+y=m$，也可以由 $x+y=1$，$x+y=2$，…，$x+y=m-1$ 一次走到 $x+y=m$。所以有

$$p_m = p_{m-1}+(p_1+p_2+\cdots+p_{m-1})+1 \tag{4.22}$$

$$p_{m-1} = p_{m-2} + (p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-2}) + 1 \tag{4.23}$$

$m>2$,(4.22)-(4.23)式得

$$p_m - p_{m-1} = p_{m-1} - p_{m-2} + p_{m-1}$$

$$p_m - 3p_{m-1} + p_{m-2} = 0 \tag{4.24}$$

特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$$

$$p_m = C_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^m + C_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

由于 $p_0=1, p_1=2$,得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

$$p_m = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2m+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2m+1}\right]$$

即 p_m 是兔子数列 $f(n)$的第 $2m+1$ 项,令 $m=8$,则所求的旅行方式有 $f(17)=2584$ 种。

真没想到,在棋盘上旅游的问题竟与好括号列、兔子序列、杨辉三角有血缘关系!

4.10 中国筹码游戏

赌博中用来统计输赢的小牌子叫做筹码,如果甲输给乙一次,则把乙的筹码中拿一只放在甲的筹码堆中去。

两人玩筹码游戏,开始时,把全体筹码任意分成若干堆,然后甲乙二人轮流取走一些筹码,但只能从一堆上拿,不能不拿,每次拿多

少不限,谁拿到最后一个筹码,谁是赢家。

例如有三堆筹码,个数记成$\{1,2,3\}$,即有一堆只一个筹码,有一堆两只筹码,第三堆三只筹码。甲先拿,出现下面六种情形之一

$$\{0,2,3\},\{1,1,3\},\{1,0,3\},\{1,2,2\},\{1,2,1\},\{1,2,0\} \quad (4.25)$$

乙接着拿,乙对(4.25)中的每种情形,都会使之变成$\{m,m\}$, $m\geqslant 1$。这时甲怎么办也得输了! 因为这时,若甲把$\{m,m\}$变成$\{m\}$,则乙最后拿走 m 而取胜;不然,甲把(m,m)变成(m,n), $n<m$,乙拿时把它变成$\{n,n\}$,直至变成$\{1,1\}$,这时轮到甲拿,变成$\{1\}$,乙拿走这最后一只筹码而获胜。反之,若是$\{m,n\}$的局面,轮到甲拿,则甲使之变成$\{n,n\}$, $(m>n)$,这时乙必败。

我们得出一个结论:对$\{x,y\}$甲先拿,甲输的充分必要条件是 $x=y$。

对于开始时是$\{1,2,m\}(m\geqslant 4)$, $\{1,3,n\}(n\geqslant 3)$甲首先把它变成$\{1,2,3\}$而获胜。

如果我们用"逢 2 进 1"的 2 进制来表示自然数,则 1 表成 1,2 表成 10,3 表成 11,这三个数在 2 进制之下的每一数位上的数字之和都是 2;对于$\{m,m\}$,把 m 表成 2 进制之后,这两个 m 在 2 进制之下每个数位上的数字之和不是 0 就是 2;我们看到,对于先手必败的情形,开始时各堆筹码数的 2 进制表达中,这几堆数目在同一数位上的数字之和(在十进制中)都是偶数。再看对于先手必胜的情形,例如$\{5,5,6\}$与$\{6,6,7\}$,甲第一次拿走第三堆上的 6 或 7 个筹码,给乙造成面临$\{5,5\}$的形势,由上述二堆先手必输的充要条件,乙必输,即甲必胜,我们把 5,6,7 表成 2 进制, $5=101$, $6=110$, $7=111$

$$\begin{array}{r} 5:101 \\ 5:101 \\ \underline{6:110} \\ 312 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6:110 \\ 6:110 \\ \underline{7:111} \\ 331 \end{array}$$

即这时这三堆在二进制表达中同一数位上的数字之和不全是偶数。

至此我们猜测到：

先手必败的充分必要条件是各堆筹码数在 2 进制表达中同一数位上的数字之和皆偶数。

可以证明，这一猜想是成立的。

例如 $\{1, 2, 3, 4\}$，在 2 进制中，$1=1$，$2=10$，$3=11$，$4=100$，在二进制中各数位数字之和分别为 1, 2, 2，所以甲必胜。具体对抗过程是甲先拿走了第四堆的四个筹码，给乙留下 $\{1,2,3\}$ 的必败形势。

再看 $\{1,2k,2k+1\}$，$k\geqslant 1$。在 2 进制中，$1=1$，$2k=a_1a_2\cdots a_m0$，$2k+1=a_1a_2\cdots a_m1$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m\in\{0,1\}$，$a_1\neq 0$。于是在 2 进制中三个数的各数位数字之和不是 0 就是 2，所以甲必输。具体对抗过程是：甲拿了一次后可能出现的形势是

$$\{2k,2k+1\},\{1,2k\},\{1,2k+1\}$$

$$\{1,m,2k+1\},\{1,2k,r\}$$

对于 $\{2k,2k+1\}$，乙使之变成 $\{2k,2k\}$，这时甲必输；

对于 $\{1,2k\}$，乙使之变成 $\{1,1\}$，这时甲必输；

对于 $\{1,2k+1\}$，乙使之变成 $\{1,1\}$，这时甲必输；

对于 $\{1,m,2k+1\}$，若 m 是偶数 $2l$，则乙使之变成 $\{1,2l,2l+1\}$，l 比 k 小；若 m 是奇数 $2n+1$，则乙从第三堆 $2k+1$ 中拿走一些，使其剩下 $2n$ 个筹码，于是变成 $\{1,2n,2n+1\}$，总之，会比原来的筹码减少，但仍是 $\{1,2x,2x+1\}$ 的形势。对 $\{1,2x,2x+1\}$ 再进行下去，最后会出现 $\{1,1\}$，$\{2k,2k\}$，$\{1,2,3\}$，这时轮到甲拿筹码，乙必胜。

对于 $\{1,2k,r\}$，若 $r=2k$，则乙使之变成 $\{2k,2k\}$，这时甲必败；若 $r<2k$，与 $\{1,m,2k+1\}$ 的情形相似地乙可以使其变成 $\{1,2s,2s+1\}$，$s<k$，进而乙胜。

伟大的数学家冯·诺依曼曾建立了如下的定理：

一种具有完全确定的信息的游戏，必有一确定的取胜策略。

中国筹码游戏有完全确定的信息，即若干堆的数量是确定的，这时，按冯·诺依曼的定理，甲乙谁能胜已经是事先唯一确定的，而且能胜者的取胜对策存在，如果能胜者不出昏招儿，他的胜利是确定无疑的。

4.11 组合在几何中作怪

组合在几何中作怪，一些几何难题采用组合技巧被降服的事我们已经见识过，例如闭曲线在平面上相交形成的区域数；把圆周 $2n$ 等分后，有多少种连接分点的无公共点的 n 弦组等怪题，就是运用组合的怪招儿解决的。现再提供若干精彩刁难的初等几何问题，需要借助组合技术来解答。

①平面上 20 个点，其中任三点不共线，问它们能确定多少条直线？多少个三角形？

因为任三点不共线，所以从 20 个点中每取两个点就可确定一条直线，共计能确定的直线条数为

$$C_{20}^{2}=\frac{1}{2}\times 20\times 19=190$$

从 20 个点中任取三点可确定一个三角形，共计能确定的三角形数目为

$$C_{20}^{3}=\frac{1}{6}\times 20\times 19\times 18=1140$$

②若凸 20 边形任三条对角线不在凸 20 边形内部交于一点，问全部对角线被它们的交点分成了多少线段？

凸 20 边形对角线总条数为 $C_{20}^{2}-20=170$。凸 20 边形上每四个顶点产生一条对角线交点，又无三条对角线在凸 20 边形内部交于一点，故对角线在凸多边形内的交点总数为 $C_{20}^{4}=4845$。由于每个交点

在两条对角线上，每条对角线上每添加一个交点，则多分出一段线段，所以所求的线段条数为

$$170+4845\times 2=9860$$

③设想把平面上的每个点皆用红绿两种颜色之一着色，则存在两个相似三角形，相似比是2001，且这两个三角形每个的三个顶点同色。

以半径为1和2001做同心圆，在小圆上任取九点，由抽屉原理，其中必有五点同色，不妨设这五个同色的点为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，做大圆半径 OB_i，使得 A_i 在 OB_i 上，$i=1,2,3,4,5$。则 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 中必有三个同色，设 B_i, B_j, B_k 同色，$i, j, k\in\{1,2,3,4,5\}$，则 $\triangle A_iA_jA_k \backsim \triangle B_iB_jB_k$，且此两个三角形每个的三顶点同色，相似比等于2001，见图4-18。

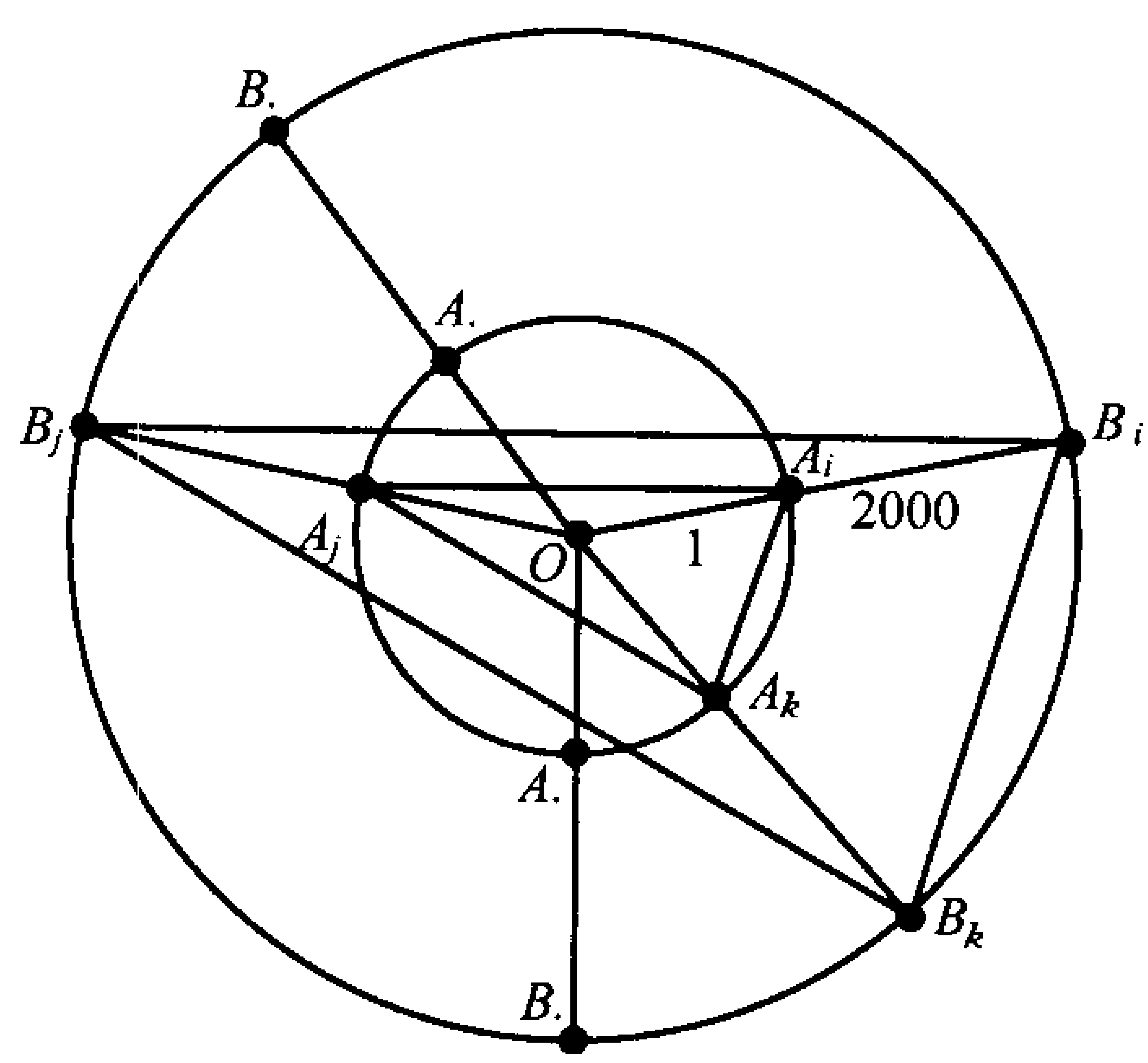


图 4-18

④平面上 n 条直线，没有两条是平行的，也没有三条是共点的，求它们把平面划分成的区域数目。

设 x_n 是 n 条题中所述的直线把平面划分成的区域数，当画了 $n-1$ 条直线，划分成 x_{n-1} 个区域后，再画第 n 条直线，它与前 $n-1$

条直线中每条有一个交点，这 $n-1$ 个交点把第 n 条直线分割成 n 部分，每一部分增加一个平面区域，所以

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + n & (4.26) \\ x_{n+1} = x_n + n + 1 & (4.27) \end{cases}$$

(4.26) - (4.27)式得

$$\begin{cases} x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 1 & (4.28) \\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 1 & (4.29) \end{cases}$$

(4.28) - (4.29)式得

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 3x_n - x_{n-1} = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0, \quad \lambda = 1(\text{三重根})$$

于是

$$x_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2, c_1, c_2, c_3$$

待定。由于 $x_1=2, x_2=4, x_3=7$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 4 \\ c_1 + 3c_2 + 9c_3 = 7 \end{cases}$$

解得 $c_1=1, c_2=\frac{1}{2}, c_3=\frac{1}{2}$。所以所求的区域数是

$$x_n = 1 + \frac{1}{2}(n + n^2) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

⑤球面上有 n 个大圆，没有三个大圆过同一点，求这些大圆把球面划分的区域数。

与上题相似地，设 y_n 是 n 个大圆划分的区域数，则前 $n-1$ 个大圆划分成 y_{n-1} 个区域，再画第 n 个大圆后，与前面 $n-1$ 个大圆共有 $2(n-1)$ 个交点，增加 $2(n-1)$ 个区域，于是

$$y_n = y_{n-1} + 2(n-1), y_{n+1} = y_n + 2n$$

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = 2, y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2$$

$$y_{n+2}-3y_{n+1}+3y_n-y_{n-1}=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0,\lambda=1(\text{三重根})$$

于是

$$y_n=c_1+c_2n+c_3n^2$$

由于 $y_1=2, y_2=4, y_3=8$, 于是

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=2 \\ c_1+2c_2+4c_3=4 \\ c_1+3c_2+9c_3=8 \end{cases}$$

解得 $c_1=2, c_2=-1, c_3=1$。

所以题中的 n 个大圆把球面划分成的区域个数为

$$2+(-1)n+n^2=n^2-n+2$$

⑥空间有 $2n$ 个点,其中无四点共面现象,它们之间至少用 n^2+1 条线段相连,则这些线段中至少有三条构成一个三角形。

$n=2$ 时,即有四个点,用 $n^2+1=5$ 条线段连接,会出现两个三角形,见图 4-19。

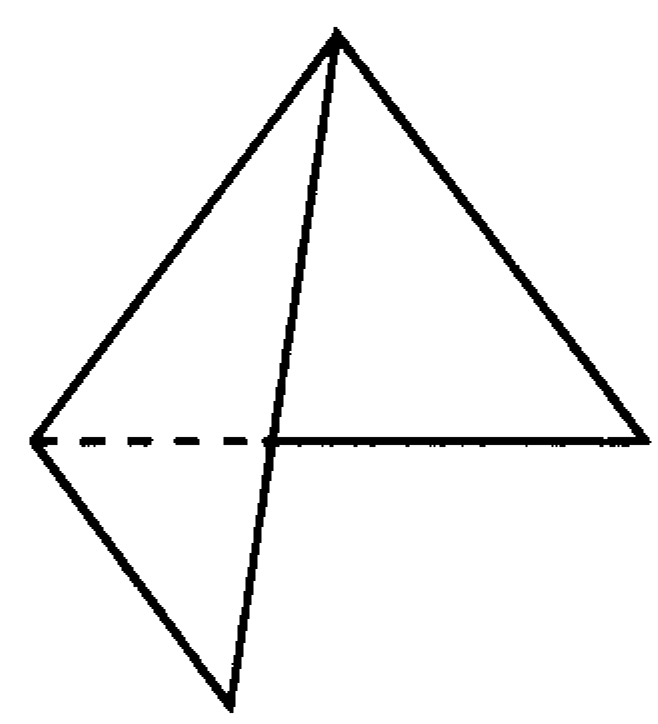


图 4-19

假设对 $n=k$ 时,命题已成立,往证 $n=k+1$ 时命题仍成立。

对于 $n=k+1$ 的情形,由于有$(k+1)^2+1$ 条线段,所以可以从这$2(k+1)$个点中找到两点 P_1,P_2;P_1,P_2 之间有线段连接,令 A 为除 P_2 之外与 P_1 相连的点组成的子集,B 为除P_1 外与 P_2 相连的点组成的子集,见图 4-20。从$2(k+1)$个点中删去 P_1,P_2 两点,剩下$2k$ 个点,分两种情形:

情形 1 剩下的$2k$ 个点间至少有k^2+1 条线段,由归纳法假设,会产生三角形。

情形 2 剩下的$2k$ 个点间最多k^2 条线段。

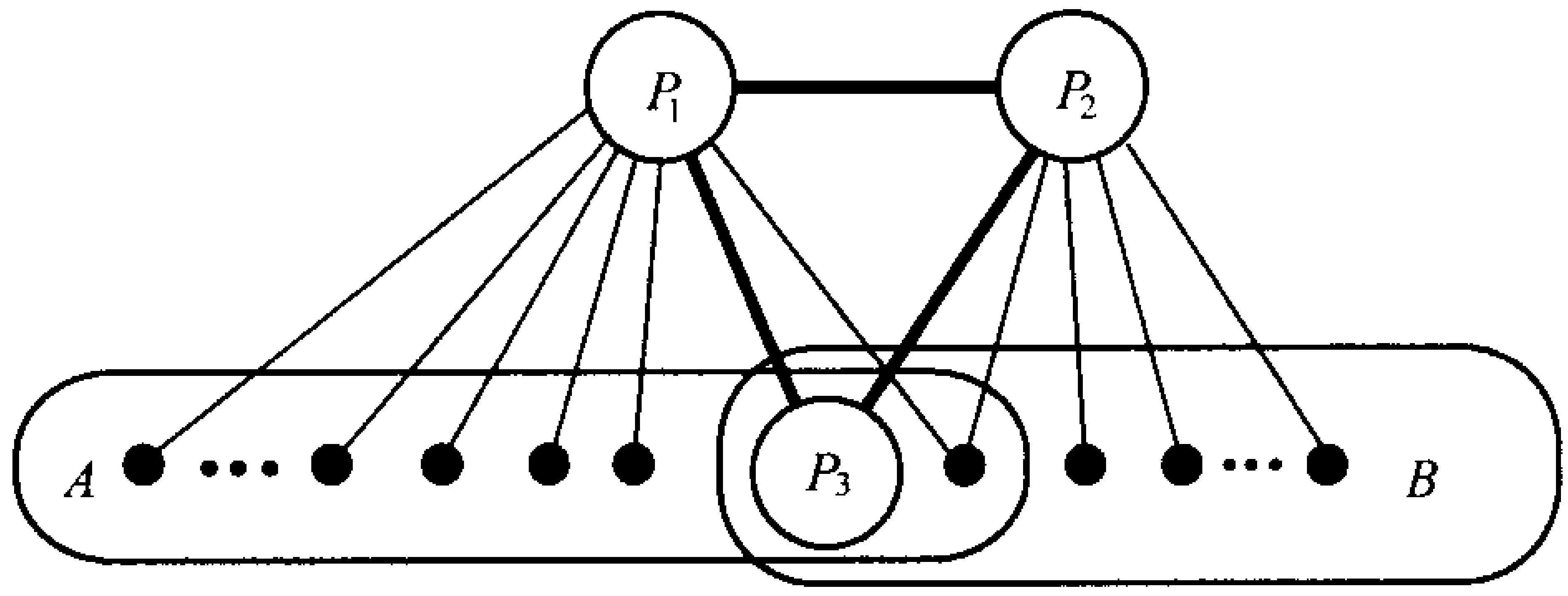


图 4-20

由容斥原理

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \tag{4.30}$$

而 $|A\cup B|\leqslant 2k$, $(|A|+|B|+1)+k^2\geqslant(k+1)^2+1$, 从而

$$|A|+|B|\geqslant 2k+1 \tag{4.31}$$

由 $|A\cup B|\leqslant 2k$ 及(4.30)(4.31)得

$$|A\cap B|\geqslant|A|+|B|-2k\geqslant 1$$

即存在 $P_3\in A\cap B$, 可见对于 $n=k+1$ 的情形, 有$\triangle P_1P_2P_3$。

用上面的方法可以证明:

平面上由 n 个点组成的点集中, $n>3$, 且其中无三点共线, 又设自然数 k 满足$\frac{n}{2}<k<n$, 每个点都至少与 k 个点相连, 则这些线段可以构成至少一个三角形。

事实上, 设 P_1P_2 是一条线段, P_1P_2 是题中点集中的点。令 A 为除 P_2 外与 P_1 相连的点组成的子集, B 是除 P_1 外与 P_2 相连的点组成的子集, 由于$\frac{n}{2}<k<n$, 以及每点至少与 k 点相连, 则(图 4-20)

$$|A|+|B|\geqslant 2(k-1)>n-2 \tag{4.32}$$

$$|A\cup B|\leqslant n-2 \tag{4.33}$$

把(4.32)与(4.33)式代入容斥原理(4.30)式得

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|>n-2-(n-2)=0$$

即 $A\cap B\neq\varnothing$, 存在 $P_3\in A\cap B$, 可见存在$\triangle P_1P_2P_3$。

4.12 投票排列名次是否公正

民主和科学是人类文明的重要标志，在日常生活、体育文娱比赛和国家政治生活当中，民主评议与民主选举是人们十分关心的热点问题。

例如，甲乙两名运动员，进行同一项比赛，甲乙实力相当时，约定记成甲＝乙，甲优于乙，则记成甲＞乙。有评委若干人，要求评委们集体地对若干运动员按优劣排序，应该用什么办法进行排序？排出的名次是否公正？

设评委集合为 $J=\{1,2,3,\cdots,n\}$，运动员集合为 $S=\{a,b,c,\cdots\}$，记 j 评委投票排出的序为 $p(j)$，$j\in J$。

显然有下列共识：

①对任意两个运动员 $x, y\in S$，$x>y$，$x=y$，$x<y$ 中仅有一种关系成立。

②当 $x\geqslant y$，$y\geqslant z$ 时，$x\geqslant z$，且仅当 $x=y$，$y=z$ 时，$x=z$，其中 $x, y, z\in S$。

集中各评委意见，最后选举结果的排序若按少数服从多数的民主精神，应如下进行：

$x, y\in S$，在所有投票 $p(j)(j=1,2,\cdots,n)$ 当中，仅当 $x>y$ 出现的次数超过 $\frac{n}{2}$ 时，判定 $x>y$。

但这种貌似公正的选举有时会得不出公正的结果，例如

$$J=\{1,2,3\},\quad S=\{a,b,c\}$$
$$p(1)=abc,\ p(2)=bca,\ p(3)=cab$$

在 $p(1)$，$p(2)$，$p(3)$ 当中，$a>b$ 发生两次，过半数，应判 $a>b$；$b>c$ 也发生两次，过半数，应判 $b>c$；$c>a$ 也发生两次，过半数，应判 $c>$

a。这就不能裁决 a,b,c 的名次了!

为了使得判决更有说服力,如下计算各运动员的实力:设 $B_j(x)$ 是 $p(j)$中$<x$ 的元素的个数,即 $p(j)$这张票上排在运动员 x 之后的运动员的个数,应该说比 x 差的运动员越多,x 越强。令

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) + \cdots + B_n(x)$$

$B(x)$就是 x 的集体评判实力,$B(x)$越大,x 越强,仅当 $B(x)>B(y)$ 时,判 $x>y$。

但这种凭 $B(x)$的大小来裁判的办法,有时也会出现令人不服气的判决,例如

$$J = \{1,2,3,4,5\},\ S = \{a,b,c,x,y,z\}$$

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = xyzabc,\ p(5) = yzabcx,$$

则统计出 $B(x)=5+5+5+5=20$, $B(y)=4+4+4+4+5=21$,结果判定 $y>x$,x 不服,x 说:“我优于 y 四次,而 y 优于我仅一次,怎么说我次于 y 呢!”

当然上面的少数服从多数以及以 $B(\cdot)$的大小论优劣的方法多数情况下还是可以得出合理裁决的。为了克服它们的缺点,人们又寻找更科学的排名规则。

1951 年,阿荣(Arrow)提出四条大家都认为是公平的所谓“选举公理”。

公理 1 对每对运动员 $x,y\in S$,存在一种投票与判决,使得 $x>y$ 公正。

这条公理在选举结果公布之前是不会有人反对的,例如在每个 $p(j)$中,皆有 $x>y$,判 $x>y$ 当然公正。

公理 2 若第一次投票判决了 $x>y$,第二次再投票表决一次,第二次投票中所有的 $p(j)$中,x 的序号都未比第一次投票时增大,其他运动员次序不变,则第二次仍判 $x>y$。

这条公理是说 x 在第二次投票中,在评委的心目中其相对地位

并未变低，甚至有所提高，则第二次的判决对 x 而言不会比第一次差，仍然是 $x>y$。

公理 3 $S_1 \subseteq S$，在两次投票当中，每个评委对 S_1 中运动员之间的排序不变，则两次判决中，S_1 中各运动员间的先后次序不变。

这一公理是说，既然每个评委两次投票对一部分运动员之间的先后次序都保持不变，那么仅就这部分运动员而言，两次判决的结果中，他们之间的排序也不会变动。

公理 4 对任何一对运动员 $x, y \in S$，仅当 $p(k)$ 中 $x>y$ 时才有最后判决 $x>y$，则应把 k 从评委中清除，即 $k \notin J$。

公理 4 是说，如果每对运动员谁优谁劣，别的评委说话不算数，只听 k 号评委一人的意见，事实上，k 恰似秦始皇之流的独裁者，在当今的讲民主讲人权的世界潮流之中，这种独断专制的独裁者必须推翻。

下面讨论在遵循以上四条选举公理的选举中，结果是否公正。

当仅有两名运动员时，且评委不少于两名，“少数服从多数”的选举规则显然满足公理 1 到公理 4。事实上，当所有评委都评 $x>y$，即所有 $p(j)$ 中都是写的 $x>y$，则必须判定 $x>y$；即存在一种投票与判决，使得 $x>y$ 公正，公理 1 满足。因为仅两个候选人，所以公理 2 与公理 3 显然满足。设只有 $p(i)$ 一张票中 $x>y$，但 $p(j)$ 中皆 $x<y$，$i \neq j$；按少数服从多数的原则，不采纳 i 的意见，判 $x<y$，即公理 4 满足。但对候选人多于两个，且评委至少两名的情形，却有下面令人惊讶的结论：

当运动员不少于三名，评委不少于两名的情形，不存在满足公理 1 至公理 4 的评比排序规则。

这一结论无非是说，如果认为只有满足公理 1 至公理 4 的评比排序才是公正的，那么没有公正的评比。

事实上，若 $x, y \in S$，$J_0 \subseteq J$，只要对每个 $j \in J_0$，$p(j)$ 中 $x>y$，则判决 $x>y$，这时称 J_0 是 x, y 的“决定集”。决定集是存在的，J 就

是最大的决定集。可见 x,y 的决定集乃是一种“集体独裁”，即不管 J_0 之外的评委如何反对，只要 J_0 中的评委一致说 x 优于 y，则裁决 x 优于 y。这也就是说，决定集 J_0 是这种集合，对一切 $j \in J_0$，$p(j)$ 中皆 $x>y$，而对一切 $j \in J-J_0$，$p(j)$ 中皆 $x<y$，但仍判决 $x>y$。由此可以推导出：

若 J_0 是人数最少的决定集，则 J_0 中只有一位评委，于是独裁者不可避免！

事实上，若 J_0 是人数最少的决定集，但 $|J_0|>1$，设 $j \in J_0$，则 $J_0-\{j\} \neq \varnothing$，若 J_0 是 x,y 的决定集，设

$$p(j)=xyz;p(i)=zxy,i \in J_0-\{j\}$$

$$p(l)=yzx,l \in J-J_0$$

由于 J_0 是 x,y 的决定集，则应有 $x>y$；如果判 $z>y$，则 $J_0-\{j\}$ 是 y 与 z 的决定集，与 J_0 是最小决定集相违，所以这时必须判 $y \geqslant z$。于是有判决 $x>y \geqslant z$，从而 $x>z$，此表明 $\{j\}$ 是 x,z 的决定集，与 J_0 是最小决定集相违，所以 $|J_0|$ 不能大于 1，J_0 只一位评委 j 组成。j 岂不成了独裁者！ 此违反了公理 4，可见阿荣选举公理也有自相矛盾的可能。

我们看到，如果仅仅谈谁优谁劣，按各评委的选票排序，有时很难做到合理公正，如果把候选人各方面的表现加权打分，就公正合理得多了。

例如某校有四位候选人竞选校长，选民对他们的领导才能、学问人品、年龄身体三个主要方面进行打分，选举委员会对每个候选人的三个方面用计算机算出平均分数，再通过民意测验定出对于一个校长而言人品学问、年龄身体、领导才能的重要性所占的比重百分比，见图 4-21，“身”代表年龄身体，“品”代表学问人品，“能”代表领导才能，图 4-21 中由(校长)中经(身)(品)(能)到(甲)有三条轨道，把每一轨上的分(权)数相乘，三个积相加则是甲的综合得分。对乙、丙与丁也

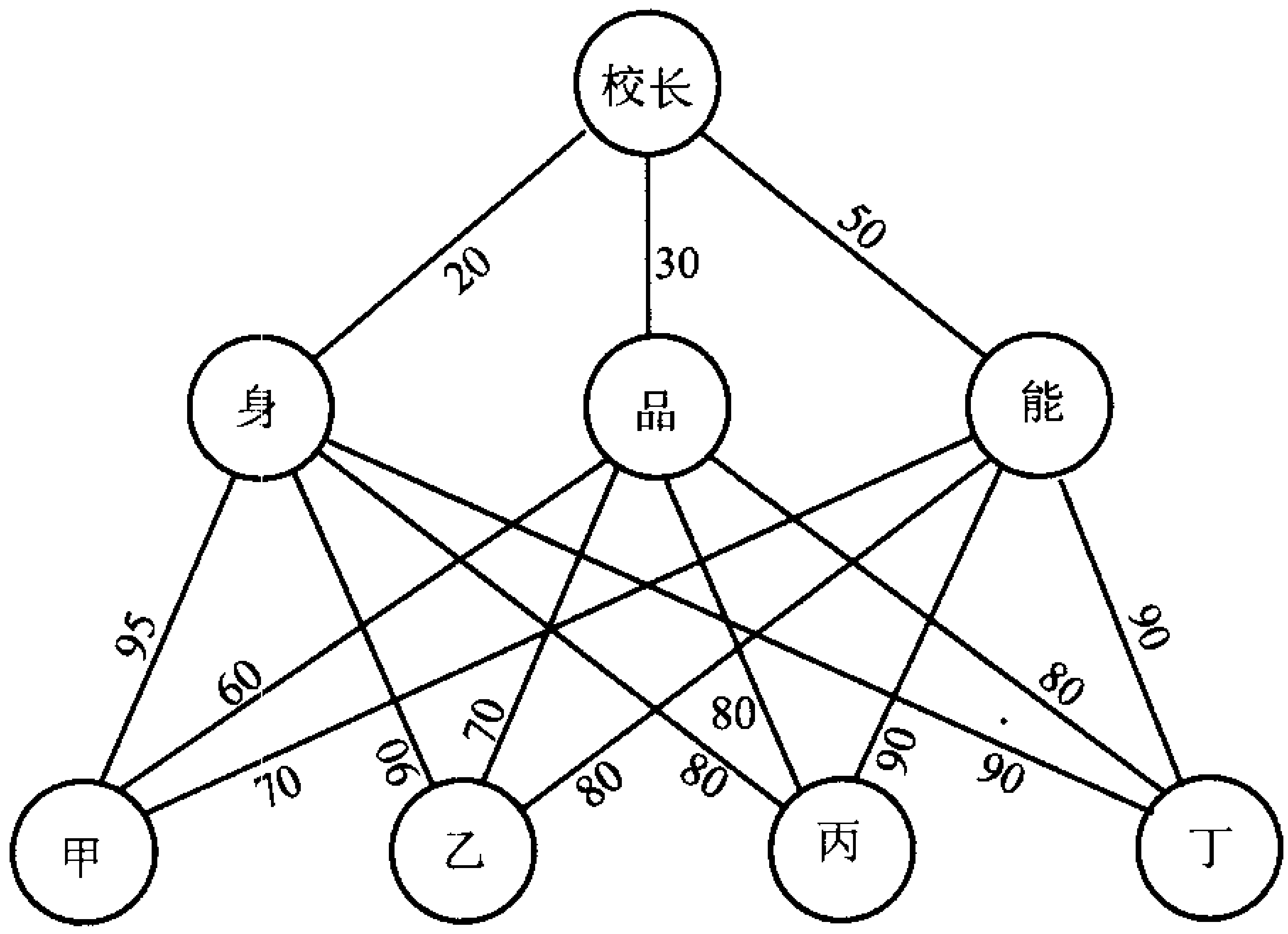


图 4-21

仿照甲得出综合得分

$$甲 = 95 \times 20 + 60 \times 30 + 70 \times 50$$
$$= 1900 + 1800 + 3500$$
$$= 7200$$
$$乙 = 90 \times 20 + 70 \times 30 + 80 \times 50$$
$$= 1800 + 2100 + 4000 = 7900$$
$$丙 = 80 \times 20 + 80 \times 30 + 90 \times 50$$
$$= 1600 + 2400 + 4500 = 8500$$
$$丁 = 90 \times 20 + 80 \times 30 + 90 \times 50$$
$$= 1800 + 2400 + 4500$$
$$= 8700$$

丁的综合得分最高，丁当选本届校长。

这种分层次加权，分析综合的“层次分析”方法，还可用于填报高考志愿、选购商品、为运动员或演员打分等实际活动中的评比排序。

4.13 合时容易分时难

全班65位同学分成两组进行体育活动，之后两组合在一起到教室听老师的数学课。老师说："把两组合起来很容易，只是个简单的加法；反过来，若问把全班分成两个组，有几种分法，每天按一种分法进行体育活动，能够进行多少天，请各位同学算算看！分成3个组、4个组呢？"

一位参加过数学奥林匹克冬令营的同学立刻起立答道：

第一类分法是：1组1人，另一组64人，共有C_{65}^{1}种分法。

第二类分法是：1组2人，另一组63人，共有C_{65}^{2}种分法。

依此类推，到第32类分法是：1组32人，另一组33人，之后各组恰好重复前32类分法，所以分组方式的总数是

$$\frac{1}{2}(C_{65}^{1}+C_{65}^{2}+\cdots+C_{65}^{32}+C_{65}^{33}+\cdots+C_{65}^{64})$$

$$=\frac{1}{2}[(2^{65}-2)]=2^{64}-1$$

这位同学得出这个结论后，全班同学都惊呼起来，这个数不正是"梵塔探宝黄粱梦"一课中讲的移动金盘的次数吗！需要5亿亿天以上才能活动完毕呢！

至于分成3组，4组，……的情形，一时没有同学提供正确答案，只有听老师分析解答了。老师先讲了一个一般性的公式：

若把 n 位同学分成 m 组（$n>m$）可能的方式数目记成$S_2(n,m)$，则

$$S_2(n,m)=mS_2(n-1,m)+S_2(n-1,m-1),\quad (n>1,m>1) \tag{4.34}$$

事实上，设$b_1,b_2,\cdots,b_n$是n位同学，分情形分析之：

情形1 若b_k同学自己一组，则分组方式数为$S_2(n-1,m-1)$。

情形 2 若 b_k 与一些同学在一组，先让 b_k 不参加，这时 $n-1$ 个同学分组方式数为 $S_2(n-1, m)$；然后让 b_k 参加一个组，b_k 共有 m 种选择，所以这时的分组方式数为 $mS_2(n-1, m)$。

由情形 1 与情形 2 知

$$S_2(n, m) = mS_2(n-1, m) + S_2(n-1, m-1)$$

再用(4.33)公式来计算 65 位同学分三组的方式数目

$$\begin{aligned}
S_2(65,3) &= 3S_2(64,3) + S_2(64,2) \\
&= 3[3S_2(63,3) + S_2(63,2)] + S_2(64,2) \\
&= 3^2S_2(63,3) + 3S_2(63,2) + S_2(64,2) \\
&= 3^2[3S_2(62,3) + S_2(62,2)] + 3S_2(63,2) \\
&\quad + S_2(64,2) \\
&= S_2(64,2) + 3S_2(63,2) + 3^2S_2(62,2) + \cdots \\
&\quad + 3^{61}S(3,2) + 3^{62}S_2(3,3) \\
&= (2^{63}-1) + 3(2^{62}-1) + 3^2(2^{61}-1) + \cdots \\
&\quad + 3^{61}(2^2-1) + 3^{62} \\
&= 2^{63} + 3\times2^{62} + \cdots + 3^{61}\times2^2 + 3^{62} - 3^{61} - 3^{60} \\
&\quad - \cdots - 3^2 - 3 - 1 \\
&= 2^{63} + 3\times2^{62} + \cdots + 3^{61}\times2^2 + 3^{62} - \frac{3^{62}-1}{3-1} \\
&= 2^{63} + 3\times2^{62} + 3^2\times2^{61} + \cdots + 3^{61}\times2^2 \\
&\quad + \frac{3^{62}+1}{2}
\end{aligned}$$

这是一个非常庞大的数字!

公式(4.34)还有许多应用，例如：

科大计算机科学技术系有 10 名毕业生分配到 8 个省计算中心

工作,问有多少种分配方案?

此题就是求 $S_2(10,8)$,由公式(4.33)得

$$
\begin{aligned}
S_2(10,8) &= 8S_2(9,8) + S_2(9,7) \\
&= 8C_9^2 + 7S_2(8,7) + S_2(8,6) \\
&= 8C_9^2 + 7S_2(8,7) + 6S_2(7,6) + S_2(7,5) \\
&= 8C_9^2 + 7C_8^2 + 6C_7^2 + 5S_2(6,5) + S_2(6,4) \\
&= 8C_9^2 + 7C_8^2 + 6C_7^2 + 5C_6^2 + 4S_2(5,4) + S_2(5,3) \\
&= 8C_9^2 + 7C_8^2 + 6C_7^2 + 5C_6^2 + 4C_5^2 + 3S_2(4,3) \\
&\quad + S_2(4,2) \\
&= 8C_9^2 + 7C_8^2 + 6C_7^2 + 5C_6^2 + 4C_5^2 + 3C_4^2 \\
&\quad + 2^{4-1} - 1 \\
&= 750
\end{aligned}
$$

由公式(4.34)可以用 $S_2(n,m)$构成状似杨辉三角的数表,见图4-22。

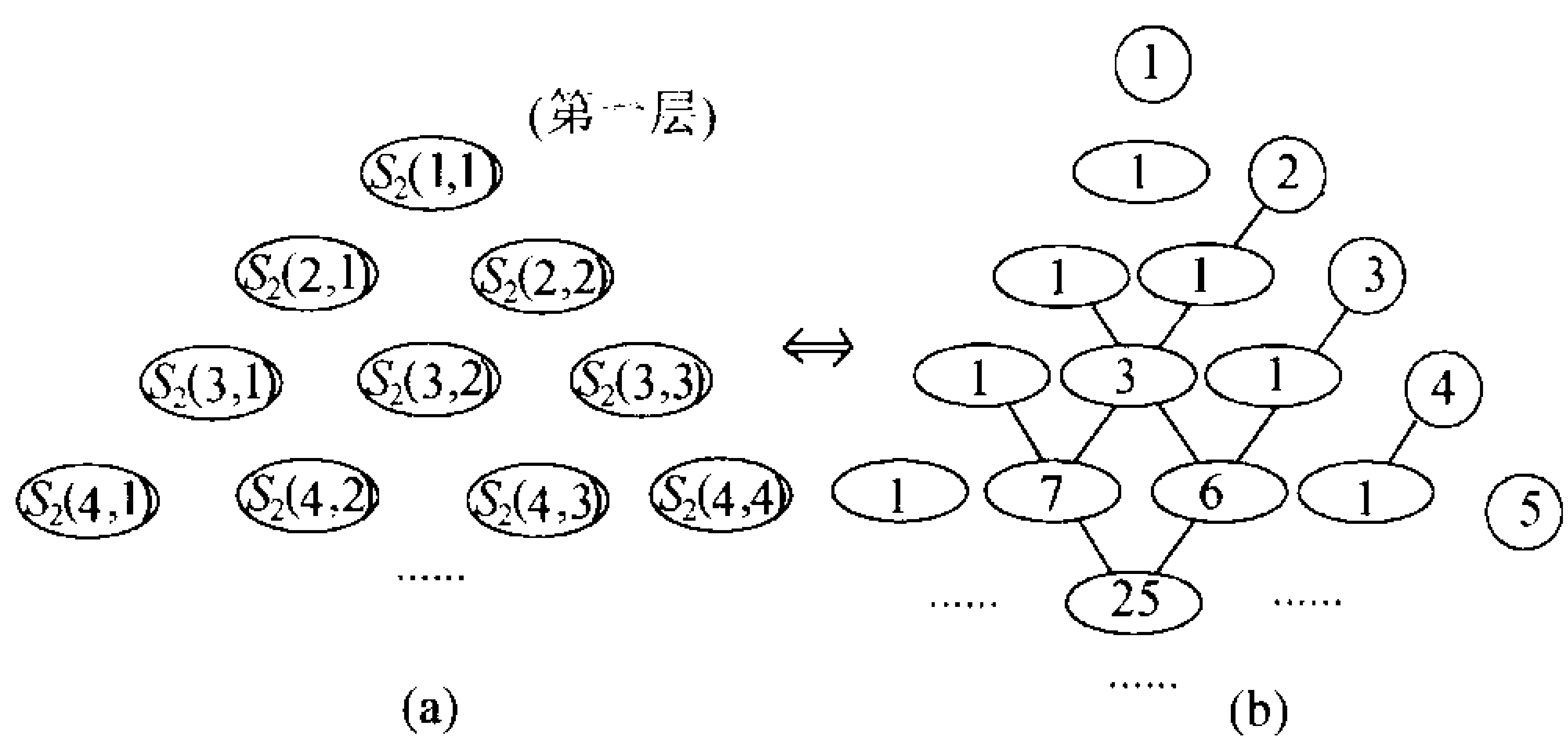


图 4-22

例如 3=1×②+1,7=3×②+1,25=6×③+7,即第 n 层的数 $S_2(n,i)$是第 $n-1$ 层上 $S_2(n,i)$ 右上方的数乘以右上方圈里的数加上第 $n-1$ 层上 $S_2(n,i)$的左上方的数得出的。

数学无处不在，同学分组活动这么一件日常生活极为平凡的事情，若不认真去研讨，感觉不到之中会有什么深刻的数学内容。一经分析，却发现了上述令人惊叹的数学结论。

数学上称 $S_2(n, m)$ 为第二类斯特林(J. Stirling, 1692～1770)数，Stirling 数和 Catalan 数是组合数学当中一对孪生姊妹，两者都妙不可言，应用极广。

4.14 夫妇入席问题

n 对夫妇出席宴会，围圆桌而坐，要求同一对夫妇不要相邻，问有多少种入席方式?

把圆桌旁的 $2n$ 把椅子从 1 到 $2n$ 按顺时针编号，若不限制一对夫妻是否相邻，共有 $(2n)!$ 种入席方式。记同一对夫妻不相邻的入席方式为 m_n 种，而有 k 对夫妻每家都相邻而坐时的入席方式为 w_k 种，则由容斥原理得

$$m_n = (2n)! - C_n^1 w_1 + C_n^2 w_2 - C_n^3 w_3 + \cdots + (-1)^n w_n \tag{4.35}$$

想像把邻座的 k 对夫妻的姓名写在长方形的纸片上状如 $\boxed{h_i \mid w_i}$，h_i 是第 i 丈夫，w_i 是 h_i 之妻。这种纸片每张恰盖住两把相邻的椅子。用这些纸片去单层覆盖某些相邻的椅子，共有 $d_k k!\ 2^k$ 种方式，其中 d_k 是不看每张纸片上写的内容(即家庭)时可能安排这些纸片的方式数目。另外的 $2n-2k$ 位客人有 $(2n-2k)!$ 种入席方式，所以

$$w_k = d_k k!\, 2^k (2n-2k)!,\ k = 1, 2, \cdots, n \tag{4.36}$$

下面计算 d_k 的值。这时，可以视每张纸片为圆周上的点，把未被纸片盖住的椅子也视为圆周上的点，共有 $2n-k$ 个点；这时对这 $2n-k$ 个点再编一套号码(顺时针)，因这套新编号码的第 1 号有

$2n-k$ 种取法，所以相应于两套号码，纸条的安排有 $(2n-k)d_k$ 种。

再用另一种角度来统计纸条的安排方式数，首先在编了号的 $2n-k$ 个圆周上点中取出 k 个作为纸条，取法有 C_{2n-k}^{k} 种，然后把纸条对应的点变成两个，于是圆周上变成 $2n$ 个点，再把这 $2n$ 个点按顺时针方向编号，与上面相似地可知纸条的安排方式有 $2nC_{2n-k}^{k}$ 种。于是得

$$2nC_{2n-k}^{k}=(2n-k)d_k,\ d_k=\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k} \qquad (4.37)$$

(4.37)代入(4.36)得

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}\cdot k!2^k(2n-2k)! \\ &= 2n(2n-k-1)!2^k \qquad (4.38) \end{aligned}$$

(4.38)代入(4.35)得

$$\begin{aligned} m_n = (2n)! - C_n^1 2n\times 2\times(2n-2)! + C_n^2 2n \\ \times 2^2(2n-3)! - \cdots + (-1)^n 2n(n-1)!2^n \end{aligned}$$

例如 $n=10$ 时，$m_{10}=826060810479206400$。

如果对夫妇入席问题再提出“男女必须相间”的补充规定，问入坐的方式有几种？

用 M_n 表示所问的入坐方式的数目。如果不考虑同一对夫妻是否相邻，只考虑男女相间而坐，把椅子按顺时针顺序编号后，1 号坐男还是坐女有两种选择，而女士们有 $n!$ 种入坐方式，男士们也有 $n!$ 种入坐方式，共计 $2(n!)^2$ 种入坐方式。再用容斥原理删除同一对夫妻相邻的(不允许)情形，则

$$M_n=2(n!)^2-C_n^1w_1+C_n^2w_2-\cdots+(-1)^nw_n \qquad (4.39)$$

其中 w_k 是有 k 对夫妻相邻而坐时的入坐方式数目，与上面相似地可得

$$w_k = 2 \times d_k \times k![(n-k)!]^2 \tag{4.40}$$

(4.40)代入(4.39)得

$$M_n = 2(n!)^2 - 2 \times n!\frac{2n}{2n-1}C_{2n-1}^{1}(n-1)! + \cdots$$
$$+ (-1)^k 2 \times n!\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}(n-k)! + \cdots$$
$$+ (-1)^n 4 \times n! \tag{4.41}$$

例如 $n=10$ 时, $M_{10}=3191834419200$。即使做了男女相间和一家人不许相邻等限制,这种圆桌入席的方式仍有 3 万亿多种! 这也只能是说说而已,真要把这么多种方式都试坐一番,时间不够用。组合问题一般都有十分大的时间复杂度,即实现各种可能所需要的时间十分久,以至于不可能实现出来。

4.15 把握机会,成自险出

掷骰子是一种机会游戏,骰子是在立方体(一般是牛骨制成)的六个面上分别刻上 1 个,2 个,3 个,4 个,5 个,6 个“点儿”,两人赌博时,掷出的骰子向上的面上点多者赢,这纯属碰运气。事实上,每次掷扔,每个面朝上的机会均等,都是$\frac{1}{6}$。骰子这个玩意儿历史悠久,考古学家从伊拉克北部发现了公元前 2000 多年前的骰子,虽然自古各国都明令禁赌,但大多数国家屡禁不止。赌博有百害但也有一功,就是它引起了一些数学家的注意,并从中酝酿提炼出一门称为概率论的数学分支,例如伽利略、帕斯卡、费马都是最早研究赌博中的概率问题的代表人物。

概率已经成了世界公认的数学专用名词,其实称它为“机会”更直白、更准确,也许是由于嫌机会这个词“太土”,才用了“概率”这个似显文雅的专业名词。事实上,叫什么都无所谓,你看玫瑰花,不管把它称为什么,看起来还是那么美,闻起来还是那么香。我们知道

了，所谓概率大就是机会大，例如电视台天气预报说本市明天降水的概率是 40%，就是在告诉我们明天下雨（雪）的机会是 40%。如此说来，掷骰子掷出偶点儿的概率是$\frac{1}{2}$，掷硬币掷出国徽面的概率是$\frac{1}{2}$，生小孩生男孩的概率也是$\frac{1}{2}$，等等。当然并不是什么事情出现的机会都是一半对一半，一般需要进行认真的计算。下面是几个小实例。

①m 个红球，n 个白球，其质地和大小都一样，放入一个布袋中，搅拌后从中任意摸出 r 个球，$r < m+n$，问这 r 个球全是红球的概率是多少？

从 $m+n$ 个球中任意抽取 r 个球的方式数为 C_{m+n}^{r}，从 m 个红球中抽出 r 个的可能方式有 C_m^r 种，所以从袋子中摸出的 r 个球全红的机会的大小为

$$C_m^r \div C_{m+n}^r = \frac{m!}{r!(m-r)!} \cdot \frac{r!(m+n-r)!}{(m+n)!}$$
$$= \frac{m!(m+n-r)!}{(m+n)!(m-r)!}$$

例如袋子里原有 10 个红球，10 个白球，抽得 10 个球全红的机会为

$$\frac{10!\ \ (10+10-10)!}{0!\ \ (10+10)!} = 0.0000054 (0!\ \ = 1)$$

只有大约百万分之五的可能抽得的十个球全红（或全白），这个机会太小，几乎是不能实现的事。

②甲乙二人赌博，各下赌注 500 元，约定先胜三局者把 1000 元赌注全拿走。设两人赌技相当，赌了三局，甲以 2∶1 暂时领先，这时忽闻人呼：抓赌的来了！甲乙落荒而逃，到一个隐蔽处去分赌本，问这时应如何分这 1000 元赌本才使两赌徒都心服口服？

一种方案是没有赌完，各拿回自己的 500 元赌本，但甲不同意，他认为自己已经多赢一局，应多拿。第二种方案是全归甲；乙不服，乙说再赌下去也许他会连扳两局呢！第三种方案是按赢的比例分

配，甲拿1000元的$\frac{2}{3}$，乙拿$\frac{1}{3}$。仔细分析起来，按比例似合乎人们的心理习惯，但也并不合理。事实上，甲乙若继续赌下去，至多再两局可见胜负，即平时所言的“五打三胜”，两局有四种可能性：甲连胜，甲乙各胜一局甲先胜，乙甲各胜一局乙先胜，乙连胜。由于二人赌技相同，以上四种可能出现的机会是一致的，而前三种结果都造成甲最后的胜利，所以甲在此未进行到底的赌博中得胜的机会是$\frac{3}{4}$，甲应分得赌注750元。

历史上，17世纪赌徒梅累(Mere)向帕斯卡提出这个问题(本题数据有改动)，帕氏苦想很久才得到解答，1654年7月29日，帕斯卡把他的解法寄给了费马，两人继续通信深入讨论了与此有关的概率问题。16世纪意大利数学家卡丹写了《论赌博》一书，算是概率方面的第一本著作，1713年，雅各·贝努利出版名著《猜度术》，1760年法国的蒲丰写出《偶然性的算术试验》，1812年拉普拉斯出版《分析概率论》，1896年，我国翻译成汉语的第一本概率著作是《决疑数学》；我国已是当今概率方面的强国，北京大学已故教授许宝騄等人在现代概率论与数理统计方面达到了世界领先水平。

③n个人$v_1, v_2, \cdots, v_n$随机地排成一路纵队，v_2紧跟在v_1后面的概率是多少？

n个人的随机排列共$n!$种可能，v_2紧跟v_1的事件有$n-1$种可能，即v_1为排头，v_2排第二，或v_1排第二，v_2排第三，…，v_1排第$n-1$，v_2排队尾。其他的$n-2$人有$(n-2)!$种排法，所以所求概率为

$$\frac{(n-1)[(n-2)!]}{n!}=\frac{1}{n}$$

④从有10条金鱼的鱼缸中捉出一条金鱼后再放回鱼缸，这样一直抓过五次鱼，指定的一条鱼被抓三次的概率是多少？

因为第一次抓有 10 种可能性，第二次，……第五次也都有 10 种可能，共计 10^5 种可能性；在五次抓鱼中指定的鱼抓住三次的各种可能为 C_5^3 种，每种可能出现时其余两次捉鱼的方式有 9^2，故所求概率为

$$C_5^3\frac{9^2}{10^5}=0.0081$$

让我们从数学上把上面几个实例略加总结，在现实世界当中，许多现象是事先无法断定其结果的，例如掷骰子，骰子没有落稳之前，谁也不知道它朝上的一面是几个点儿，每掷一次，就是一次随机试验，每次随机试验可能得到的结果称为基本事件。例如掷骰子这种随机试验共有六个可能的结果，它的基本事件个数是 $n=6$。这些基本事件出现的可能性或称机会是均等的，其中我们关心的事件 A 若可能出现 m 次，例如掷骰子出现六个点是我们关心的事件 A，则称 $P(A)=\frac{m}{n}$ 为事件 A 的古典概率，$P(A)$ 中的 P 是 Probability 的字头，掷骰子中事件 A 的概率 $P(A)=\frac{1}{6}$。在古典概率当中基本事件是有限的。冠以“古典”两个字是因为在概率的初创时期，研究赌博等活动时的思路与方法就是如此，它主要借助于组合数学的一些初等的古典的计数方法来进行计算。

⑤已知事件 A 的概率是 p，条件不变的情况下试验 n 次，事件 A 出现 r 次的概率是多少？

例如掷骰子，出现六个点的概率为 $\frac{1}{6}$，若共掷了六次，掷出三次六个点儿的“好事儿”的概率是多少？或者一台机床加工零件的合格率是 $\frac{8}{10}$，如果这台机床共产生了八个零件，其中有七个是合格品的概率是多少？

这种问题涉及的是每次随机试验只有成功或失败两种结果，所

以格外引人注意;同时每次试验是独立进行的,例如掷骰子,上次掷出几个点,并不影响下一次的成败(六个点算成功),每次试验的条件是相同的,从而每次试验成败的机会是一致的。

这种问题可以直观地转述成如下问题:

在 n 个袋子里都放入 M 个红球和 $N-M$ 个白球,袋子编号为 $1,2,\cdots,n$,依次从每个袋子中各取出一个球为 n 次试验,那么从一个袋子中抽得的是红球这种事件 A 的概率为 $p=\frac{M}{N}$,问的是抽出的这 n 个球中恰有 r 个是红球的概率是多少?这里把每两个球都视为相异的。

从 n 个袋子里各取一球的可能性为 N^n 种,下面计算其中恰有 r 个球是红色的可能性有几种。r 个红球分别来自 r 个袋子,这些红球出自那些袋子的可能性有 C_n^r 种;对这每种可能性,从其每袋中抽一红球的可能性有 M^r 种,从其余的 $n-r$ 个袋子中各抽一个白球,其可能性是 $(N-M)^{n-r}$ 种,所以抽出的 n 个球中恰有 r 个红球这一事件 A 的可能性有 $C_n^rM^r(N-M)^{n-r}$ 种,从而 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{1}{N^n}C_n^rM^r(N-M)^{n-r}=C_n^rp^r(1-p)^{n-r} \quad (4.42)$$

如果把从一个袋子里抽得一只红球算做一次胜利,抽得白球算做一次失败,则每次失败的概率为 $1-p$,令 $q=1-p$,每次成功的概率为 p,(4.42)可改写成

$$P(A)=C_n^r\,p^rq^{\,n-r} \quad (4.43)$$

真是巧得很,$P(A)$ 恰为 $(q+p)^n$ 展开式的第 $r+1$ 项,所以(4.43)表达的概率也称为"二项概率"。

回到开始的两个具体问题。六次掷骰子出了三次"六个点儿",$p=\frac{1}{6}$,$n=6$,$r=3$,代入二项概率公式(4.42)得

$$C_6^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^3=20\times125\div46656\approx0.054$$

即连掷六次得三次六个点儿的概率是0.054。

生产八个零件七个合格的那个问题中，$n=8$，$r=7$，$p=0.8$，代入公式(4.43)得

$$C_8^7(0.8)^7(0.2)^1 = 8\times(0.8)^7\times 0.2$$
$$\approx 8\times 0.21\times 0.2 = 0.336$$

即连产八个零件有七个合格的概率是0.336，这种可能性并不大！可见合格率低于80%是不能令人满意的。

《汉书·高帝纪》上记载了刘邦的话曰："夫运筹帷幄之中，决胜千里之外，吾不如子房。"子房者，即张子房，又名张良。刘邦出身草莽，个人成分流氓，他起兵夺天下，靠的是张良等人出谋划策，确定取胜的战略战术。当然常胜将军并不是仗仗皆胜，只要胜多败少，每次参战取胜的概率大于八成就算是常胜将军了。在现实社会当中，人们在拼搏，在抗争，办事之前必须要对成功与失败的机会的大小有一个估算，不能指望什么事都是"零风险"的，一般而言失败的概率总会大于零，只求其足够小就是了，概率方法提供了我们估算成败可能性大小的数学方法，是一种十分中用十分有趣的数学分支。

常言道，抓住机遇，成自险出，工于计算，胸有成竹。

4.16 摔碎的砝码还能用吗

1624年，法国数学家德·梅齐里亚克(Meziriac，1581～1638)提出并解决了下面的砝码问题：

一位商人有一个40磅(1磅=0.453千克)的砝码，跌落在地摔成四块，称得每块都是整磅数，且可以用它来称1磅到40磅的任何整磅重物，问这四块砝码碎块各重几何？

天平的砝码盘只能放一些砝码，而称重盘上可以重物砝码混放。例如可以用两磅与三磅的两块砝码称出一磅的重物，为此只需把三

磅砝码放在砝码盘上，把重物与两磅砝码放在称重盘上，如果天平平衡，则知重物是一磅。

如果用一个砝码组 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，恰当地放入两个盘上一些砝码，可以称出从 1 到 n 的所有整磅数重物，今再取一新砝码 $p_{k+1} = 2n+1$ 磅，则用 $p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k+1}$ 可以称出从 1 磅到 $3n+1$ 磅的所有重物。

事实上，若重物不超过 n 磅，则用 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 去称即可；若重物从 $n+1$ 磅到 $2n+1$ 磅，先把 $p_{k+1}=2n+1$ 磅放在砝码盘上，把重物放在称重盘上，这时重物已抵消 p_{k+1} 上的一部分分量 w，w 为物重，p_{k+1} 的另一部分分量 $2n+1-w \in \{0,1,2,\cdots,n\}$，把这部分视为 $2n+1-w$ 磅的重物，可通过 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的适当摆放而使天平平衡；若重物从 $2n+2$ 磅到 $3n+1$ 磅，则把 p_{k+1} 放入砝码盘之后，抵消了重物 $2n+1$ 磅的重量，重物还剩 w' 磅重，$w' \in \{1,2,\cdots,n\}$，w' 可以通过适当摆放 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 而被抵消，使天平平衡。

取 $p_1=1$ 磅，由以上事实，取 $p_2=2+1=3$，则用 1 磅与 3 磅的两个砝码可称出从 1 磅到 4 磅的所有整磅重物；再取 $p_3=2\times4+1=9$ 磅，可以用 p_1, p_2, p_3 称出从 1 到 $3\times4+1=13$ 磅的所有整磅重物；取 $p_4=2\times13+1=27$ 磅，用 p_1, p_2, p_3, p_4 可以称出从 1 到 $3\times13+1=40$ 磅的所有整磅重物。

至此知若这四块砝码碎块分别重 1 磅，3 磅，9 磅和 27 磅，则可以用它们称出从 1 磅到 40 磅的所有整磅重物。

4.17 排队打水

十人各提一只水桶到水龙头前打水，已知注满第 i($i=1,2,\cdots,10$)个人提的水桶需要 T_i 分钟，T_i 各不相同，问：

①只有一个水龙头时，应如何安排十人的接水顺序，使他们总的

花费时间(含接水时间)最少？这个时间是多少分钟？

②当有两个水龙头可用时，应如何安排这十人接水，使他们的总的花费时间最少？这个时间是多少分钟？

众所周知，如果只有一个龙头，把注满水需要的时间很长的那只桶排在前边，在它后面的人等待的时间之和会很大，可见应按所需时间由小到大来排序，不妨设 $T_1<T_2<T_3<\cdots<T_{10}$，则接水顺序应为①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩，其中ⓘ是第 i 人；花费的总时间的最少值为

$$\begin{aligned}T_0 &= T_1+(T_1+T_2)+(T_1+T_2+T_3)+\cdots\\&\quad+(T_1+T_2+\cdots+T_{10})\\&=10T_1+9T_2+8T_3+7T_4+6T_5+5T_6+4T_7+\\&\quad 3T_8+2T_9+T_{10}\end{aligned}$$

事实上，如果不按此顺序接水，而是按另一顺序 $(i_1)(i_2)(i_3)(i_4)(i_5)(i_6)(i_7)(i_8)(i_9)(i_{10})$ 来接水，其中 $i_j(j=1,2,\cdots,10)\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$i_j$ 各不相同。这样，总的花费时间为

$$T'_o = T_{i_1}+(T_{i_1}+T_{i_2})+\cdots+(T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots+T_{i_{10}})$$

而且

$$T_{i_1}\geqslant T_1$$

$$T_{i_1}+T_{i_2}\geqslant T_1+T_2$$

……

$$T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots+T_{i_9}\geqslant T_1+T_2+\cdots+T_9$$

$$T_{i_1}+T_{i_2}+\cdots+T_{i_{10}}\geqslant T_1+T_2+\cdots+T_{10}$$

可见 $T'_0\geqslant T_0$，证明①②③…⑩为序总花费时间最少。

当有两个龙头可用时，不妨设分配 $5+l$ 个水桶在Ⅰ号龙头接水，$5-l$ 个水桶在Ⅱ号龙头接水，$5>l\geqslant0$。设Ⅰ号龙头的排队为

$$i_1, i_2, \cdots, i_{5+l}$$

Ⅱ号龙头的排队为

$$j_1, j_2, \cdots, j_{5-l}$$

则在Ⅰ号与Ⅱ号龙头接水的人总时间消耗分别为

$$T_{o_1} = T_{i_1} + (T_{i_1} + T_{i_2}) + \cdots + (T_{i_1} + T_{i_2} + \cdots + T_{i_{5+l}}),$$

$$T_{o_2} = T_{j_1} + (T_{j_1} + T_{j_2}) + \cdots + (T_{j_1} + T_{j_2} + \cdots + T_{j_{5-l}})$$

10 人的总时间消耗为

$$\begin{aligned} T_{o_1} + T_{o_2} = {} & T_{i_1} + (T_{i_1} + T_{i_2}) + \cdots + (T_{i_1} + T_{i_2} + \cdots + T_{i_{5+l}}) + T_{j_1} + \\ & (T_{j_1} + T_{j_2}) + \cdots + (T_{j_1} + T_{j_2} + \cdots + T_{j_{5-l}}) \geqslant (T_1 + T_2 + \\ & \cdots + T_{10}) + (T_1 + T_2 + \cdots + T_8) + \cdots + (T_1 + T_2) \\ & = 5(T_1 + T_2) + 4(T_3 + T_4) + 3(T_5 + T_6) \\ & \quad + 2(T_7 + T_8) + (T_9 + T_{10}) \end{aligned}$$

可见如下分配与排队最省总耗时

Ⅰ:①③⑤⑦⑨

Ⅱ:②④⑥⑧⑩

①与②,③与④,⑤与⑥,⑦与⑧,⑨与⑩可对调。

从事理上讲,令接受服务快者先接受服务是合理安排。例如,运输公司有两辆汽车都出了毛病,需要停运检修,一辆只是轮胎漏气,一辆则是发动机需要换汽缸。显然应该让补(换)轮胎的那辆车先修好,早点投入运营,否则因给第二辆车换汽缸,使得第一辆车等了好长时间,而使公司减少了运营时间,使得总收益减少。

下面讲一个更为有趣和有用的所谓工序问题。

有 14 件工件等待在一台机床上加工,某些工件的加工必须安排在另一些工件完工后才能开始,第 j 件工件加工时间 t_j 及先期必须完工的工件号 i 由下表给出

工件号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
t_j	20	28	25	16	42	12	32	10	24	20	40	24	36	16
前期 工件 号码	3 4	5 7 8	5 9		10 11	3 8 9	4	3 5 7	4		4 7	6 7 14	5 12	1 2 6

若给出一个加工顺序,则确定了每个工件的完工时间(加工与等待两种时间之和),试设计一个满足条件的加工顺序,使各个工件完工时间之和最小。

若 i 号工件是 j 号工件的先期工序,则画成示意图形ⓘ⟶ⓙ,且约定ⓘ与ⓙ之间相距为 1。由题中工件间的先后关系,画出图 4-23。

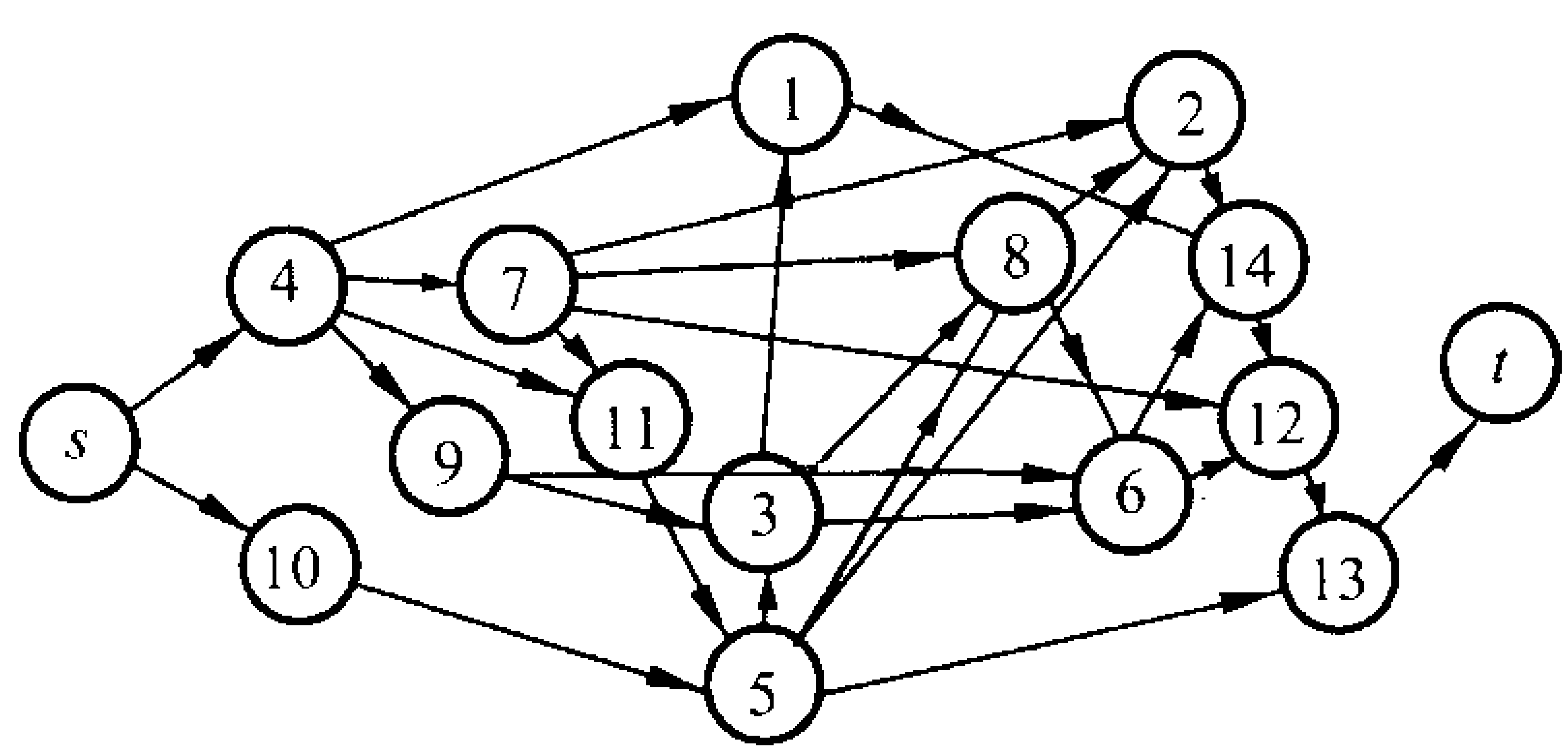


图 4-23

ⓢ表示开工,ⓣ表示完工。我们找到了一条从ⓢ到ⓣ的有向道路

$$ⓢ④⑦⑪⑤③⑧②⑭⑫⑬ⓣ \qquad (4.44)$$

在此"道路"上,工件的加工先后次序不会改变了,但尚有 1, 6, 9, 10 号工件未在此队列之中,应当把这四个工件插到(4.44)式中适当位置。使得每个工件都在队列之内,而且满足工件加工时的工序要求和使得各工件完工时间之和最少。为此,把(4.44)式"切开"成两段

$$p_1 = ⓢ④⑦⑪⑤,\ p_2 = ③⑧②⑭⑫⑬ⓣ$$

从图 4-23 看到,⑩在⑤之前,⑨在③之前④之后,故⑨与⑩应插入

p_1;而①与⑥在③之后⑭之前,故①与⑥应插入 p_2。

由于序列 $t_4, t_{10}, t_9, t_7, t_{11}, t_5 = 16, 20, 24, 32, 40, 42$,它是递升数列,所以为了使得等待时间之和最少,唯一的安排为 $p'_1 =$ ⓢ④⑩⑨⑦⑪⑤。

从图 4-23 中删去ⓢ,④,⑩,⑨,⑦,⑪,⑤,得图 4-24。⑥在⑧之后⑭之前,①在③之后⑭之前,而数列 $t_8, t_6, t_1, t_2 = 10, 12, 20, 28$,它是单调递增数列,所以①与⑥插入 p_2 的唯一方案是

$p_2' =$ ③⑧⑥①②⑭⑫⑬

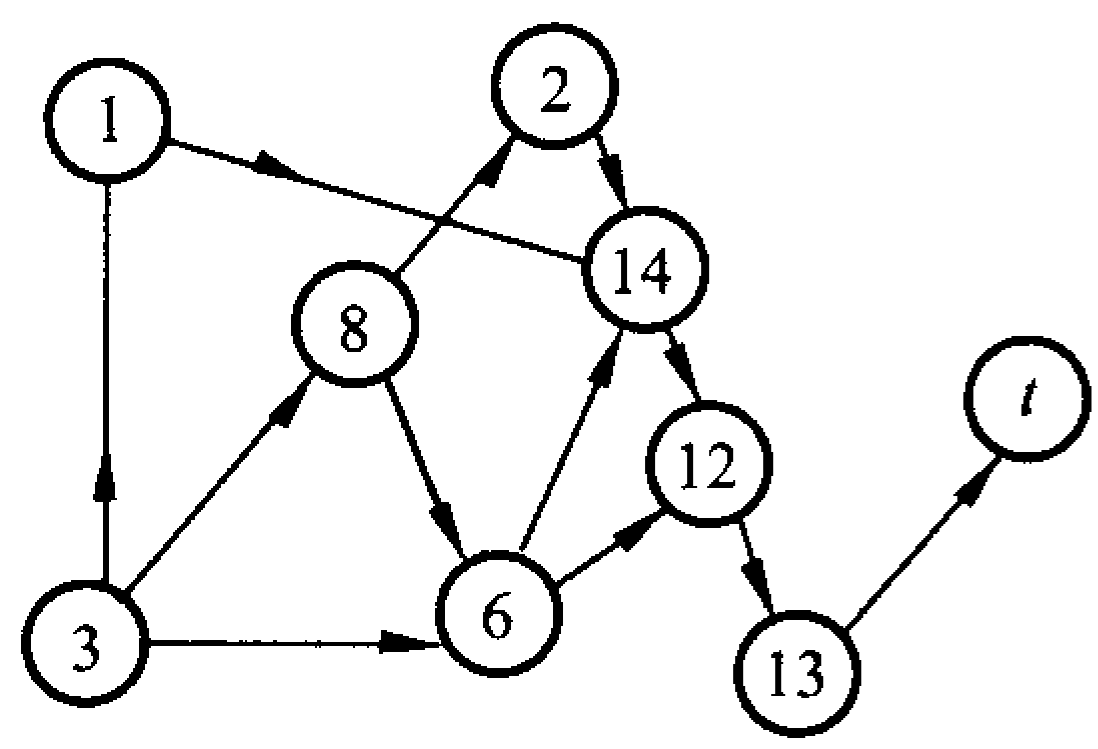


图 4-24

把 p_1' 与 p_2' 拼起来得到要求的加工顺序如下

④⑩⑨⑦⑪⑤③⑧⑥①②⑭⑫⑬

如果工件加工是彼此独立的,即不要求先期工序,则只需把各工件的加工时间从小到大排列,相应的工件号码序列即为加工顺序。

4.18 不患寡而患不均

一群小孩围坐一圈分糖果,老师让他们每人先从糖罐中任取偶数块,再按下述规则调整:每人同时把自己手中的糖果分一半给自己右侧的小朋友,糖果的个数变成奇数的小孩向老师补要一块,经过有限次调整,大家的糖果是否可以变得一样多?

设某次调整前,糖果最多的人有 $2m$ 块糖果,最少者有 $2n$ 块糖果,$m > n$,那么调整后造成的结果是:

①每人的糖果数仍在 $2m$ 与 $2n$ 之间。

事实上,设调整前一孩子有糖果 $2k$ 块,而他的左邻的孩子有糖果 $2h$ 块,因 $n \leqslant h \leqslant m$,$n \leqslant k \leqslant m$,调整后这孩子的糖果数变成 $k +$

h，且 $2n\leqslant k+h\leqslant 2m$；当 $k+h$ 是奇数时，补一块变成 $k+h+1$ 块，仍有 $2n\leqslant k+h+1\leqslant 2m$。

②原有 $2n$ 块以上糖果的人，调整后仍超过 $2n$。

事实上，若调整前一孩子有糖果 $2k$ 块，而他的左邻孩子有糖果 $2h$ 块，又 $k>n$，即他原有的糖果超过 $2n$ 块，调整后这孩子的糖数至少 $k+h$ 块，又 $h\geqslant n$，故 $k+h>2n$。

③至少有一位原来 $2n$ 块糖果的孩子，调整后至少增加两块。

事实上，至少有一个孩子，其左邻有 $2k>2n$ 块糖果，调整后这孩子拿着 $n+k>2n$ 块糖果，若 $n+k$ 为奇数，则变成 $n+k+1$ 块，所以调整后比 $2n$ 至少多 2。

综上所述，①说调整后不会使最大值变大；②说调整后不会产生新的有 $2n$ 块糖果的孩子；③则说，每调整一次，就至少减少一位有 $2n$ 块糖的孩子。可见有限次调整后，每个孩子的糖果数都会超过 $2n$ 块，而最大值不增，即最多者与最小者的差在减少，而差额有限，所以有限次调整之后，最多者与最少者的差额就不存在了，大家的糖果数均等。

我们抓住最少糖块数的增加，逐次缩小与最大糖块数的差距实现每人糖块数目的均等，不能指望用逐次降低最多糖块的数目来实现均等，也就是说，应该提高穷人的生活水平，不能用“杀富济贫”的办法均贫富。事实上，有最多糖果的孩子拿出一半给他的右邻后，他还从其左邻得到了一些，如果是奇数，老师还会给他添一枚糖果，所以可能得失相抵，例如图 4-25 中有四个孩子，每次调整，最大值 6 始终不变，由于最小值调一次至少增加 2，其中有一块可能是老师添的，最后大家都有 6 块糖。

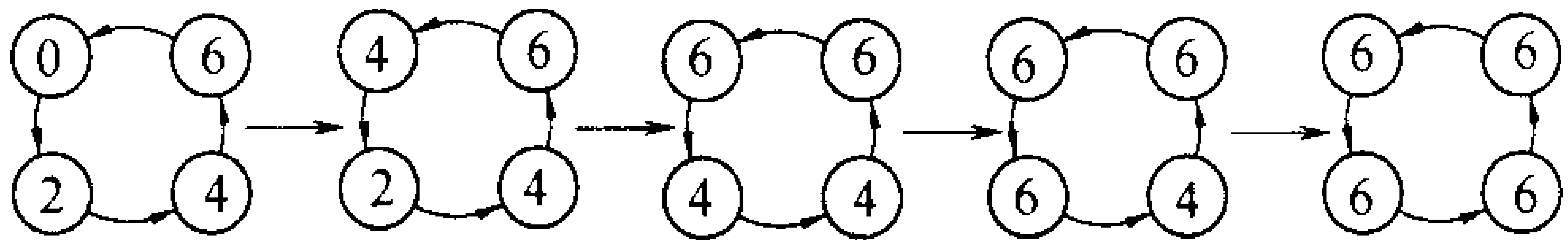


图 4-25

在社会变化与进步过程中，穷人不断变富，无知(例如文盲或科盲)人的知识不断增加，大家的社会地位与民主权利不断提高；在自然界中，最低温度会回升等等，最后达到社会公平或自然界的局部均衡。

4.19 核按钮的钥匙

某核大国的核武器发射按钮放在该国军事委员会的保险箱中；保险箱由 11 位常委共同管理控制；保险箱上加了若干把锁，钥匙分配给各位常委保管使用。最少应给保险箱装多少把锁，才能使任何六位常委同时在场时，能打开保险箱，而任何五位常委在场时则打不开保险箱？对于锁的把数最少的情形，怎样分钥匙，以符合上述要求？

设加 n 把锁可以满足上述要求，若 A 是锁集合，A_i 是第 i 位常委可以打开的锁的集合，于是任何子集 $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}\subset\{1,2,\cdots,11\}$

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup A_{i_3}\cup A_{i_4}\cup A_{i_5}\neq A \tag{4.45}$$

而任何集合 $\{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}\subset\{1,2,\cdots,11\}$

$$A_{j_1}\cup A_{j_2}\cup A_{j_3}\cup A_{j_4}\cup A_{j_5}\cup A_{j_6}=A \tag{4.46}$$

由(4.44)得

$$A_0=A-(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup A_{i_3}\cup A_{i_4}\cup A_{i_5})\neq\varnothing$$

设 $x_{i_1i_2i_3i_4i_5}\in A_0$，则 $x_{i_1i_2i_3i_4i_5}$ 是 i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 这 5 位常委打不开的一把锁。由(4.45)知，对任何 $j\notin\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$，$x_{i_1i_2i_3i_4i_5}\in A_j$。

设 $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ 与 $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ 是 $\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$ 的两个子集，且 $x_{i_1i_2i_3i_4i_5}=x_{k_1k_2k_3k_4k_5}$，则 $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}=\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$；事实上，若不如此，则存在 $t\in\{1,2,3,4,5\}$，使得 $i_t\notin\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$，这样 $x_{k_1k_2k_3k_4k_5}\in A_{i_t}$，但另一方面，$x_{i_1i_2i_3i_4i_5}\notin A_{i_t}$ 矛盾。

至此我们知道 $\{1,2,3,\cdots,11\}$ 不同的五元素子集对应不同的锁，

即 $n=\binom{11}{5}=462$。

下面证明，把保险箱加上 462 把锁，则我们可以按要求向各常委分发钥匙。我们把 462 把锁与 $\{1,2,\cdots,11\}$ 的五元素子集建立一一对应关系，把与 $\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}\subset\{1,2,\cdots,11\}$ 对应的那把锁的钥匙只分给其号码异于 i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 的常委每人一把，这样，对任何五位常委 i_1,i_2,i_3,i_4,i_5，他们都打不开与 $\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}$ 对应的那把锁。

下面证明，任何六位常委在场，则可打开全部 462 把锁。事实上，设六位常委标号为 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6，任取一把锁，它与 $\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}$ 对应，按上述钥匙分配规则，由于存在一个 j_k，$k\in\{1,2,3,4,5,6\}$，使 $j_k\notin\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}$，故 j_k 号常委有这把锁的钥匙，可以打开它。由此锁的任意性，可知任六位常委在场可以打开任何一把锁。

我们的结论是：锁的个数之最小值是 462，且分钥匙的方法是，先把每把锁用 $\{1,2,3,\cdots,11\}$ 的一个五元子集来标志，标志 $\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5\}$ 的锁的钥匙不发给 i_1,i_2,i_3,i_4,i_5 这五位常委，但发给其他六位常委每人一把。

上面的数据 11，6，5 可以改成 $n,m,m-1,n>m$。例如核按钮箱上最少装几把锁，才能使五位常委中任两位不能动用核武器，而任三位常委同意使用核武器时，则可以启动核发射按钮。这时，按钮箱安装 $C_5^2=10$ 把锁，把这 10 把锁分别编号为

$$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3)$$
$$(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)$$

常委编号分别为 1，2，3，4，5。每人发六把钥匙，(l,k)锁的钥匙不发给 l 常委和 k 常委，其他常委每人一把，$1\leqslant l<k\leqslant 5$。例如锁(1，2)的钥匙不发给 1 常委与 2 常委，但 3，4，5 三位常委每人一把。

5 混沌篇

巴西一只蝴蝶拍打翅膀，能够在美国得克萨斯州引发一场龙卷风吗？

——洛伦兹

5.1 面包师抻面与砍头映射

一位面包师把水分不太均匀的湿面团揉成长一尺的一根面条(圆柱)，把它均匀拉长成两尺长，从中点切断，把右半段拿起来平行左移，使其与左半段重合，这时进行第二回合的拉伸与重叠，即把重合后的一尺长的面条向右拉伸成两尺长，从中点切开，把右半段平行左移，使其与左半段重合，如此不断地反复操作，这样就能使面条各处湿度趋于一致，做成面点后香甜可口，为什么呢？其中隐藏着极其深刻复杂的数学道理。例如，我们将用数学推理证明随着拉伸与重叠的反复进行，会出下列现象：

①面条上某些点对本来距离十分近，极而言之，它们的距离小到任意指定的程度，但后来两者的距离又拉远到一个十分可观的程度。

②面条上有的点的位置周期性地变化，即每拉伸重叠一个固定的次数，这种点又回到原来的位置。这种点的个数有无穷个，在面条上这种点处处稠密。

③面条上存在这种点，随着拉伸重叠地进行，它可以移动到任意指定的点的任意近旁，这样，面条上的点可以彼此掺和而使面条各处

水分或碱分或糖分均匀。

下面我们建立上述抻面过程的数学模型，用数学手段严格证明上述结果①②③是真的。

把一尺长的面条放在 x 轴的[0,1]区间上，则上述拉伸重叠过程的数学模型是[0,1]到自己的映射 σ 的反复进行

$$\sigma:[0,1]\to[0,1],\sigma(x)=\begin{cases}2x,\ 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 2x-1,\ \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\tag{5.1}$$

盯住[0,1]上的一个点 x_0，跟踪 x_0 在每次拉伸重叠后的落点

$$x_1=\sigma(x_0),x_2=\sigma(x_1),\cdots,x_n=\sigma(x_{n-1}),\cdots\tag{5.2}$$

x_0 是初始点；把 σ 视为运动，则

$$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

是一串“脚印”，称为 σ 的轨道。

x_1 被 x_0 唯一确定，x_2 被 x_1 唯一确定，也就是被 x_0 唯一确定，即 $x_2=\sigma(\sigma(x_0))$，x_n 被 x_{n-1} 唯一确定，即 $x_n=\sigma^n(x_0)$，…，所以 σ 的轨道是一个确定系统，其中似乎没有什么事是不确定的；但是，始料不及的是，就是如此简单的一个确定性系统，却隐藏着内在随机性造成的极为复杂的不确定性！ 为了揭示这种不确定性，我们用二进制来表达[0,1]中的数。

任取 $x_0\in[0,1]$，在二进制中可写成

$$\begin{aligned}x_0&=a_1\frac{1}{2}+a_2\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\frac{1}{2^n}+\cdots\\&=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\end{aligned}$$

其中 $a_i\in\{0,1\}$，$i=1,2,\cdots$于是

$$2x_0=a_1+a_2\frac{1}{2}+\cdots+a_n\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

$a_1=1$ 时, $x_0\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $a_1=0$ 时, $x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 所以

$a_1=0$ 时,

$$\sigma(x_0)=2x_0=a_2\frac{1}{2}+a_3\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=0.a_2a_3\cdots a_{n-1}\cdots$$

$a_1=1$ 时,

$$x_0\in\left[\frac{1}{2},1\right],\sigma(x_0)=2x_0-1=\left(1+a_2\frac{1}{2}+\cdots+a_n\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)-1=a_2\frac{1}{2}+a_3\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=0.a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

总之,当 $x_0\in[0,1]$时

$$\sigma(x_0)=0.a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

σ 的动作是把x_0 中的小数点后第一位数字删除,即把 x_0 的小数点后头位数字砍掉,故称 σ 为“砍头映射”或移位映射,移位指小数点向右移一位,且把小数点前的非零数字变成零。历史上是伯努利(Bernoulli)首先研究这一函数,所以也称 σ 为伯努利移位映射。

伯努利家族在科学史上占有重要地位,祖籍瑞士的伯努利家族中出了三位世界级顶尖数学家,他们是雅可布·伯努利(Jakob Bernoulli, 1654~1705)和雅可布的胞弟约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667~1748),约翰之子丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli, 1700~1782)。他们又养育了在许多科学领域中崭露头角的成群后

代，其中八人是数学家。

雅可布·伯努利在父亲的逼迫之下学习神学，他却偷偷自学牛顿与莱布尼茨的微积分，33 岁就在高等数学上成就斐然，被聘为巴塞尔大学的数学教授，成为当时微积分与概率论方面的权威之一。

约翰·伯努利开始也错选了专业，首先学医，并获巴塞耳大学医学博士学位，论文内容是关于人体肌肉收缩问题的研究成果；毕业后也爱上了微积分，解决了微分方程和力学上的很多难题，28 岁出任格罗宁根大学数学物理教授，其兄雅可布去世后，继任巴塞耳大学数学教授。

约翰之子丹尼尔起初也像其父一样，选择了医学专业，毕业论文是关于肺的生理功能的内容，毕业后也是转攻他的天分所长的数理科学，1733 年，回巴塞耳大学任物理学、植物学和解剖学教授。此前是彼得堡大学的数学教授。作有传世名著《流体动力学》，并在微积分、概率论、微分方程和物理学等诸多学科发表大量著作和论文，获法兰西科学院 10 项大奖，因解决速降线问题时，丹尼尔的解法比牛顿、莱布尼茨和他父亲约翰，伯父雅可布的解法都漂亮，甚至引起了其父的嫉妒和体罚。

所谓速降线，是指一枚串珠不受阻力地沿着穿着它的线从一点 A 滑到另一点 B，问两点间的穿线应取何种形状，才使串珠的滑行时间最少？其中 A，B 两点在水平面的垂面内。

对此有兴趣的读者可参阅《微分方程模型与混沌》（王树禾，中国科学技术大学出版社，1999）。

5.2 混沌礼赞

让我们在此对确定系统中的混沌表现唱一首赞歌：

混沌礼赞

春风传递千万户，
紫燕归来巢连巢，
丝毫之差谬万里，
聚散有法岂可预！

下面用数学方式对上述“混沌诗”进行严格地注释。

(1) 春风怎样传遍千家万户

取初始值 x_0 如下

$x_0 = 0.0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101,$
$110, 111, 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110,$
$0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111,$
$\cdots$

这个 x_0 犹如一股春风的源头，x_0 的结构特点是按所谓“字典序”抄出的，在小数点后首先依次抄出 0 与 1；接着抄两遍 0，1，得 0，1，0，1，且把这四个数字的前面两个“加 0 头”，后面两个“加 1 头”，得 00，01，10，11；继而把 00，01，10，11 抄两遍，得 00，01，10，11，00，01，10，11，且把前面的四个数码××“加 0 头”变成“0××”，后面的四个数码××“加 1 头”变成“1××”，于是 x_0 又加长了一段 000，001，010，011，100，101，110，111，依此类推；于是任意指定的 0～1 数串 $a_1a_2\cdots a_m$，这个数串在 x_0 中出现无穷次。

对于任取定的一个点 $x_1\in[0,1]$和任意取定的自然数 m，设

$$x_1 = 0.b_1b_2\cdots b_m\cdots$$

则

$$x_0 = 0.\cdots \underbrace{b_1b_2\cdots b_m}\cdots \underbrace{b_1b_2\cdots b_m}\cdots \underbrace{b_1b_2\cdots b_m}\cdots$$

其中 b_1 依次出现在小数点后第 n_1+1 位，n_2+1 位，$\cdots$，于是

$$\sigma^{n_i}(x_0) = 0.b_1b_2\cdots b_m\cdots$$

$$|\sigma^{n_i}(x_0)-x_1|\leqslant\frac{1}{2^m}, i=1,2,\cdots$$

由 m 的任意性，当 $m\gg1$ 时，$\sigma^{n_i}(x_0)$ 与 x_1 的距离可以任意小。又 x_1 是任取的，所以轨道

$$\sigma(x_0),\sigma^2(x_0),\cdots,\sigma^n(x_0),\cdots$$

可以无穷次无限接近每个点 $x\in[0,1]$。即轨道上的动点无穷次访问[0,1]上的每个点，数学上称这种现象为遍历性或称拓扑传递性。这恰可形象地说成“春风传递千万户”，反映轨道上的动点无穷次与[0,1]上每一点亲疏聚散。但动点下一步走向何处是由映射 σ 的砍头规则确定的，所以诗中有“聚散有法”之说。

(2) 紫燕归来何以能够巢连巢

若映射 $f: X\to X$，且 $x\in X$，使得 $f^k(x)=x$，而 $f^m(x)\neq x, m=1,2,\cdots,k-1$，则称 k 是 f 的周期，x 是 f 的 k 周期点；1 周期点又称不动点，即 $f(x)=x$ 的点 x；周期点的集合记成 $\mathrm{Per}(f)$。

燕子春天归来，秋后离去，第二年春天又归来，燕子的归来是周期性的，就如 f 的周期点。

由于 $\sigma(0)=0,\sigma(1)=1$，所以 $x=0$ 与 $x=1$ 是 σ 的两个不动点。而二进制表示中循环节长为 k 的循环小数为 σ 的 k 周期点，可见 σ 有无穷多周期点，而且每个自然数都是 σ 的周期。

混沌中亦存在着有序，周期点的周期运动就是其有序性之一。

任取定一点 $x_1=0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots\in(0,1)$，取 σ 的周期点 $x_0=0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_n$，当 $n\gg1$ 时，$|x_0-x_1|\ll1$，所以[0,1]上任一点 x_1 的近旁都有 σ 的周期点，即 σ 的周期点在[0,1]上处处稠密；这就是诗中所云“紫燕归来巢连巢”的含义，紫燕之巢比喻 σ 的周期点，“巢连巢”是说周期点处处稠密。

(3) 差之丝毫当真会谬之千里

取两个相距极近的初值

$$x_0 = 0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

$$x_0' = 0.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}'a_{n+2}\cdots$$

其中 $a_{n+1} \neq a'_{n+1}$，a_i，a_i' 是{0, 1}中元素，于是 $|x_0 - x_0'| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$，当 $n \gg 1$ 时，这两个初值之差是极微小的，但 n 次迭代之后

$$x_n = \sigma^n(x_0) = 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

$$x_n' = \sigma^n(x_0') = 0.a_{n+1}'a_{n+2}\cdots$$

$|x_n - x_n'| = \frac{1}{2}$，即初值相差仅 $\frac{1}{2^{n+1}}$ 时，x_n 与 x_n' 可以产生明显差别。这种现象不正是诗中所言"丝毫之差谬万里"吗？这种表现数学上称为对初值的敏感依赖性，称有这种性质的映射为混沌映射。如果欲对这种映射的轨道进行长期预报，即由初值来判断第 n 步($n \gg 1$)的值是要失败的。事实上，初值是通过观测得到的，不可避免地要有微小的误差，由于混沌映射对这微小的误差有敏感性，于是预报值与真值可能相差十万八千里！这也正是诗中所云"聚散有法岂可预"一句中不可预报的含义。

数学上把具有对初值敏感依赖、有拓扑传递性轨道和周期点稠密的映射称为混沌，也称紊动或迪万尼(Devaney)意义下的混沌。

通过上述论证知，(1)砍头映射中提到的抻面将出现的①②③三个后果已被证实是真的。

(4) σ 映射掷硬币般随机

我们约定用掷硬币如下地抄出一个[0, 1]中的数；掷出的是正面则抄 1，掷出的是反面则抄 0，这样无穷地掷下去，同时无穷地抄下去，则会抄出[0, 1]中的一个二进制小数的小数点后的数码串。掷硬币的过程中，到某一次之后，再掷则永远出现"反面"，这就抄出一个有尽小数；但这种可能性几乎不存在，或者说其概率为零，掷硬币的

过程中，到某一次之后正反面序列出现周期性，即抄出一个循环小数的可能性也是几乎不存在的；可以认为用这种掷硬币的随机过程抄出的是无理数 x_0。于是用 x_0 为初值制成的轨道

$$x_0, x_1 = \sigma(x_0), x_2 = \sigma(x_1), \cdots, x_n = \sigma(x_{n-1}), \cdots$$

犹如掷硬币一样地随机。

我们知道[0,1]中的无理数是不可数的，而有理数可数，所以从[0,1]中任意取定一个数 x_0 为 σ 的初值，x_0 为无理数的可能几乎是100%，而每个无理小数皆可视为随机掷币的结果，可见对几乎每一个初值 x_0，σ 都有像掷币似的随机性，由此可知 σ 这种混沌映射有内在随机性，进而就谈不到对 σ 的轨道进行预报了。

无理数是 σ 混沌表现的根源之一，在有理数域，σ 的轨道从某一步开始会呈现周期性变化，如果是有尽小数，从某一步开始干脆永远是零，这时无混沌可言。说到这里，又使我们回想起第一次数学危机，回想起先辈希帕索斯的功劳，若不是引入了无理数，我们这个丰富多彩、纷纭复杂的本来就是混沌的世界就难以数学地加以严格研讨了。从这样的意义上来讲，我们但愿多来几次数学危机，随着危机的排除，我们对数学，进而对宇宙万物的认识会更加深入。数学理论，例如关于无理数的理论，关于混沌的理论，对人类的世界观的层次之提升，实在是起着举足轻重的作用。

5.3 北京拉面的数学模型

我们大都品尝过拉面面条，这种风味食品我国各地都有，例如北京拉面、兰州拉面、乐亭拉面等。厨师把一根一定长度的精制面粉的面团均匀拉长成原来的两倍，再把右手的一端交给左手，右手抓住中点，再拉长成两倍长，如此反复进行下去，直到把面条拉得十分细软，煮熟后再加入鸡汤或牛肉汤等，吃起来十分可口。1998 年，中国中央

电视台曲艺杂坛节目播出一位高级厨师的拉面绝活儿，这位师傅拉伸了 50 多个回合，把一根面柱拉伸成原来粗细的$\frac{1}{2^{50}}$以下，比头发还要细，创立了吉尼斯世界纪录。

自然界物质的运动，人类社会人群的活动，如果局限在一个有限的范围内发展变化，免不了扩张拉伸，同时由于有一个限制，也免不了发生折叠，下面我们以北京拉面这种实际模型来模拟拉伸折叠现象，建立它的数学模型，且分析其中的混沌表现。值得提醒的是北京拉面并不是随机过程，而是一种简单规则支配之下的确定性过程。它的数学模型是[0, 1]到自身的映射 Λ 的迭代：

$$\Lambda : y = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

(5.3)式的图像像一个三角帐篷，见图 5-1，故称 Λ 为三角帐篷映射。

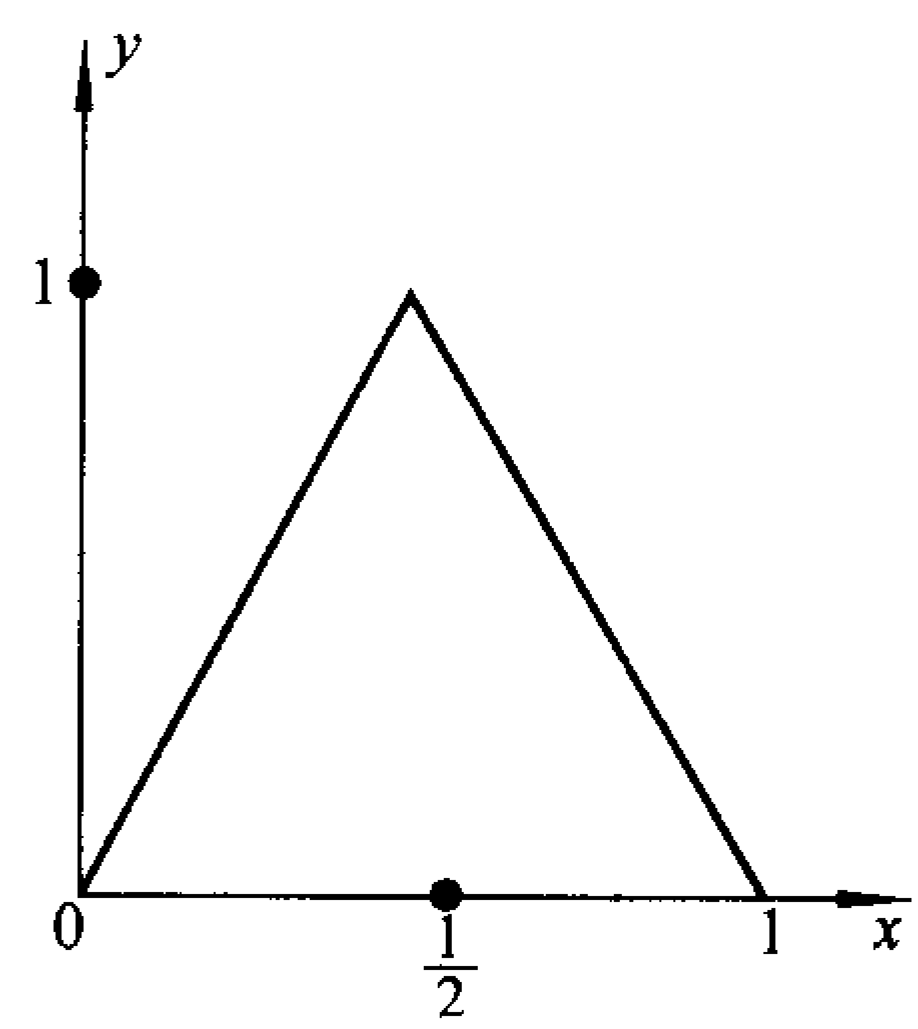


图 5-1

在二进制表达式中，(5.3)式的迭代为

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leqslant x_n < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x_n, & \frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1 \end{cases}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

我们看到，$0 \leqslant x_n < \frac{1}{2}$时，这就是砍头映射 σ 的迭代。当$\frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1$时，在二进制当中

$$x_n = 0.1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

$$x_{n+1} = \Lambda(x_n) = 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\cdots\bar{a}_n\cdots \tag{5.4}$$

其中 $\bar{a}_i$ 是a_i 的"补"，即 $a_i + \bar{a}_i = 1$，$a_i, \bar{a}_i \in \{0, 1\}$，就是$a_i = 0$时，$\bar{a}_i = 1$，$a_i = 1$ 时，$\bar{a}_i = 0$。

事实上，由于 $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$，所以

$$x_n = \frac{1}{2} + a_2\frac{1}{2^2} + a_3\frac{1}{2^3} + \cdots + a_n\frac{1}{2^n} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
2 - 2x_n &= 2 - 2\left(\frac{1}{2} + a_2\frac{1}{2^2} + a_3\frac{1}{2^3} + \cdots + a_n\frac{1}{2^n} + \cdots\right) \\
&= 1 - \left(a_2\frac{1}{2} + a_3\frac{1}{2^2} + \cdots + a_n\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots\right) \\
&\quad - \left(a_2\frac{1}{2} + a_3\frac{1}{2^2} + \cdots + a_n\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots\right) \\
&= (1 - a_2)\frac{1}{2} + (1 - a_3)\frac{1}{2^2} + \cdots \\
&\quad + (1 - a_n)\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \\
&= 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\cdots\bar{a}_n\cdots
\end{aligned}$$

上面的推导告知，当 $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$时，$\Lambda(x_n)$的动作是下列两个步骤的实施：

①把小数点后第一个数字删去(砍头)。

②把小数点后的数字都变成其补数，即 0 变成 1，1 变成 0。

5.4 三角帐篷中的混沌

三角帐篷映射 Λ 也有"混沌礼赞"中所称的与砍头映射相似的混沌表现。只是其数学论证的细节上有所区别而已。为了借助砍头映射来讨论三角账篷映射，先证明 Λ 与 σ 的一个重要关系式

$$\Lambda^n(x) = \Lambda\sigma^{n-1}(x), x \in [0,1] \tag{5.5}$$

下面用数学归纳法来证明公式(5.5)。

$n=1$ 时，(5.5)式左端为 $\Lambda(x)$，右端为 $\Lambda\sigma^0(x)$，σ^0 表示恒同映射，即 $\sigma^0(x)=x$，所以左=右，(5.5)对 $n=1$ 成立。$n=2$ 时(此处在归纳法起步时要考虑 $n=2$，不然，仅考虑 $n=1$，则对任何映射 f 与 φ，只要它们都是从[0,1]到[0,1]的映射，则都有 $f(x)=f\varphi^0(x)=f(x)$，即对任何 f 与 φ，对于(5.5)的归纳法起步都能成功)，我们欲证 $\Lambda^2(x)=\Lambda\sigma(x)$。

设 $x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，则

$$\Lambda\sigma(x) = \Lambda(0.a_2a_3\cdots a_n\cdots) = \begin{cases} 0.a_3a_4\cdots a_n\cdots, & a_2 = 0 \\ 0.\bar{a}_3\bar{a}_4\cdots\bar{a}_n\cdots, & a_2 = 1 \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0.a_2a_3\cdots a_n\cdots, & a_1 = 0 \\ 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\cdots\bar{a}_n\cdots, & a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Lambda^2(x) = \Lambda(\Lambda(x)) = \begin{cases} 0.a_3a_4\cdots a_n\cdots, & a_1 = 0, a_2 = 0 \\ 0.\bar{a}_3\bar{a}_4\cdots\bar{a}_n\cdots, & a_1 = 0, a_2 = 1 \\ 0.\bar{a}_3\bar{a}_4\cdots\bar{a}_n\cdots, & a_1 = 1, a_2 = 1 \\ 0.a_3a_4\cdots a_n\cdots, & a_1 = 1, a_2 = 0 \end{cases}$$

总之

$$\Lambda^2(x) = \begin{cases} 0.a_3a_4\cdots a_n\cdots, & a_2 = 0 \\ 0.\bar{a}_3\bar{a}_4\cdots\bar{a}_n\cdots, & a_2 = 1 \end{cases} \tag{5.7}$$

至此看到(5.6)=(5.7)，即 $\Lambda\sigma(x)=\Lambda^2(x)$，归纳法起步完成。

假设 $\Lambda\sigma^{n-2}(x)=\Lambda^{n-1}(x)(n\geqslant 2)$ 已成立，往证 $\Lambda\sigma^{n-1}(x)=\Lambda^n(x)$。

由于 $\Lambda\sigma^{n-1}(x)=(\Lambda\sigma^{n-2})\sigma(x)$，由归纳法假设，

$$\Lambda\sigma^{n-2}=\Lambda^{n-1} \tag{5.8}$$

所以

$$\Lambda\sigma^{n-1}(x)=(\Lambda^{n-1})\sigma(x)=\Lambda^{n-2}\Lambda\sigma(x) \tag{5.9}$$

由归纳法起步，$\Lambda\sigma(x)=\Lambda^2(x)$，代入(5.9)得

$$\Lambda\sigma^{n-1}(x)=\Lambda^{n-2}\Lambda^2(x)=\Lambda^n(x),$$

证毕。

我们称对初值的敏感依赖性、遍历性(或称拓扑传递性)与周期点的处处稠密性为混沌的三要素；具有混沌三要素的映射称为混沌。下面推导 Λ 是混沌映射。

(1) Λ 对初值敏感依赖

考虑两个距离特别近的初值

$$x_0=0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

$$x_0'=0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0a_{n+1}'a_{n+2}\cdots,\ a_i,\ a_i'\in\{0,1\}$$

其中 $a_{n+1}\neq a_{n+1}'$，于是

$$\Lambda^n(x_0)=\Lambda\sigma^{n-1}(x_0)=\Lambda(0.0a_{n+1}a_{n+2}\cdots)$$

$$=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

$$\Lambda^n(x_0')=\Lambda\sigma^{n-1}(x_0')=\Lambda(0.0a_{n+1}'a_{n+2}\cdots)$$

$$=0.a_{n+1}'a_{n+2}\cdots$$

$$|\Lambda^n(x_0)-\Lambda^n(x_0')|=\frac{1}{2}$$

但 $|x_0-x_0'|=\frac{1}{2^{n+1}}$；即在初值 x_0 与 x_0' 靠得十分之近时，$\Lambda^n(x_0)$ 与 $\Lambda^n(x_0')$ 却相距 $\frac{1}{2}$ 之大！对于 Λ，我们也发现它具有差之丝毫谬之千

里的对初值微小变动的极端敏感的依赖性。

从混沌的观点看问题，可以理解为什么孩提时代的细小遭遇也许能决定他长大成人之后的功罪千秋！

(2)Λ 的遍历性

任取[0,1]上一点 $x_1=0.b_1b_2\cdots b_mb_{m+1}\cdots$，$m\gg1$，取 x_0 如同讨论5.2节 σ 时“春风怎样传遍千家万户”所取的那个 x_0，即

$$x_0=0.0100011011000\cdots$$

于是0～1数串 $0b_1b_2\cdots b_m$ 在 x_0 中无穷次出现

$$x_0=\underbrace{0.\cdots0b_1b_2\cdots b_m}\cdots\underbrace{0b_1b_2\cdots b_m}\cdots$$
$$\cdots\underbrace{0b_1b_2\cdots b_m}\cdots$$

其中 b_1 依次出现在小数点后第 n_1+2 位，n_2+2 位，…，于是

$$\begin{aligned}\Lambda^{n_i+1}(x_0)=\Lambda\sigma^{n_i}(x_0)&=\Lambda(0.0b_1b_2\cdots b_m\cdots)\\&=0.b_1b_2\cdots b_m\cdots\end{aligned}$$

即 $|\Lambda^{n_i+1}(x_0)-x_1|<\frac{1}{2^m}$，由 m 的任意性，$\Lambda^{n_i+1}(x_0)$ 与 x_1 可以任意接近。又 x_1 是[0,1]上的任意一点，从而知轨道(“脚印”)

$$\Lambda(x_0),\Lambda^2(x_0),\cdots\Lambda^n(x_0),\cdots$$

可以无穷次无限靠近[0,1]上的每个点，即 Λ 有对[0,1]的遍历性，轨道上的动点可以无穷次“访问”[0,1]上的每个点，或者说 Λ 把从 x_0 出发的轨道上的点无穷次传递到每个点 $x\in[0,1]$ 的无限近的地方。轨道上的点在[0,1]上并非是告别[0,1]上一个点之后，就永远到他乡游荡而不回头(和当初告别的点永别)，Λ 从 x_0 上出发的轨道与[0,1]上的每个点无穷次聚散。这里又一次看到“聚散有法”的现象，这里的“法”是依据三角帐篷映射 Λ 所规定的运动规则，结合上段的 Λ 对初值的敏感依赖，Λ 的轨道走向也是不可长期预报的，对 Λ 也有“聚散有法岂可预”的感叹！

(3) Λ 的周期点在[0,1]上处处稠密

任取定 $x_1=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\in[0,1]$,考虑

$$x_0 = 0.\dot{0}a_1a_2\cdots\dot{a}_n = 0.0\underbrace{a_1a_2\cdots a_n}\underbrace{0a_1a_2\cdots a_n}\cdots$$

则

$$\Lambda(x_0) = 0.a_1a_2\cdots a_n0a_1a_2\cdots a_n0\cdots = 0.\dot{a}_1a_2\cdots a_n\dot{0},$$

$$\Lambda^{n+1}(\Lambda(x_0)) = \Lambda\sigma^n(\Lambda(x_0))$$

$$= \Lambda\sigma^n(0.\dot{a}_1a_2\cdots a_n\dot{0})$$

$$= \Lambda(0.\dot{0}a_1a_2\cdots\dot{a}_n)$$

$$= \Lambda(x_0)$$

即点 $\Lambda(x_0)\in[0,1]$是 Λ 的一个周期点。

$$|\Lambda(x_0) - x_1| = |0.a_1a_2\cdots a_n0a_1a_2\cdots a_n0\cdots - 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

由 n 的任意性,Λ 的周期点可以与[0,1]上的任一点 x_1 相距任意小,即 Λ 的周期点在[0,1]上处处稠密。对于 Λ 亦可谓紫燕归来巢连巢。

从面包师感兴趣的角度来说,北京拉面也会出现本篇开头所言的面条上发生①②③现象。从而使面条吃起来口感极佳。

5.5 蒙古包里的混沌

函数

$$y = \lambda x(1-x),\ x\in[0,1] \tag{5.10}$$

称为逻辑斯蒂克(Logistic)映射,当 $\lambda=4$ 时

$$y = 4x(1-x) \tag{5.11}$$

是[0,1]到[0,1]的映射，其图像状似蒙古包，故称(5.11)为蒙古包映射。(5.10)是人类或昆虫繁衍的数学模型，考虑递推关系

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \tag{5.12}$$

x_n 是上年的人口总量，x_{n+1}是下年的人口总量，且认为人口的最大可能值为"1"(例如单位是 20 亿，"1"就表示 20 亿人口)，由于国土面积和生活资料的限制，全国人口必然存在一个最大可能值。下年的人口应与现有人口总量以及现有人口与最大可能的人口数之差(允许增加的最大值)成正比，所以成立(5.12)这种逻辑斯蒂克递推方程，$\lambda>0$。

当 $\lambda=4$ 时，在(5.12)中令

$$x_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right), y_n \in [0,1]$$

则

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_{n+1}\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)\left[1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y_n\right)\right] = \sin^2\pi y_n,$$

于是 $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$等价于

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & 0 \leqslant y_n < \frac{1}{2} \\ 2 - 2y_n, & \frac{1}{2} \leqslant y_n \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.13}$$

(5.13)即三角帐篷 Λ 的迭代，可见蒙古包映射是混沌的，即 $y=4x(1-x)$具有与 Λ 相似的混沌三要素。

由此我们可以理解，在生物界和人类社会当中，在生态与人口变化当中，也存在混沌现象；某个物种的繁衍乃至泛滥成灾，例如蝗灾；某个物种的锐减乃至灭绝，是难以预报的，并不总是最适者生存，达尔文主义看来需要注入混沌科学的内容而加以修正了，人口问题则更加复杂。人类社会中混沌一片，例如面临世界金融市场时，对那些职业经济学家的预报，宁可信其假，不可信其真，因为这个领域是混

沌的，本来不可长期预报，他硬要预报，那只能随他编造一些童话故事了。丘吉尔有句名言曰："历史就是一件接一件见鬼的事件组成的"。

5.6 面片上的混沌

一位面包师把 1×1 的面片横向拉长成 2，纵向压缩成宽 a 的面条，$0<a<\frac{1}{2}$，再把它切成长 1 宽 a 的两段，把右手边的那一小片放在左手边那小片的正上方，以免两者粘连，且使两个小矩形面条的下底相距为$\frac{1}{2}$；再次拉伸和变窄这两块小面条，拉长成 2，变窄成原来的 a 倍，且把它们切开成四块长 1 的小面条，把右手边的两块放到左手边那两小片的正上方，使得右手边的两片抬高$\frac{1}{2}$，如此不停地抻拉变窄和右半部抬高$\frac{1}{2}$放到左半部正上方，可得到无穷条水平离散摆放的细面条，见图 5-2，图 5-2 按 $a=\frac{1}{4}$画出。

这一过程的数学模型是

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n, & \sigma\leqslant x_n<\dfrac{1}{2}\\[2ex] 2x_n-1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\end{cases}\tag{5.14}$$

$$y_{n+1}=\begin{cases}ay_n, & \sigma\leqslant x_n<\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{2}+ay_n, & \dfrac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\end{cases}\tag{5.15}$$

由于 $0<a<\frac{1}{2}$，所以在拉伸过程中，面片的面积不断地缩小，第 n 次拉伸后面积变成$(2a)^n$，而 $0<2a<1$，故最后面条的总面积为零，这

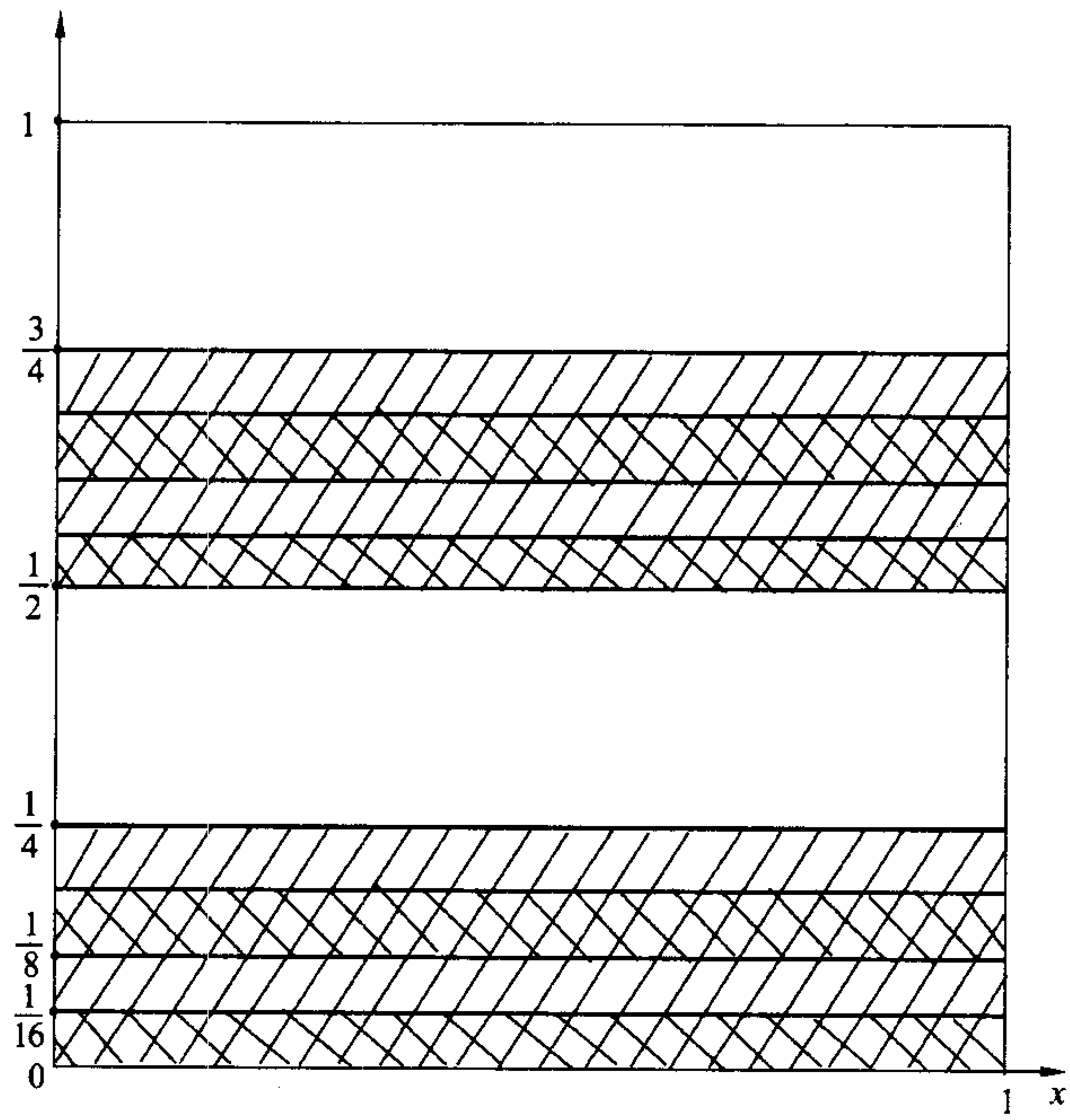


图 5-2

时得到的点集记成Λ_0，Λ_0 已经到达极限，再对 Λ_0 施行伸拉、压缩和上移等动作，得到的仍是 Λ_0，Λ_0 变成它自己。称这种集合 Λ_0 为不变集。

由于 x 方向的迭代(5.14)是砍头映射的迭代，所以在上述运动中，在 x 方向上产生了混沌。

从图 5-2 中可以看出 y 轴方向上的演化情形，把 y 轴上的$[0,1]$区间四等分，在四个子区间中删去自下而上数的第二、第四两个开区间，把保留的两个子区间再分别四等分，删除下数第二和第四开区间，依次类推，无限进行，每次留下的子区间的长就是当时面条的宽度。第 n 回合得到的是 2^n 条细面条。

5.7 非整数维数的奇怪不变集

我们知道，线段是一维的，正方形片是二维的，立方体是三维的，事实上，维数本来是运动学(物理学)中的概念。线段、方片和方块是特殊的点集，数学家推广维数的概念，考虑一般点集的维数，企图给出一个计算一般点集维数的公式，而且，既然是概念推广，则要求该公式可以算出线段、方片、方块的维数恰为 1，2，3。这种推广的维数公式不唯一，下面我们介绍一种最直观最易计算的所谓“盒子维”。

欲求出直线 L 上的一个有界点集 S 的盒子维数，先把直线等分成长 ε 的闭区间，把这些闭区间视为一个个小盒子，$N(\varepsilon)$表示含有 S 中点的小盒子的数目，则计算 S 的盒子维数 $D(S)$ 时按公式(5.16)进行

$$D(S)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg\frac{1}{\varepsilon}} \tag{5.16}$$

为了印证(5.16)的合理性，我们用公式(5.16)算一下 L 上一条长 1 的线段 l 的维数 $D(l)$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则含 l 上点的长 $\frac{1}{n}$ 的“小盒子”数为 $N(\varepsilon)=n$ 或 $n+1$，把 ε 与 $N(\varepsilon)$ 代入(5.16)得

$$D(l)=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n+1)}{\lg n}=1$$

可见用(5.16)算出的线段的维数与我们早已认可的线段的维数一致。

欲求平面 π 上一个有界点集 S 的盒子维数，先把 π 等分成边长为 ε 的小正方形片，把这些闭的方片视为一个个小盒子，$N(\varepsilon)$表示含有 S 中点的小盒子的数目，则 S 的盒子维数 $D(S)$ 用公式(5.16)计算。

例如平面上边长为 1 的正方形区域 Q,取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$,则 $N(\varepsilon)=n^2$ 或$(n+1)^2$ 或 $n(n+1)$,代入(5.16)得

$$D(Q)=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n^2}{\lg n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg(n+1)^2}{\lg n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n(n+1)}{\lg n}=2$$

用(5.16)算出的平面上一个区域的维数与我们早已认可的维数一致。

劝读者自己动手算一个边长为 1 的立方体的盒子维数。

一般而言,设 S 是 m 维(欧氏)空间的一个有界点集,把此空间等分成棱长为 ε 的 m 维小方盒,用 $N(\varepsilon)$表示含 S 中点的小方盒的个数,则定义 S 的盒子维为

$$D(S)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg\frac{1}{\varepsilon}}$$

例如康托尔尘集 K 的盒子维 $D(K)=\frac{\lg 2}{\lg 3}$。事实上,取 $\varepsilon=\frac{1}{3^n}$,则 $N(\varepsilon)=2^n$,于是

$$D(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg 2^n}{\lg 3^n}=\frac{\lg 2}{\lg 3}=0.6309297\cdots$$

K 的维数竟是一个无理数,真是奇怪!

下面用公式(5.16)计算面包师拉出的面条的维数,即求不变集 Λ_0 的维数 $D(\Lambda_0)$。

对于 $a=\frac{1}{4}$,取 $\varepsilon=\frac{1}{4^n}$,则 $N(\varepsilon)=2^n$。于是

$$D(\Lambda_0(y))=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg 2^n}{\lg 4^n}=\frac{1}{2}$$

其中 $\Lambda_0(y)$表示 Λ_0 在 y 轴上投影的维数,在 x 方向Λ_0 的维数是 1,所以 Λ_0 的盒子维为 $D(\Lambda_0)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,是分数维。

对于 $a=\frac{1}{3}$，则可算出 $D(\Lambda_0)=1+\frac{\lg 2}{\lg 3}$，是无理维数，这时 $\Lambda_0(y)$是康托尔尘集。对一般的 $0<a<\frac{1}{2}$

$$D(\Lambda_0)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{\lg 2^n}{\lg\frac{1}{a^n}}=1+\frac{\lg 2}{\lg\frac{1}{a}}$$

$D(\Lambda_0)$不是整数，比 1 维大，比 2 维小，是介于线与面之间的一个奇怪点集，故称 Λ_0 为面包师迭代(5.14)、(5.15)的奇怪不变集。

5.8 生命游戏

数学家和自然科学家喜欢把整体划分成部分，把复杂事物化成简单模型来讨论，这样当然会有化难为易，各个击破的好处，例如求凸多边形的内角和，则可以把凸多边形用从一顶出发的对角线把它划分成 $n-2$ 个三角形，其中 n 是多边形边数，再由每个三角形内角和为 π 知凸 n 边形内角和是$(n-2)\pi$。物理学家有时则把球体约化为质点。把一个带电的球体约化为点电荷，等等。事实上，这是一种图方便的近似变通技术，有时不会影响总体的结论，但大多数情形这样得到的结论不是真的，从混沌的观点看，大有差之丝毫谬之千里之嫌！事实上，群体事物的性质往往并非每个单体事物性质的叠加，就像把每只苹果投入箱子则会得到一箱子苹果一样；如果是一只黄鼠狼和一只小鸡呢！要考虑的是集体现象的合作效益、相干效应等大量个体互相作用下表现的非平凡的不可预见的后果！这种现象，即使不如混沌那么神出鬼没，也是相当之复杂的，是介于秩序与混沌边缘的变化过程，美国科学家米歇尔·沃尔德罗(M. Waldrop)1995 年写了一本书叫做《复杂——诞生于秩序与混沌边缘的科学》，已有中译本，推荐给读者，不妨一阅。该书作者说“试图解答一切常规学科无

法解答的问题。"云云。他说："科学划分成的碎片越来越多，而真实的世界要求我们用更加整体的眼光看问题。"应当"从无人知晓的角度和深度来认识世界，冲击自牛顿以来一直统治着科学的线性的简化的思维方式！""我们面临的是并不优雅的，科学尚未认识的世界，各种规模的动乱与崩落，包括最大的灾难、无序和非理性等，都属基本的现象。"该书作者呼吁年轻人应该"有一种不可思议的旺盛的精力和同志友谊与忠诚，一种令新思想释放的氛围，一种指向开放的自由氛围，一种对经典学科反叛的味道。"

1970年，英国剑桥大学数学家康维(J. Conway)提出一种称为"生命游戏"的问题，在《科学美国人》杂志上发表，叫板悬赏征解。问题如下：

在正方格的棋盘上，如果一枚棋子摆在某格上，则曰此棋子"活"着，如果把棋子从某格拿掉，则曰此棋子"死"去，即每个格子仅有"生"与"死"两种状态之一，有棋子时称为"生"态，无棋子时称为"死"态。每个方格有八方邻居——东、西、南、北、东南、西北、东北、西南；游戏规则是：

①对于"生"态格子，若其邻居中有两个或三个是"生"的，则该格继续存活，否则变成"死"态(这是由于过于拥挤至死或过于孤独而亡)；

②对于"死"态的格子，若邻居中有三个"生"态，则该格转变为"生"态(新繁殖出来的)，否则仍是"死"态。问能否出现自我复制的克隆过程？

已有不少人研究过这一游戏，肯定了克隆过程是可以发生的。例如图5-3中的(b)、(c)、(d)就出现自我复制。

读者可以自己设计一些初始状态，在更大的棋盘上做这种"生命游戏"，且给出灭绝、稳定、周期振荡和爬行的初始状态满足的条件。

生命游戏是复杂理论这一新兴学科的典型模型，它与冯·诺伊曼

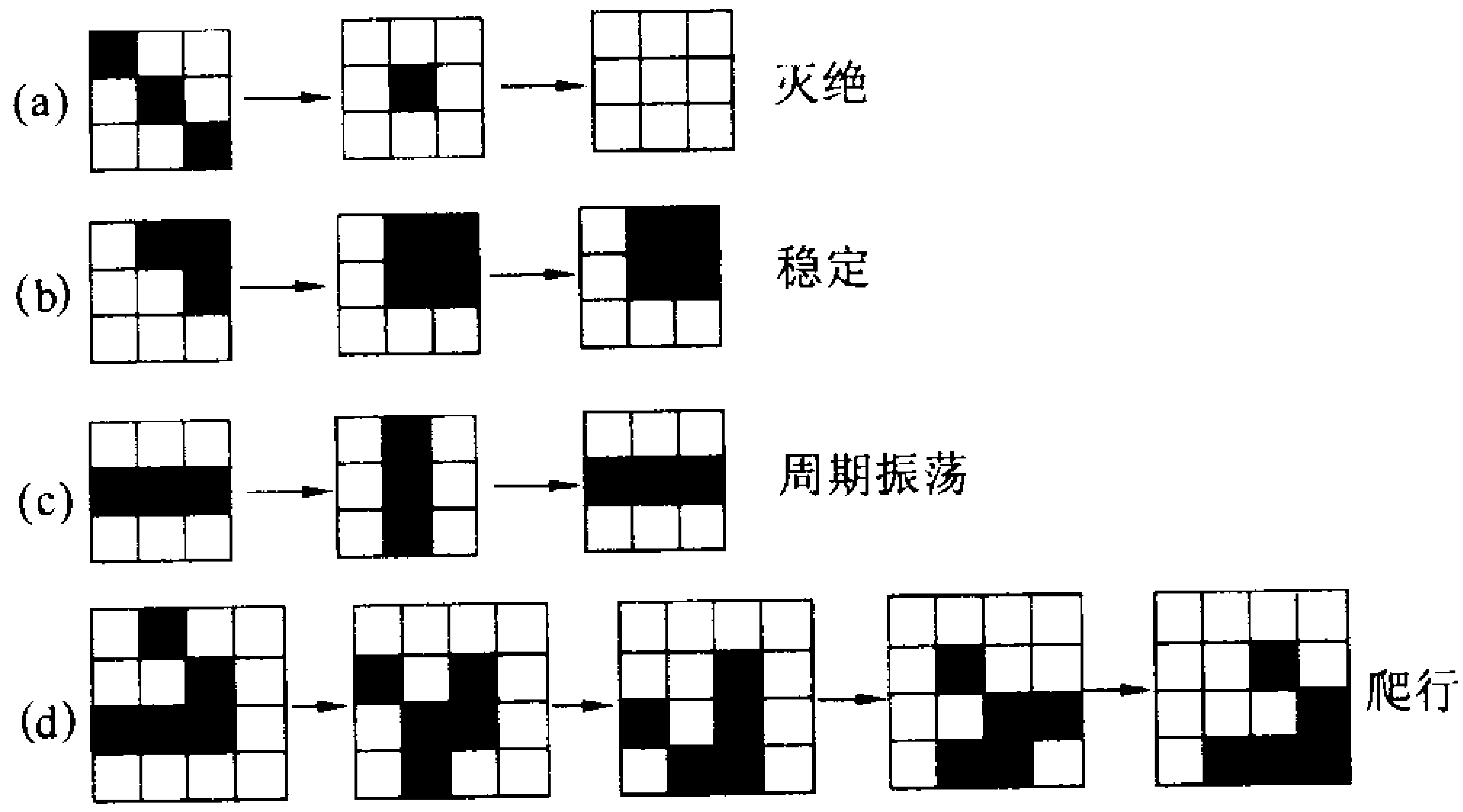


图 5-3

(1903～1957)研究的机器人自我复制、进化理论和自动机理论有密切关系。

5.9 20 世纪最伟大的数学家之一

冯·诺伊曼(J. Neumann), 1903 年生于匈牙利, 10 岁入大学学习, 12 岁精通了波莱尔的专著《函数论》, 18 岁与老师合作发表了新颖而具时代精神的论文, 1930 年赴美工作, 1932 年任普林斯顿大学教授, 1933 年任普林斯顿高级研究院领导人, 是六大著名教授之一, 是年他不满 30 岁。由于工作需要, 这位成熟的数学家自学了量子力学, 且成了当时公认的量子力学的权威。1940 年, 他由一位纯数学家转向为一位应用数学家。第二次世界大战开始后, 积极参加与反法西斯战争有关的科研项目, 使得在武器研制方面美国处于世界领先地位。冯·诺伊曼是制造原子弹的首席科学家和领导者。他很快就成了武器设计家, 在军备竞赛中为美国政府出谋划策。

冯·诺伊曼的最重大的贡献是与他人合作研制出第一台电子计算机, 这一成就不仅轰动了当时的世界, 而且将深远地影响人类文

明，他对计算机的理论进行了深入研究，为计算机的进一步发展，例如元胞自动机和人工智能等，奠定了基础。在应用数学方面，他还是“博弈论”的创始人，在经济日益发展的今天，博弈论的应用越来越广泛。在纯数学方面，对于实函数论、测度论、公理集合论、拓扑学、群论也都有巨大贡献。他认为最好的数学灵感来源于经验，不相信竟能存在一种脱离一切人的经验的、绝对不变的严密的数学概念。他说：“当一门数学学科离开它的经验源泉走得太远，或者更糟的是，如果它是第二代或第三代学科，只是间接地受到来自‘现实’的启发，那它就充满着严重的危险，它会变得越来越成为纯粹的矫揉造作，越来越纯粹地‘为艺术而艺术’。一门学科存在着依阻力最小的路线发展这种严重危险，就像一条河，离开它的源泉太远之后，分成许多涓细不足道的支流，使这门学科变成一大堆杂乱的细节和繁复的东西。换言之，一门数学学科在离开它的经验源泉太远之后，或者经过太多的‘抽象’配种，它就有退化的危险。”

另外，冯·诺伊曼极富文字与口头表达能力，擅长科学讲演，他讨论与研究的是高深艰涩的抽象数学理论或尖端科学技术，但著书立说时，他的书却写得深入浅出，道理深刻又可读性强，这与他的社会科学功底深有关，他能流利地讲拉丁语、希腊语、德语、法语和英语，而且对古代史了如指掌，他幽默感很强，常以独特的口吻谈出对科学、对社会的中肯评论。

由于科学工作强度太大，效率太高，正当他精力旺盛成果频出之时身患癌症，这位数学巨人，于 1957 年 2 月 8 日过早地离开了人间！

5.10 混沌学座谈纪要

混沌学是 20 世纪人类四大科学成就之一，另外三个是量子力学、相对论和计算机科学技术。混沌一词正式作为数学名词出现在科学文

献上是 1975 年的事。20 多年来，它以科学史上空前的速度发展成有丰富的非线性物理背景和深刻复杂的现代数学内涵的现代学科，已出版的混沌学著作，像样的近 300 部，发表的混沌研究论文近万篇。数学家说，混沌是数学的新分支，物理学家则说，混沌是非线性物理的新分支，其实它是物质科学、社会科学与数学科学三栖的边缘学科，所以其发展天地十分之宽广。

混沌在普通话里是确定性规律支配的事物变化却极端复杂和其行为不可预测的同义语，也有人把混沌写成浑沌，美国人写成 Chaos。我们应当用数学的语言澄清混沌的概念，不可牵强附会望文生义地去乱谈混沌。上面我们论证出的混沌的三个要素和造成这种无规律运动的映射，使我们看到复杂万状的混沌运动的机制却是极其简单的确定规则的反复作用，我们应当树立寻求复杂现象的貌似随机背后隐藏的制造混沌的简单规律。一般而言，混沌现象背后都有反复拉伸与折叠的背景。

混沌概念与理论的孕育可以追溯到 19 世纪，庞加莱和洛伦兹是两位最重要的代表人物。

庞加莱(J. poincaré, 1854～1912)，法国南锡人，上层阶级出身，其父是法国名医，南锡大学医学教授，他的堂兄曾任法国的首相，第一次世界大战时的法国总统。庞加莱身体虚弱，行动笨拙，其貌不扬，但却有非凡的数学天才。小时候即获法国中学生数学竞赛一等奖，后入巴黎工科大学和矿业学院学习，1879 年获科学博士学位，27 岁被任命为巴黎大学教授。他每年讲授一门不同的课程。他以伟大的首创精神和卓越的技巧处理了纯数学与应用数学的几乎所有领域的内容，发现了许多前人未知的领域。他总共写出 30 卷以上关于数学、物理学与天文学的专著，6 卷通俗著作以及 500 篇数学论文。他是个敏捷、多才而且不倦的思想家，不爱在细节上纠缠，被当时科学界戏称为“一名征服者但不是殖民者。”32 岁当选为法国科学院院

士，审批他为院士时的评语是“他的工作非普通言辞所能赞誉，他解决了前人所未曾梦想过的问题。”由于他的成就和对人类的伟大贡献，1954 年 5 月 15 日在法国隆重举行庞加莱诞辰 100 周年纪念大会，表彰他的业绩和为人，参加大会的包括总统、教育部长和各国著名科学家。

庞加莱非常看重爱因斯坦(Einstein)的能力，于 1911 年介绍爱因斯坦第一次到高校任职，为爱因斯坦创造了良好的工作环境。

1902 年以后，庞加莱为大众进行了大量的科学讲演，把数学和科学的内容、方法和意义以及他自己的工作与体会热忱地介绍给非专业的听众，之后整理出版了四部风趣、深刻、引人入胜的高级科普著作：《科学与假设》、《科学的价值》、《科学与方法》、《最后的一些想法》，思路清晰，深入浅出地分析了自己的治学方法和成果，这些著作比第一流散文大师的作品毫不逊色。

庞加莱是全能数学家，对所处时代的全部数学有创造性的掌握，他可能是达到这种地步的最后一个人物了。他在研究天文学时，19 世纪末发表了一篇长达 270 页的论文《论三体问题和动力学方程》，发现了今日我们称之为混沌运动的轨道，他说：“这些图案复杂得令人惊奇，甚至我不想把它们画出来！”并在 1903 年，在名著《科学与方法》一书中指出了混沌存在的可能性，从而成为世界上了解混沌存在的第一人，庞加莱指的“图案”，现在称之为 Poincaré 栅栏，它是出现混沌的一种根源。

到了 20 世纪 60 年代，美国麻省理工学院的气象学教授洛伦兹(E. N. Lorenz)在搞数值天气预报时，遇到了做不准长期预报的麻烦，发现了有名的“蝴蝶效应”。1963 年发表《确定性非周期流》的论文，是混沌理论的开创性工作之一。他从大气运动服从的确定的物理规律出发，建立了大气的数学模型——洛伦兹方程组，但用计算机解得的天气运动却是随机性的，不可预报的！ 他的工作被科学界冷落了

12 年，直到 1975 年，中国学者李天岩和美国数学家约克(J. Yorke)在《美国数学》杂志上发表了《周期可导出混沌》一文，第一次用了混沌(chaos)这一名词，从此对混沌的研究热一发而不可收，1977 年，第一次国际混沌会议在意大利召开；1986 年，第一届中国混沌会议在桂林召开，北京大学、中国科学技术大学等著名学府纷纷成立非线性科学中心，集中了一大批优秀科学家投入混沌研究。

洛伦兹于 1972 年 12 月 29 日为美国科学发展协会第 139 次会议写出新闻公报，题目是“可预报性：在巴西一只蝴蝶翅膀的拍打能够在美国得克萨斯州产生一场龙卷风吗?”提出了有趣的蝴蝶效应。指出天气系统对初值敏感依赖，所以长期预报不能报准。后来人们半开玩笑半认真地说北京人咳嗽一声或许会让纽约人去铲雪。为什么天天有蝴蝶飞，不是天天有龙卷风呢？这是由于其他蝴蝶或别的什么东西也在干扰天气系统，干扰间互相抵消了，才不至于天天形成严重的灾害性天气。

现在仍然有不少数学家和科学家对混沌知之甚寡，更不必说一般的年轻人了。正如《侏罗纪公园》一书的主角马康姆所说：“我搞的是混沌理论，但是我发现没有人愿意倾听这门数学的意义；其实它暗示了对人类生活中的许多有重大意义的道理，其重要性远远超过人人都喋喋不休谈论的学究气十足的那些理论。”这种混沌理论可以用来研究从股市熊牛到暴乱人群，从癫痫病人脑电图到心肌梗塞病人心血管的无规变化，从日地月三体运动到流星的形成，从生态失衡到人口控制，从催化反应到无线电波，从超导到加速器等等可能出现混乱和不可预测状态的很多复杂运动，寻求其中潜在的确定性机制和混沌的后果。

在社会科学当中，也有不少混沌事物值得探讨。系统论创始人维纳(Wiener)1981 年曾引用下面的歌谣来提醒人们，社会生活中某些看似微不足道的变化可以引发一个民族一个国家的危机乃至

灭亡：

钉子缺，蹄铁卸；
蹄铁卸，战马蹶；
战马蹶，骑士绝；
骑士绝，战事折；
战事折，国家灭！

在国际国内环境中，战争对与其关联的初始状态有敏感依赖性，有些不大的事件，由于防范不周或处理不及时，往往引发一场大的战争灾难。例如第一次世界大战，夺去了至少1500万人的性命，造成全球性灾难！起因（导火线）就是一位皇储被刺。1990年的海湾战争，多国部队动用最现代化的海陆空杀人武器，消耗大量金钱，并且给伊拉克这个文明古国（古巴比伦）的人民尤其是儿童造成十年的饥饿、疾病和死亡，起因仅仅是萨达姆这位不晓得国际风云对初值敏感依赖的武夫对小国科威特的不义侵犯。

在经济领域，公众心目中，对做经济预报的经济学家没有好印象，他们和长期天气预报员一样，名声不佳，往往受到现实的嘲笑，这是因为经济系统是混沌的。正如著名经济学家C。莱斯利所说："与正统政治经济学假定的那个光明、有序、均等和组织完善的世界相反，商业世界是一个混乱、偶然的世界，其中充满着破坏和浪费，不总是最适者生存。"经济学家们孜孜以求的一直是科学的确定性。如今他们开始起用数学工具探索经济运行当中，在有序外表掩盖下的混沌。美国著名经济学家理查德。H.戴1991年出版了名著《混沌经济学》，用混沌的理论与方法研讨了当今经济领域的各种热点问题。

混沌的研究对象可文可理，那种文理泾渭、楚河汉界的观点和做法已经过时。混沌在思想文化领域当中，起着改造人们世界观的作用。回想当年伟大物理学家爱因斯坦的名言："上帝精明，但无恶意，我无论如何深信上帝不是在掷骰子。"而著名天文学家与数学家拉

普拉斯(Laplace)则坚信:“宇宙中最微小的原子和最庞大的天体之运动,都包含在一个方程之中,没有什么东西是不确定的。”这种影响过几代人的世界观显然与混沌科学的真理格格不入,到了21世纪,这种可预测性的信念看来是必须要改变了,在非线性的现实当中,什么始料不及的怪事都可能发生。只是我们事先并不知道! 混沌理论对人类思维方式的冲击是根本性的,西方科学家布里格斯在《湍鉴》一书上公开说:“自然界本质上是不可预测的,我们接触着事先梦想不到的实在,从事意想不到的活动。”在此我们可以提出这样的问题:从混沌的观点来说,社会生活是否有规律? 对这一问题似应运用数学方法,借他山之石,加以推敲。例如我国未来学家黄硕风在其著作《国家盛衰论》中就引用混沌的观点研究国家的盛衰兴亡事。书中引用了王树禾《综合国力的数学建模》论文中的结果,研讨国家发展、动荡与崩溃的可能。

混沌出自秩序,出自非线性的确定性系统,我们的愿望之一是从混沌的表现中挖掘出它的确定性机制,秩序来自混沌!

关于混沌科学的大众化著作很多,中文版的有:

①刘华杰著《混沌之旅》(山东教育出版社,1996)

②E.N.洛伦兹著《混沌的本质》(刘式达等译,气象出版社,1997)

③利昂·格拉斯等著《从摆钟到混沌——生命的节律》(潘涛等译,上海远东出版社,1996)

④伊恩·斯图尔特著《上帝掷骰子吗——混沌之数学》(潘涛译,上海远东出版社,1996)

读者不妨找来一阅。

6 危机篇

逻辑有时生出怪蛋。

——庞加莱

6.1 毕达哥拉斯何以把门生投入大海

故事发生在公元前 5 世纪，那一日爱琴海上恶浪滔天，风雨中飘摇的木船上，一伙道貌岸然的年轻学者把他们的同学希帕索斯(Hippasus)身捆石头抛入了大海，制造了数学史上的一桩特大冤案，指挥这场凶案的正是这些年轻学者的老师，古希腊赫赫有名的大学问家毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 580 年～公元前 501 年)，毕老夫子是当时希腊政治、科学和宗教的统治集团“友谊联盟”的领袖，该集团由 300 多位有社会地位、有学问的人士组成。当时是奴隶制社会，“友谊联盟”内部岂有友谊可言，一切以毕达哥拉斯的是非为是非，其他人必须服从，顺之者生，逆之者亡。在数学上，他们形成了影响深远的毕达哥拉斯学派，证明了勾股定理、三角形内角和为 180°等重要数学定理，首先提出黄金分割和正多边形与正多面体等精彩概念，对古代的数学发展做了巨大贡献。他们的旗帜上写着：“万物皆数”(也翻译成“数统治着宇宙”)，他们说的“数”指的只是自然数或正分数。

公元前 470 年，毕达哥拉斯的学生希帕索斯请教老师如下的问题：

边长为 1 的正方形，对角线的长是多少？

事实上,按老师证明的勾股定理,对角线的长 l 应满足 $1^2+1^2=l^2$,即 l 应该是这样的一个自然数或正分数,它的平方等于 2。

但是,$1^2=1, 2^2=4, 3^2=9, \cdots$,所以 l 不是自然数,设 $l=\frac{p}{q}$,$\frac{p}{q}$ 是既约正分数,则应有

$$l^2=\frac{p^2}{q^2}=2,\ p^2=2q^2 \tag{6.1}$$

由(6.1)知 p 是偶数,令 $p=2k$,k 是自然数,则

$$4k^2=2q^2, 2k^2=q^2 \tag{6.2}$$

由(6.2)知 q 是偶数,从而 p 与 q 有公因数 2,与 $\frac{p}{q}$ 是既约分数相违。

正是上述这一问题和导致的矛盾激怒了权威毕达哥拉斯,更要命的是动摇了当时被尊为神圣真理的信念——数只有自然数和正有理数两种。希帕索斯提出对角线问题的挑战性和叛逆性,使得友谊联盟必置希帕索斯于死地,以捍卫他们关于数的既定信念。

正方形的对角线不能没有长度,这是任何人都承认的事实,正是这条直观具体的对角线的客观存在与毕达哥拉斯时代的数学观念之间发生了上述不可调和的矛盾和冲突,杀死一个希帕索斯问题仍然未得到解决! 当时人们的思想水平受历史背景和科学水平的局限,几乎人人信奉毕达哥拉斯学派的关于宇宙万物皆自然数或分数的教条,这好似当初人们都相信托勒密(Ptolemy)太阳绕地球转的地心学说一样,除了无知和对名人权威的盲从崇拜之外,也与大家不善于抽象思维和严格地逻辑推理,一切都诉诸粗糙的直观感觉有关。

数学史上称勾股定理在“万物皆数”(仅承认自然数和分数是数)的信仰统治下算不出正方形对角线的长这一数学困惑为第一次数学危机。

后来数学家把毕达哥拉斯学派所称的数为有理数,这在一定程度上照顾了这位在数学史上做出过大贡献的前辈的面子,也迎合了一般

人的心理和直觉。上面已严格证明边长为 1 的正方形之对角线的长不是有理数。称不是有理数的实数为无理数,希帕索斯是发现无理数的第一人。从"友谊联盟"的观点看,无理数是逻辑推理生出的一只怪蛋!再后来许多数学家对无理数的概念和理论做了大量的工作,给出了无理数的准确定义和性质,这件事一直干到 19 世纪才基本完工,代表人物有戴德金(Dedekind)、罗素(Russell)、康托尔(Cantor)和维尔斯特拉斯(Weierstrass)等人。

由于无理数的引入,排除了第一次数学危机,或者我们应当庆幸第一次数学危机来得早,使无理数这个数学中的主角之一早日登上了数学的舞台。我们应当为希帕索斯喊冤叫屈,佩服其造反精神,相传精明的希帕索斯身高 1.41 米,体重恰为 141 磅,他这些生理指标暗示他是$\sqrt{2}$的化身,这些传说的真伪已无从考查,人们姑妄谈之,我们姑妄听之,但有一点丝毫不可姑妄,那就是科学精神绝非信仰,科学是批判的、疑问的、创造的、严谨的和求实的,科学工作中不容忍迷信和崇拜。

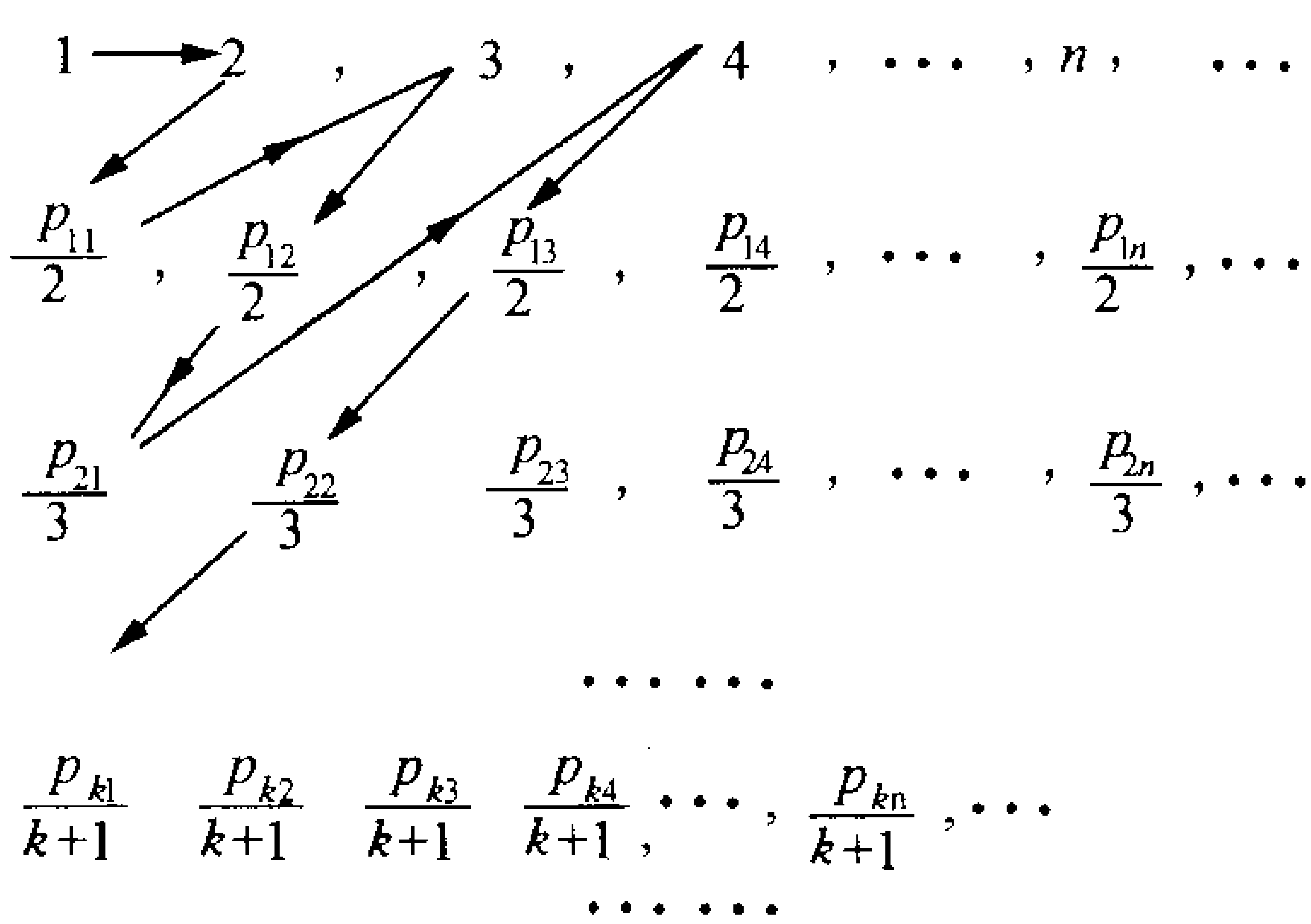
6.2 有理数平易近人,可数可列

以正有理数来说,0 表示什么也没有或出发点,自然数列 1, 2, 3, …,表示从 1 开始一个一个地多起来;或者说从 0 开始,每个整数有唯一的一个"后继",这些都是我们日常数(例如清点教室里有几张桌子)物件时的自然概念;而分数,例如$\frac{4}{9}$表示把一块饼平均切成 9 小块,取其中 4 小块的部分之多少,等等,可见有理数是可以看得到,容易理解的数量,所以当初数学上命名其为"有理"数。

如果把有理数用十进制(二进制等也是这样)表示,用有限个数字即可表达,例如 30^{30}, 1.5, $0.\dot{1}98\dot{9}$, 等等。它们能方便地用可视的有限数

字精确地表示出来。

有理数集合中的数可以编号，谁是 1 号有理数，谁是 2 号有理数，等等，可以人为地加以指定，下面给出一种编号方案，我们把以 q 为分母的既约分数 $\frac{p}{q}$ 们 $(p>0,\ q>0)$ 排成下列无穷的方阵，每横行分母一致，分子从小到大排列，上面方阵中囊括了一切正有理数，再按箭头所示的次序来编号，1 编成 1 号，2 为 2 号，$\frac{p_{11}}{2}\left(=\frac{1}{2}\right)$ 是 3 号，等等，于是每个正有理数都会迟早获得唯一的一个指定的号码。再把 0 编成 0 号，把这些号码皆乘以 2，把得到的新号码 $2k$（皆偶数）减 1 所得的奇数码赋予与带有 $2k$ 码的那个有理数相反的数，例如 $\frac{1}{2}$ 的号码是 $2\times3=6$，$6-1=5$ 则是 $-\frac{1}{2}$ 的号码，如此，全体有理数皆编了序号 0，1，2，…与全体无理数相比（下面要细讲无理数不可编号），有理数全体的这种可以有序化或曰“可数性”是有理数名符其实的一个“有理”的表现。



6.3 无理数神出鬼没，数不胜数

无理数也有无穷多个，例如

$$0.112123\cdots\underbrace{123\cdots k}_{k\text{个相异数}}\cdots \tag{6.3}$$

是一个无理数 α_1，它无限又不循环。若把(6.3)中的数字 1 全擦掉则得 α_2，α_2 也是无理数，把 α_2 中的数字 2 全擦掉，则得无理数 α_3，如此可以得出无穷个无理数，这部分无理数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots\cdots$ 与全体有理数可以一一对应，α_1 与 0 号有理数是一对儿，α_2 与 1 号有理数一对儿，…，α_{k-1} 与 k 号有理数是一对，可见无理数的一部分已经和全体有理数一样多。

无理数集合中的元素不可编号。这只需证明(0, 1]中的实数不可编号。用反证法，若可以把(0, 1]中的实数编号成 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$，其中

$$t_1 = 0.\, t_{11}t_{12}t_{13}\cdots$$

$$t_2 = 0.\, t_{21}t_{22}t_{23}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$t_n = 0.\, t_{n1}t_{n2}t_{n3}\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

其中 $t_{ij} \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，$i, j$ 是自然数，且每个 t_i 中的右端有无限个数字不是零。例如 0.5 则写成 $0.499\cdots9\cdots$。观察对角线上的数字列 $t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{nn}, \cdots$，取

$$a_i = \begin{cases} 2, & t_{ii} = 1 \\ 1, & t_{ii} \neq 1 \end{cases}$$

则十进小数

$$a = 0.\, a_1a_2\cdots a_n\cdots \in (0, 1]$$

且 $a \notin \{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$，此与(0, 1]中的全集实数是 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$ 矛盾，可见(0, 1]内的全体实数不可编号。

若(0, 1]中全体无理数可以编号为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \cdots$，又知(0, 1]中的全体有理数可以编号为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n, \cdots$，考虑数列

$$\gamma_1, \beta_1, \gamma_2, \beta_2, \cdots, \gamma_k, \beta_k, \cdots \tag{6.4}$$

则(0, 1]中的全体实数可按(6.4)的次序编码, 与上述证明出的事实相违, 至此知(0, 1]中的全体无理数进而实数集中的全体无理数不可编号。

无理数们的这种不可数性是它们的一种“无理”表现。从无理数不可数(编号)可知无理数比有理数多得多, 通俗地说, 有理数可以一个一个地数, 而无理数则多得数不胜数。

6.4 有理数是米, 无理数是汤

如果把实数轴(集)比喻成一锅黏稠的粥, 则可数的有理数们是一粒粒离散的米粒, 它们在数轴上处处稠密, 事实上, 若 γ_0 是一个实数, 设 γ_0 是有理数, 则 γ_0 的任意近旁, $\gamma_0 \pm \frac{1}{n}(n \gg 1, n \in N)$是两个有理数; 若 γ_0 是无理数, 则

$$\gamma_0 = \bar{\gamma}_0 + 0.\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_n\cdots \tag{6.5}$$

其中 $0.\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_n\cdots$是无理小数, $\bar{\gamma}_0$ 是有理数, 于是

$$\gamma_0' = \bar{\gamma}_0 + 0.\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\cdots\bar{\beta}_n \tag{6.6}$$

是 γ_0 近旁的一个有理数, $|\gamma_0 - \gamma_0'| < \frac{1}{10^n}$。可见数轴上任一点的任意近旁都有有理数存在, 即有理数处处稠密。类似地可知无理数在数轴上处处稠密。有理数们处处稠密地离散地浸泡在无理数的“汤”里。

6.5 问遍天堂地狱, 谁人知 π 真面貌

一提到 π, 即圆的周长与其直径的比例常数, 每个中华学子都会神采奕奕, 脸上有光, π 的近似值是我国对世界数学最辉煌的贡献之

一。中国古代数学家祖冲之、刘歆、蔡邕、张衡和刘徽等都对 π 做出过极为出色的工作，尤以祖冲之为最佳。成书于公元前 1 世纪的我国数学名著《周髀算经》中已有“周 3 径 1”的记录，公元初年，东汉朝廷则明文规定用 $\pi=3$ 作为计算圆面积的标准，王莽年间刘歆（公元前 50～23 年）得出 $\pi=3.15466$；东汉蔡邕曰“经八寸，周二尺五寸”，得出 $\pi=3.125$；张衡（公元78～139 年）得到

$$\pi=\frac{730}{232}\approx 3.1466,\ \pi=\sqrt{10}\approx 3.1622$$

三国时代魏国刘徽对《周髀算经》上的 $\pi=3$ 进行了批评，刘说：“学者踵古，3 其谬矣！”他不从俗崇古，创立了“割圆术”和“徽率”，从圆内接正六边形出发，边数倍增至正 192 边形，得出

$$3.14\frac{64}{625}<\pi<3.14\frac{169}{625}$$

刘徽在割圆求 π 过程中已经悟出了极限的观点，他说：“割之弥细，所失弥少，以至于不可割，则与圆周合体无所失矣。”

祖冲之是今河北省易县人，生于公元 429 年的南北朝时期，于公元 500 年逝世。祖冲之出身书香门第，却不全盘接受保守的儒家思想，他崇尚自然科学，发明了“大明历”，测出地球绕日的周期为 365.24281481 日，与现代所测值误差仅 50 秒，1500 多年前就得出如此之精确的结果，令世人惊叹！他还准确无误地预报过四次月食的时间和空间位置。他的数学名著《缀术》是我国历史上最优秀的数学教材，唐代朝廷规定《缀术》为学校的必修科目和招生命题的法定著作。祖冲之与其爱子祖暅巧妙计算了球体体积，且把他们父子的方法总结成下面的“祖家定理”：

夹在两平行平面间的两几何体被平行于这两平面的任意平面所截，若所得两截面相等，则两几何体等体积。

事实上，这一定理就是现代微积分中重积分的理论与方法的原

型。一千多年后,意大利人卡瓦雷利(Cavalieri, 1598～1647)才发现了同样的定理。

祖冲之最值得我们称道的成就是他给出了 π 的"约率"$\pi\approx\frac{22}{7}\approx 3.142857$ 和"密率"$\pi\approx\frac{355}{113}\approx 3.1415929$,数学史称之为约率与密率,是公元5世纪的数学奇迹。国际上已把月球上的环形山命名为"祖冲之山",1977年决定把1964年11月发现的小行星命名为"祖冲之星",祖冲之与日月同辉!

直到今日,数学界仍在对 π 进行研究与计算。

1914年,印度大数学家拉马努金(S. Ramanujan)给出近似公式

$$22\pi^4\approx 2143$$

不信你用计算器试试看,从此公式可以算出 π 的八位小数的准确值。

1989年,东京大学的金田康正用计算机算出 π 的53687万位小数;美国人不服气,哥伦比亚大学的戴维·丘德诺夫斯基和格雷戈里·丘德诺夫斯基兄弟把 π 计算到第1011196691位。有消息说,1999年有人把 π 计算到2000多亿位小数。

我国桥梁专家茅以升老先生作为消遣,能背诵 π 的百位小数,真令人敬佩!

1761年,兰伯特(Lambert)证明了 π 是无理数;1882年,林德曼(Lindemann)证明了 π 是超越数;所谓超越数是指不是有理系数多项式的根的实数,否则称为代数数。

作者曾长时间通读中国科学技术大学数学图书馆里陈列的 π 的万位小数,给我们的印象是状似随机,找不出什么规律,这可能是它的超越性使然! 有消息说在 π 的小数展开中已发现六个9连排的现象,即在 π 的小数中出现了

$$\pi = 3.1415\cdots\underbrace{999999}_{6个9}\cdots$$

但是,如果问:π 的小数部分是否有 10 个 9 连贯出现?估计这不是一个很容易回答的问题;如果敢问:π 的小数部分是否有 100 个 9 连贯出现?估计这肯定是一个很不易回答的问题。这种问题,包括把 9 换成其他数字的相似问题是要提出多少就可以提出多少的,每一个都非常之难!

从某种意义上来说,π 是一个永远不能认识清楚的数学妖怪,其他无理数,例如$\sqrt{2}$,也有这种无理的怪脾气。这正是为克服第一次数学危机引入无理数付出的代价,人类不断地为自己制造难题和危机!

π 给我们摆了诸多难题,工程师们则根本不关心小数点第十位以后 π 的数字是几,似乎对 π 的纯理论研究没有什么用处,例如证明 π 的超越性纯属抽象的理论探讨。然而正如 J. 纽曼(James Newman)所云:"数学最抽象最无用的研究被人们发展了一段时间之后,常常被其他部门所俘获,成了解决问题的工具,我想这不是偶然的,就好像一个人戴了一顶高帽子去参加婚礼,后来在起火时发现它居然可以当水桶用。"利用 π 的超越性解决了三大几何问题之一的"化圆为方"问题,完全印证了纽曼的上述观点;所谓化圆为方问题是指:

用圆规和直尺作一个正方形,使其面积等于任意给定的圆的面积。

这个问题是以普罗他哥拉斯为首的诡辩学派于公元前 400 年左右提出的(另两个问题是用圆规直尺三等分角和倍立方问题)。1895 年,克莱茵(Kline)总结了前人两千多年的研究,给出了简明严格的证明,证明三大作图题只用圆规和直尺是不可能作出的。

事实上,若圆半径是 1,则面积为 π,于是我们需要用圆规直尺作出一个正方形,它的面积也是 π;设该正方形边长为 x,则 x 满足方程

$$x^2=\pi$$

从而 $x=\sqrt{\pi}$。由初等几何我们已经知道，线段能用圆规直尺作出的充分必要条件是所求线段之长能用已知线段的加、减、乘、除和开平方五种运算算出；这里我们已知的线段仅为圆的半径，此半径之长为1，1 经 $+ - \times \div \sqrt{\ }$ 只能得出代数数，而 π 是超越数，$\sqrt{\pi}$ 也是超越数，所以由 1 经 $+ - \times \div \sqrt{\ }$ 得不到 $\sqrt{\pi}$，即得不到欲求线段 x，故化圆为方问题无解！

我们在此领教了 π 为超越数这种貌似脱离应用的纯数学研究的成果，竟成了解决“化圆为方”这种千年难题的钥匙，显示了数学理论研究的价值和力量。

饮水思源，我们应该感谢挑起第一次数学危机的年轻有为的数学家希帕索斯，正是他死不悔改地向传统的思想禁锢进行的挑战和牺牲，接生了无理数，使得我们能看到建立在无理数理论上的诸如“化圆为方”这种超级难题的结论，而且无理数理论是数学分析、混沌等几乎所有现代数学的基石。

无理数调皮，无理数无理，无理数有用。

6.6 为全人类增添光彩的人物

牛顿(I. Newton)，英国林肯郡人，出身农家，1642 年生，尚未出生即已丧父，降生后其母改嫁他乡，小牛顿由外婆抚养和供其上学，1661 年考入剑桥大学，1669 年被评为剑大数学教授，1703 年被选为英国皇家学会会长，并接受女王安娜的封爵，1727 年逝世。

牛顿的科学贡献涉及数学、力学、天文学、物理学和化学等众多领域，为数学和自然科学奠定了以下四个方面的基础。

(1) 创建微积分，奠定了近代数学的基础

牛顿与德国数学家莱布尼茨同时独立创立的微积分，后来发展成近代数学的中心学科，在它的基础上衍生出常微分方程、偏微分方

程、复变函数论、微分几何、泛函分析、变分法等数学分支以及理论力学、天体力学等自然科学学科。为数极多的数学问题和自然科学问题，不用微积分就根本不能解决。在微积分的成果面前，就连曾不遗余力攻击牛顿的流数(即导数)术挑起第二次数学危机的大主教伯克莱(G.Berkeley, 1685～1753)，最后也表态说："流数术是一把万能的钥匙，借助于它，近代数学家打开了几何乃至大自然的秘密，这一方法使数学家们能够在发现定理和解决问题方面大大超越古人。"现代著名科学家冯·诺伊曼如此评价："微积分是近代数学当中最大的成就，对它的重要性，无论怎样估计，都不会过分。"

(2) 首创光谱分析实验，为近代光学奠定了基础

(3) 发现力学三大定律，为经典力学奠定了基础

(4) 发现万有引力定律，为近代天文学奠定了基础

科学家阿西莫夫认为，任何一位科学家，只要具有牛顿这四项发现中的一项，就足以成为最著名的科学家，而牛顿集四项成就于一身，只有牛顿是有史以来最伟大的科学家，是人类文明史上的超天才。

1665 年伦敦发生瘟疫，剑桥停课，牛顿还乡一直住到 1667 年，时年 22 岁到 24 岁，风华正茂、才气横溢的牛顿在家乡做出了人类思想史上无与伦比的几项发现：负指数和分数指数的二项式级数；微分学和积分学；作为了解太阳系结构的万有引力定律；用三棱镜把日光分解成可见光谱，借以解释了彩虹的由来等。

牛顿是一个内向沉稳的科学家，对出书和发表文章没多大兴趣，代表作是《自然哲学的数学原理》。他是一个对科学痴迷到不食人间烟火的人。关于牛顿的轶事很多。下面列举若干。

①一日，牛顿一边煮鸡蛋一边看书想问题，过了好长时间才想到该把煮熟的鸡蛋捞出来吃，结果竟从锅里捞出一块怀表，原来他只顾思考问题，把怀表当成鸡蛋扔到锅里煮了！

②又一日，一位朋友来访，牛顿请人家一同用餐，他想起自己有

一瓶好葡萄酒，于是对这位朋友说，我去拿酒，请稍候。朋友左等右等不见牛顿回来，就去找他，一看，牛顿正在他的实验室里紧张地做实验，早把请朋友喝酒的事忘到脑后去了。

③再一日，一位朋友请牛顿吃饭，饭菜摆好，朋友再三催牛顿从书房出来用餐，牛顿迟迟不出来，朋友饿了，狼吞虎咽把饭菜吃了个精光，啃剩的鸡骨头扔得狼藉满桌，后来牛顿出来吃饭，看到桌上的骨头，自言道："我真糊涂，这顿饭我不是吃过了吗！"于是又回书房继续研究他的问题。

④牛顿青年时代与表妹相爱，谈婚论嫁，一对恋人已约定结婚日期，可是因为科研一忙，牛顿竟忘记了结婚日期，女方误认为表兄心变，另求新欢了。从此牛顿再未婚恋，独身生活一生，把全部身心都献给了科学事业。

⑤传说一日牛顿端坐苹果树下思虑问题，突然一只苹果砰然坠地，牛顿自问，为什么这只苹果一定要垂直落地而不飞向他方？从中悟出定是地球在拉动这只苹果，进而究之，是否物体间皆互相吸引牵拉？再经实验研究，终于发现了万有引力定律这一自然界的金律。

英国人把牛顿视为神圣，一位诗人为牛顿写墓志铭曰：

"宇宙和自然规律隐藏在黑暗之中，
神说：
　　让牛顿降生吧！
　　一切才会光明。"

当然牛顿绝非神仙下凡，他自我评价说他是站在巨人肩上的孩子，所创的科学理论，只是"在科学的大海岸边拾到的几只美丽的贝壳而已。"

6.7 此人就是一所科学院

莱布尼茨(G.W.Leibniz)，德国莱比锡人，1646 年生，出身书香

门第，父亲是莱比锡大学哲学教授，与牛顿的命运相似，莱布尼茨六岁丧父，由慈母抚养成才。15 岁改入莱比锡大学法律系，但他最有兴趣的却不是法律，而是数学。20 岁完成法学博士论文，校方以他太年轻为口实，拒授他法学博士学位。另一所大学仔细审阅他的论文，授予了他法学博士学位，且聘他为法学教授。当时他的兴趣已转向科学与数学，于是谢绝了法学教授的聘任，自由而专心地研究哲学和数学，终于和牛顿同时独立地创立了微积分，与牛顿形成英吉利海峡两岸双星辉映的灿烂数学文化。

莱布尼茨不仅对数学科学做出了划时代的贡献，而且对哲学、逻辑学、语言学、航海学和计算器具甚至历史学等方方面面都有重大成就。1673 年被选为英国皇家学会会员，1700 年被选为巴黎科学院院士，他是柏林科学院首任院长，普鲁士的腓特烈大帝称莱布尼茨说："此人本身就是一所科学院"，此言准确地表达了莱布尼茨学问之渊博和对科学发展贡献之巨大。

莱布尼茨的思想具有哲学家的气质，他研究数学时在思路和细节上充满了哲学与逻辑的特色，而牛顿的气质则是物理学家类型的，牛顿研究数学的思路与细节更多的是借助于物理上的启发，这两种风格各有千秋，如果两者结合起来，则会更为完美。莱布尼茨主张用自然主义限制有神论，用合乎理性的哲学替代世俗的信仰与迷信大杂烩的"野蛮哲学"，即用理性替代愚昧和上帝，为科学发展争夺地盘。所以莱布尼茨只是半个基督徒，是披着宗教外衣反宗教的正派的科学家。1875 年 5 月 10 日，马克思给恩格斯的信中说："我是钦佩莱布尼茨的。"恩格斯指出："当时的社会活动都不得不采取神学的形式。"在当时宗教横行的德国，莱布尼茨内心深处是反对封建神学和经院哲学的，但必须打着与上帝妥协的旗号，他称上帝是最高的数学家，上帝是按数学规律来设计和安排宇宙的。

6.8 第二次数学危机

牛顿与莱布尼茨初创微积分时,有些基本概念和细节没来得及加以严格地定义和论证,微积分本来就是讨论无穷过程和极限过程的科学,与人们有史以来习惯了的初等数学有本质区别。从现代高等数学的教学经验来看,即使高等数学已经经过两三百年的改造与完备化,大学一年级的同学接受微积分的思想和概念仍然十分困难,对其中很多概念,例如导数概念,仍然存有类似拒绝和排斥的心理,更何况牛顿与莱布尼茨是破天荒第一次向世人表述微积分!

贝克莱(G.Berkely)是爱尔兰科克郡的地方主教(1734 年)、哲学家。他针对牛顿微积分中的一些不严格之处,发表了一本叫做《分析学家,或致一位不信神的数学家》(The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, London, 1734),"分析学家"的主要矛头对着牛顿,"不信神的数学家"则攻击哈雷和莱布尼茨。当然,贝克莱的非难也得到了不少人的支持,其中不乏有名的数学家,例如法国著名数学家罗尔和荷兰数学家纽文斯。罗尔就说过:"微积分是巧妙的谬论的汇集",但是罗尔本人在微积分上也做出了许多工作,例如作为微分学基本定理的罗尔定理。贝克莱对牛顿的许多批评还是切中要害的。

下面引用牛顿的手稿《流数简论》中的话(引自《数学珍宝》PP.276~278,李文林主编,科学出版社,1998),看看当初牛顿在他的微积分中是如何使用"瞬"这个概念而引起贝克莱们的诘难的。

牛顿写道:

设有二物体 A 与 B 同时分别从 a, b 两点以速度 p 与 q 移动,所描画的线段为 x 与 y,若 A, B 作非匀速运动,A 从 a 点移动到 c,速度为 p 的 A 在某一瞬描画出无限小线段 $cd = p \times o$,B 在相同时刻

从 b 点移动至 g 点，在同一瞬内将描画线段 $gh = q \times o$（图 6-1）。

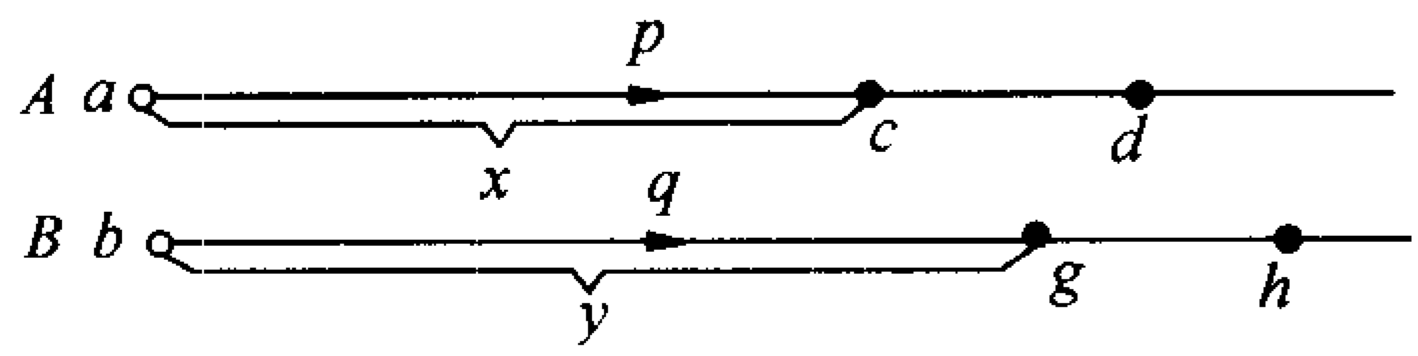


图 6-1

现设 x, y 之间的关系方程为

$$x^3 - abx + a^3 - dyy = 0 \tag{6.7}$$

我们可用 $x + po$ 和 $y + qo$ 分别代替 x 与 y 代入(6.7)得

$$x^3 + 3poxx + 3ppoox + p^3o^3 - dyy - 2dqoy - dqqoo - abx - abpo + a^3 = 0 \tag{6.8}$$

由(6.7)得

$$3poxx + 3ppoox + p^3o^3 - 2dqoy - dqqoo - abpo = 0 \tag{6.9}$$

(6.9)除以 o 得

$$3px^2 + 3ppox + p^3oo - 2dqy - dqqo - abp = 0 \tag{6.10}$$

其中含 o 的项为无限小，略之即得

$$3pxx - abp - 2dqy = 0 \tag{6.11}$$

从现代微积分的观点来审视，(6.11)的结论是完全正确的，如果把 p 与 q 按牛顿当年的记号，分别写成 $\dot{x}$ 与 $\dot{y}$，则(6.11)变成

$$3x^2\dot{x} - ab\dot{x} - 2dy\dot{y} = 0$$

再引用当年莱布尼茨的记号 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$，则得

$$3x^2\frac{dx}{dt} - ab\frac{dx}{dt} - 2dy\frac{dy}{dt} = 0,$$

为了不混淆，把(6.11)中的 d 改写成 c，则得

$$3x^2dx - abdx - 2cydy = 0$$

$$(3x^2 - ab)dx - 2cydy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ab}{2cy} \tag{6.12}$$

(6.12)是现代常微分方程论中的一个一阶可分离变量的方程。可见微分方程,即含未知函数 $y(x)$ 与其导数(牛顿当时称为流数)的方程是牛顿创立微积分时同时产生的,微积分与微分方程是孪生姊妹,微分方程这一数学中心学科的首创权亦应归于牛顿名下。

下面是贝克莱在《分析学家》一书中对牛顿的《流数简论》的批评。

贝大主教云:

"这种方法究竟是否清楚,是否没有矛盾且可以加以证明,或者相反,只是一种含糊的、令人反感的和靠不住的方法?我将以最公正的方式来提出这样的质疑,以便让你们,让每一位正直的读者做出自己的判断。"

贝克莱的这些质问的确事出有因,上面牛顿对瞬 o 没有数学定义,一会儿让它作除数,可见 o 不是零,一会儿把它忽略掉,又认为 o 为零,这里边似有需要澄清的矛盾。

由于运用牛顿-莱布尼茨的微积分方法总能得出正确结论,所以牛-莱坚信微积分是科学,必须反击贝克莱的攻击,发动微积分保卫战,牛顿、莱布尼茨等人纷纷著文还击贝克莱,无奈由于不能建立严密牢靠的基础,对"瞬"、"流数"等关键词给不出令人不可置疑的定义,所以未能及时驳倒贝克莱,这就是震惊数学界的第二次数学危机。

当然,真理是在牛顿们手里,挑战者贝克莱与第一次数学危机的挑战者希帕索斯不一样,贝氏是出于保守和宗教的偏见行事的,而不是为数学真理而争而论,希帕索斯则是数学上敢于与保守的学说决裂,锐意进取,为创立新的思想体系死不悔改的革新派,是企图跳出传统框架的"异教徒"。

经过柯西(Cauchy)、欧拉(Euler)、波尔察诺(Bolzano)和外尔斯特拉斯(Weierstrass)等众多数学家的努力建设,修筑了微积分的坚实的基础,第二次数学危机才算彻底克服。

微积分的思想博大精深，例如无穷小和微商等，不仅牛顿、莱布尼茨时代，就是今日，也还是个值得细究的问题，它们究竟是实在的东西，还是一种观念，仍然可以讨论；事实上，一种数学概念，可能只是一种解决问题的手段或思维方法，这未必是唯心主义，数学当中莫非不能发明新技术或推理计算的艺术吗？

6.9 代牛顿圈改《流数简论》

(1) 什么是瞬时速度

我们欲知一辆汽车上午 8 时的速度，司机告诉我们该车从 8 时到 9 时运行了 40 公里，这能断定 8 时的速度是每小时 40 公里吗？显然不敢如此武断。事实上，该车在一小时之内往往多次改变速度，甚至 8 时它还停在车站，速度为零。

瞬时速度是十分重要的，例如汽车肇事后交警关心的就是瞬时速度，即要调查该车出事时的即时速度，至于它在一小时内走了多远，并不是关心的事。

显然，如果测出 8 点零 1 秒时，汽车前行了 20 米，就说该汽车在 8 点的瞬时速度是每秒 20 米左右就可信多了，因为汽车的速度是连续变化的，在 1 秒的时间内它来不及有太大的变化，可以用平均速度每秒 20 米来代替 8 点钟时的瞬时速度，而且，时间间隔越小，用平均速度代替瞬速度时越可信。设路程随时间的函数关系是 $f(t)$，欲知 t_0 时刻的瞬时速度，考虑下一时刻 $t_1=t_0+\Delta t$，Δt 是从 t_0 到 t_1 的“一瞬间”，则在从 t_0 到 t_1 的时间内的平均速度为 $\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$，而且 Δt 越小，这种平均速度越与 t_0 时刻的真实的瞬时速度接近，极而言之，$\Delta t \to 0$ 时，则极限值

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} \tag{6.13}$$

就是 t_0 时刻的速度了。(6.13)式的极限如果存在,则记成

$$\dot{f}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

称$\dot{f}(t_0)$为函数 $f(t)$在 $t=t_0$ 处的导数,也称其为微商,牛顿称之为"流数",莱布尼茨用符号$\frac{\mathrm{d}f(t_0)}{\mathrm{d}t}$来表示它。

(2) 变速运动的路程

设一物体的速度 $v(t)$随时间连续变化,问从 t_0 时刻到 t_1 时刻的路程是多少,记 $\Delta t=t_1-t_0$,设 $t=t'$时速度最小,则$v(t')\Delta t$ 比欲求的路程少,设 $t=t''$时的速度最大,则 $v(t'')\Delta t$ 比欲求的路程多,于是可以找到一个时刻 $t=\xi\in[t',t'']$,使得$v(\xi)\Delta t$ 恰为所求之路程。

(3) 牛顿《流数简论》中(6.11)式的推导

设 A 于 t_0 时刻到达 c 点,c 点的路程为$x(t_0)$,t_1 时刻到达 d 点,d 点的路程为$x(t_1)$,令 $t_1-t_0=\Delta t$,则

$$x(t_1)-x(t_0)=cd=p(\xi_1)\Delta t,\ \xi_1\in[t_0,t_1]$$

同理有

$$y(t_1)-y(t_0)=gh=q(\xi_2)\Delta t,\ \xi_2\in[t_0,t_1]$$

由于 $x^3(t)-abx(t)+a^3-\mathrm{d}'y^2(t)=0$ 得

$$x^3(t_i)-abx(t_i)+a^3-\mathrm{d}'y^2(t_i)=0,\quad i=0,1$$

$$[x(t_0)+p(\xi_1)\Delta t]^3-ab[x(t_0)+p(\xi_1)\Delta t]+a^3$$
$$-\mathrm{d}'[y(t_0)+q(\xi_2)\Delta t]^2=0$$

$$3x^2(t_0)p(\xi_1)\Delta t+3x(t_0)p^2(\xi_1)\Delta t^2+p^3(\xi_1)\Delta t^3$$
$$-abp(\xi_1)\Delta t-2\mathrm{d}'y(t_0)q(\xi_2)\Delta t$$
$$-\mathrm{d}'q^2(\xi_2)\Delta t^2=0$$

由于 $\Delta t\neq 0$,上式除以 Δt 得

$$3x^2(t_0)p(\xi_1)+3x(t_0)p^2(\xi_1)\Delta t+p^3(\xi_1)\Delta t^2$$
$$-abp(\xi_1)-2\mathrm{d}'y(t_0)q(\xi_2)-\mathrm{d}'q^2(\xi_2)\Delta t=0,\qquad(6.14)$$

令 $\Delta t \to 0$，这时，$\xi_1 \to t_0$，$\xi_2 \to t_0$，于是对(6.14)式取 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ 得

$$3x^2(t_0)p(t_0) - abp(t_0) - 2d'y(t_0)q(t_0) = 0,$$

其中 $p(t_0) = \dot{x}(t_0)$，$q(t_0) = \dot{y}(t_0)$，再由 t_0 的任意性得

$$3x^2(t)\dot{x}(t) - ab\dot{x}(t) - 2d'y(t)\dot{y}(t) = 0。$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ab}{2d'y(t)} \tag{6.15}$$

6.10 皮囊悖论

1897年，康托尔指出："一个集合就是指我们察觉到的或在我们思维中的一些确定的、不同事物的总体；这些事物称为该集合的元素。"从此集合成了整个近代数学的基石，希尔伯特(Hilbert)对康托尔的集合论欢呼道："康托尔的集合论为我们创立了数学上最广泛、最有力的一个分支，一个没有人能把我们赶出去的天堂。"

仔细推敲上述关于集合的描述，我们察觉到，它不像一个严格的数学定义；事实上每个数学概念都要依赖于先于它而定义好的一些概念来定义，如果依此递推，追根溯源，必然有一批最简明最原始的概念，已经没有比它更原始的概念来定义它们，集合就是这种原始概念之一。这种朴素原始的集合概念，是在逻辑上惹是生非的根源之一。

按康托尔集合的概念，考虑26个英语字母组成的集合 Ω，由于 Ω 集合不是一个英语字母，所以 $\Omega \notin \Omega$，即有的集合不是自己的元素，这是容易接受和容易理解的现象。若考虑由含25个以上的元素组成的集合为元素组成的集合 Λ，例如 $\Omega \in \Lambda$；因为含25个以上元素的集合不止25个，所以 Λ 的元素个数也超过了25个，于是 $\Lambda \in \Lambda$。即按康托尔的观点，允许该集合是自己的元素，存在 $A \in A$ 的现象，也有 $B \notin B$ 的现象，其中 A, B 是某些集合。由此，我们可以提出

如下的悖论：

皮囊悖论：一个透明封闭的不可穿透的皮囊，里面装了一些元素，于是构成了一个集合 A，按康托尔的观点，如果 $A\in A$，则表明这个装了固定的一些元素的皮囊又装在自己里面!

6.11 整体等于其半

康托尔(Cantor)，1845 年生于俄国彼得堡，丹麦—犹太血统，11 岁迁居德国，1863 年考入柏林大学，师从世界著名数学家维尔斯特拉斯，攻读数学，1867 年获数学博士学位，1879 年升任哈雷大学教授，集合论创始人。他的思想方法奇特而富于革命性，受同时代不少传统数学家的排挤，患精神分裂症，于 1918 年去世。康托尔在数学上创造极丰，科学家罗素称康托尔的业绩是“这个时代所能夸耀的最巨大的工作。”下面我们欣赏他的几个脍炙人口的重要成果。

数学奇人康托尔第一个提出并解答了自然数多还是正偶数多的问题。19 世纪的数学家们觉得显然是自然数多，认为偶数与奇数各占自然数之半。康托尔一语惊人，他回答说，自然数与自然数集合中的偶数一样多! 康托尔独创了“势”这一重要数学概念，你看两个集合{1, 3, 5}与{2, 4, 6}，把它们两方的元素“配对儿”成三家：(1, 2)，(3, 4)，(5, 6)，即这两个集合元素间能一一对应，恰反映了这两个集合元素个数一样多。于是对于不论有限集合还是无穷集合，当且仅当两者元素间能一一对应者，则称两者的“势”相等，或称两者元素一样多。可见自然数与其真子集——全体正偶数的个数一致；事实上，双方可以如下配对(图 6-2)。

在有限集合中，真子集元素个数当然地要比原来集合的元素个数少，这正是“全体大于部分”的欧几里得第五公理，这已是几千年来人们根深蒂固的传统观念。自从康托尔捅了无穷集合这个马蜂窝，

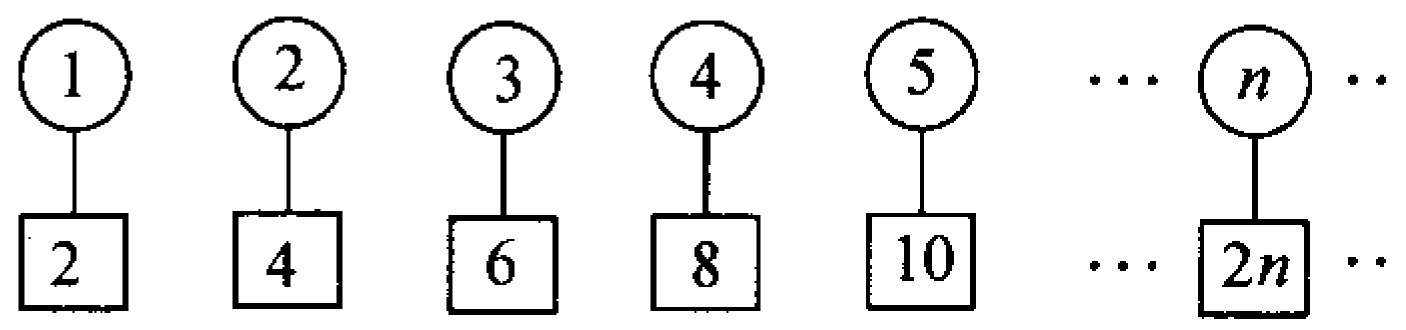


图 6-2

竟敢谈“整体等于其半”的不可理喻的事，一时间引起包括克罗内克(L.Kronecker)和庞加莱(H.Poincaré)等权威数学家的猛烈反对，但康托尔却终身不渝地捍卫着自己的学说。

6.12 神秘的康托尔尘集

把[0,1]区间三等分，弃中间的子区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，对于剩下的两个子区间再分别三等分弃中间的开区间，如此反复进行“弃中”操作，我们计算一下最后剩下的部分总计有多长，丢弃的部分总计有多长？设丢弃部分总长度为 l，则

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\cdots \\ &= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots\right] \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=1 \end{aligned}$$

即丢弃部分之总长就是[0,1]区间的全长！剩下的点们占有的总长度为零，显然剩下的点是无穷多的，但由于这些残留的点占有的总长度为零，它们像尘埃似的散落在[0,1]区间上，所以称其为 Cantor 尘集。

下面我们“统计”一下这个尘集中的点有多少？为此，我们从 10 进制、2 进制和 3 进制小数的表示法谈起。

众所周知,一个小数 $a\in[0,1]$可以表成十进制形式

$$a = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$$
$$= \alpha_1\frac{1}{10} + \alpha_2\frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_n\frac{1}{10^n} + \cdots$$

其中 $\alpha_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$, $i=1,2,\cdots$

同理 a 可表成二进制形式

$$a = 0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots$$
$$= \beta_1\frac{1}{2} + \beta_2\frac{1}{2^2} + \cdots + \beta_n\frac{1}{2^n} + \cdots$$

其中 $\beta_i\in\{0,1\}$, $i=1,2,\cdots$

a 可表成三进制形式

$$a = 0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n\cdots$$
$$= \gamma_1\frac{1}{3} + \gamma_2\frac{1}{3^2} + \cdots + \gamma_n\frac{1}{3^n} + \cdots$$

其中 $\gamma_i=\{0,1,2\}$, $i=1,2,\cdots$

例如造 Cantor 尘集时,第一次丢弃的区间在三进制之下为

$$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=(0.1,0.2)$$

第二次丢弃的两个区间在三进制中为

$$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) = (0.01,0.02)$$
$$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9},\frac{2}{3}+\frac{2}{9}\right)$$
$$= (0.21,0.22)$$

不难证实,第 n 次丢弃的区间在三进制中为

$$(0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1}1,0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1}2)$$

其中 $\gamma_i\in\{0,2\}$, $i=1,2,\cdots,n-1$。说明在丢弃的开区间每点是形如 $0.\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1}1\gamma_{n+1}\cdots$的三进制小数。

考虑集合

$$X=\{x \mid x=\gamma_1\frac{1}{3}+\gamma_2\frac{1}{3^2}+\cdots$$
$$+\gamma_n\frac{1}{3^n}+\cdots,\ \gamma_i\in\{0,2\},\ i=1,2,\cdots\}$$

显然 $X\subset[0,1]$,令 Y 是造 Cantor 尘集时丢弃的区间中的点构成的集合,则 $X\cap Y=\varnothing$,所以 X 是 Cantor 尘集之子集。

若对于[0,1]中每个点 a,用二进制表达时

$$a=a_1\frac{1}{2}+a_2\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\frac{1}{2^n}+\cdots,a_i\in\{0,1\}$$

则可以写出一个三进制下的数 b 与之对应

$$b=2a_1\frac{1}{3}+2a_2\frac{1}{3^2}+\cdots+2a_n\frac{1}{3^n}+\cdots\in[0,1]$$
$$=b_1\frac{1}{3}+b_2\frac{1}{3^2}+\cdots+b_n\frac{1}{3^n}+\cdots$$

其中 $b_i\in\{0,2\},i=1,2,\cdots$

反之,任给一个三进制小数

$$b=b_1\frac{1}{3}+b_2\frac{1}{3^2}+\cdots+b_n\frac{1}{3^n}+\cdots$$

其中 $b_i\in\{0,2\}$,则可写出一个二进制小数

$$a=a_1\frac{1}{2}+a_2\frac{1}{2^2}+\cdots+a_n\frac{1}{2^n}+\cdots$$

与之对应,其中 $a_i=\frac{1}{2}b_i,\ i=1,2,\cdots$

可见 X 与[0,1]中的点一一对应,即 X 中的点与[0,1]中的实数一样多,而 X 是 Cantor 尘集的子集,所以 Cantor 尘集中的点也不比[0,1]中的实数的“个数”少,于是只能是 Cantor 集的元素个数(即势)与[0,1]中的实数个数一致。

与我们的习惯思维似有矛盾:把[0,1]区间挖的千疮百孔,丢弃

的总长度和[0,1]区间一样长,残余的点们占有的总长度仅为0,0就是没有呀! 但是,这些残余点的个数竟和[0,1]上全体点一样多,几乎全部区间都扔掉了,但论点的多寡,似乎像没有丢掉什么一样多。

由此例可见康托尔此人思维之深邃,也使我们领会到,切不可把有限范围内的思维定势移植到无穷范围去照旧看待世界,无穷范围内是什么神出鬼没的事都可能发生的!

数学上,把与自然数集合 N 等势(即可以一一对应)的集合的"势"记成 a,把与[0,1]等势的集合的势记成 c,康托尔把"势"又称"浓度"或"基数",有限集合的基数就是其元素的个数,例如{1,2,3}的基数是3;但对无穷集合的基数,例如 a 或 c,就不是自然数了,康托尔把无穷集的基数叫做"超限基数"。

显然 $a<c$,一个尖锐的问题是:

(*)存在集合 X,使得 $a<b<c$ 吗? (*)其中 b 是 X 的基数。

这里所谓势的大小是指:两集可一一对应时,说两者等势;两集不能一一对应时,若甲集与乙集的子集一一对应,则称甲的势比乙的势小。

(*)是现代数学当中十分之困难的一个问题,几乎难到令人绝望的程度,数学家称其为"连续统假设"感觉到这种集合 X 不存在,又无力证实,故称为"假设"。

6.13 理发师悖论与第三次数学危机

1919年,科学家罗素提出如下的理发师悖论:

"村子里仅一名理发师,且村子里的男人都需要刮胡子,理发师约定:给且只给自己不给自己刮胡子的人刮胡子。"

有好事者问理发师:"理发师先生,你自己的胡子谁来刮?"

理发师无言以对。因为如果理发师说"我自己的胡子自己刮",

那么根据他与大家的约定，理发师不能给自己刮胡子的人刮胡子，即这时他不该给自己刮胡子；如果理发师说“我的胡子不自己刮”，那么根据他与大家的约定，理发师应给自己刮胡子。可见理发师怎么回答也不行！

上述理发师悖论可以稍微数学化地来表述，设集合

$$B=\{自己刮胡子的人\}$$

若理发师$\in B$，即理发师是自己刮胡子的人，但由“约定”，他不该给理发师刮胡子，即理发师$\notin B$，矛盾！若理发师$\notin B$，即理发师不自己刮胡子，由“约定”，他应给自己刮胡子，即理发师$\in B$，矛盾！

罗素进一步把上述理发师悖论变成下面的一个数学悖论，称为罗素悖论：

“设 $B=\{集合 A \mid A\notin A\}$，问 $B\in B$ 还是 $B\notin B$？”

显然 $B\neq\varnothing$；若 $B\in B$，由 B 的定义，B 是B 中一元素时，B 应有性质$B\notin B$，矛盾！若 $B\notin B$，由 B 的定义，$B\in B$，矛盾！于是这里发生了无论如何摆脱不了矛盾的荒唐局面！

在罗素表述悖论时，字字句句都未违反康托尔朴素集合论的观点，为什么出现了自相矛盾的事呢？要害是允许写 $B\in B$，即谈某些集合自己是自己的元素，亦即允许我们前面提出的“皮囊悖论”的存在；为了排除罗素悖论，保卫已建成的数学大厦，数学家策墨罗(Zermelo)、弗兰克尔(Freenkel)等抛出一套所谓公理集合论的公理系统，按他们的公理规定，禁谈 $B\in B$，从而解除了第三次数学危机。

第三次数学危机出现的前夕，数学界一派升平乐观气氛，1900年，庞加莱在第二次国际数学家大会上自信而兴奋地宣称：“我们可以说，现在的数学已经达到了绝对的严格。”过不了几年，罗素悖论犹如晴天霹雳，使数学界一片哗然，希尔伯特惊呼：“在数学这个号称可靠性与真理性的模范里，每个人所学、所教、所用的概念及结构和推理方法，竟导出不合理结果；如果数学思考也失灵的话，那么我

们到哪里去找可靠性和真理性呢?”

第一次、第二次和第三次数学危机的出现和排除使数学家们对数学的认识更为清醒了,人们有了思想准备,也许还有第四次、第五次数学危机乃至第 n 次($n\geqslant3$);但可以相信,人类有能力排除任何数学危机,而且,每次数学危机爆发之日,就是新的数学概念、新的数学理论孕育之时,随着危机的排除,数学则会得到划时代的进展与突破。

6.14 悖论欣赏

前面我们见识了罗素的理发师悖论、集合论中的罗素悖论和皮囊悖论,我们看到,悖论不是谬论,它虽然也令人感到别扭和不妥,但从它所在的理论体系之内,并不能指出其错误的成因,却能从悖论推导出自相矛盾的结论,为排除悖论,必须增补改造生出悖论的原理论体系。

生活中和数学上还有不少精彩的悖论,下面列举一批,供读者欣赏与分析。

(1) 说谎者悖论

一个克里特人说:“我说这句话时正在说谎。”然后这个克里特人问听众他上面说的是真话还是假话?

这个悖论出自公元前六世纪希腊的克里特人伊壁孟德,使得希腊人对上述问题大伤脑筋,连西方的圣经《新约》也引用过这一悖论。

事实上,若回答这个克里特人说,他这句话是说的真话,那么他“正在说谎”,矛盾;如果回答这个克里特人说,他这句话是假话,即他所称“正在说谎”是假的,那么他正在说真话,又矛盾! 可见对这位克里特人的“我说这句话时正在说谎”不可判其真亦不可判其伪。

(2) 柏拉图与苏格拉底悖论

柏拉图是苏格拉底的学生，他们都是公元前400年左右的科学家和哲学家，柏拉图（公元前427～369）被誉为那个时代最有学问的人，两位都热心于数学，欧几里得就是柏拉图的门生。柏拉图于公元前387年创建希腊雅典学院，大学门口有一横匾，上书："不懂几何者不得入内"。这所大学一直开办了900年，于公元529年被罗马王以"异端邪说"的罪名查封，实为人类史上反动统治者仇恨科学破坏科学的先河。柏拉图的名著《理想国》（共和国）深刻阐述了他的政治与科学主张。书中有言："我们竭力奉劝我国未来的主人翁学习算术，为了灵魂本身去学。"柏拉图的门生对数学做出了重大贡献，例如欧几里得的《几何原本》。

下面是苏格拉底与柏拉图师生的一段对白：

柏拉图调侃他的老师，曰："苏格拉底老师下面的话是假话。"

苏格拉底对曰："柏拉图上面的话是对的。"

若问柏拉图、苏格拉底二人的话是真话还是假话，你该怎样判断呢？

如果柏拉图的那句话是真话，即苏格拉底下面的话当真是假话，于是"柏拉图上面的话是对的"为假话，即柏拉图上面那句话是假话，与假设"柏拉图的那句话是真话"矛盾；如果柏拉图的那句话是假话，即苏格拉底下面的话是真话，于是"柏拉图上面的话是对的"为真话，即柏拉图上面那句话是真话，与假设"柏拉图那句话是假话"矛盾。于是不管说柏拉图说的那句话是真是假都说不通。

同理可以推导出，不论假设苏格拉底的话是真是假，都会引起矛盾。

(3) 鸡蛋悖论

先有鸡还是先有蛋？

(4) 书名悖论

美国数学家斯缪灵（Smullyan）写了一部标题为《这本书的书名

是什么》的书。

问：斯缪灵的这本书的书名是什么？

(5) 印度父女悖论

早上女儿在卡片上写道："今日下午三时之前，您将写一个'不'字在此卡片上。"随即女儿要求父亲判断她在卡片上写的事是否会发生；若判断会发生，则在卡片上写"是"，否则写"不"。

问：父亲写"是"还是写"不"？

(6) 意外考试悖论

教授宣布："下周某日进行一次'意料之外的'考试，但你们不可能事前推测出考试在哪一天进行。"

学生不服气，说："我们推断考试不会在星期五进行，因为星期六和星期日是双休日，不会进行考试，如果在星期五考试，则下周星期四那天晚上我们就可以推测出来了，于是您的考试只能在星期一到星期四某天进行，但不能在星期四进行，不然我们在下周星期三就可以推测出来，依此类推，所以您所说的考试不会进行，纯属吓唬人。"

问：学生的论证成立吗？

事实上，考试可以在下周五进行，学生们意料之中推断的事是星期五不能考试，结果老师星期五来考，不正是意料之外的考试吗！所以学生的论证不成立。

前面的鸡蛋悖论、书名悖论与父女悖论请读者自行分析。下面举出几个数学含量高的悖论。

(7) 蠕虫悖论

一只蠕虫从一米长的橡皮绳之一端以每秒 1 厘米的速度爬向另一端，橡皮绳同时均匀地以每秒伸长 1 米的速度向同方向延伸，蠕虫会爬到另一端吗？蠕虫每前进 1 厘米，同时另一端却拉远了 1 米，近不抵疏，怕是永远爬不到头了！

算算看：

第 1 秒，虫子爬了绳子的$\frac{1}{100}$

第 2 秒，虫子爬了绳子的$\frac{1}{200}$

……

第 n 秒，虫子爬了绳子的$\frac{1}{n\times 100}$

前 2^k 秒虫子爬的总路程占绳子全长的比例为

$$\frac{1}{100}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

而

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}\\
&=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&\quad+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{项}}\\
&=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{项}}=1+\frac{k}{2}
\end{aligned}$$

当 $k=198$ 时，$1+\frac{k}{2}=100$，于是

$$\frac{1}{100}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{198}})>1$$

所以不超过 2^{198}秒，小虫可爬到另一端。

这一悖论是直觉骗人所致。

(8) 自然语言表达数学的悖论

先看几个用自然语言表达数学概念的例子。

①第 100000000 个素数。

①虽然未能构造性地给出第亿个素数是几，但这一描述确实唯一确定地是指出了那个素数。

②12345678910 的平方。

②明确无误地定义了一个整数值。

③比 π^{100}大的最小整数。

③定义了一个自然数。

①②③中使用的语言是汉字、阿拉伯数字和希腊字母等人类的自然语言；我们称每个汉字、外文字母和阿拉伯数字为“自然字”，于是①②③中的自然字不超过 100 个，即①②③用不超过 100 个自然字分别定义了一个自然数。

语言悖论：n_0 是用不超过 25 个自然字不能定义的最小正整数.

数一数上述 n_0 定义中的自然字只有 23 个，没有超过 25 个，即用不超过 25 个自然字即定义了 n_0，与 n_0 是用不超过 25 个自然字不能定义相矛盾。

这个悖论的发生机制是用自然字定义时的字数如何确定无严格界定的标准，另外什么叫做“不能定义”也含义模糊。

(9) 异性悖论

两辆大轿车上都乘 60 名乘客，甲车上皆男士，乙车上皆女士(不考虑司机)，后来甲车上有 30 名男士转上乙车，之后从乙车上下来 30 名乘客，不知其中几男几女，上了甲车，问两车哪辆异性多?

若不假思索，可能认为乙车开始时从甲车来了 30 个异性，后来转入甲车的异性却不一定是 30 个女士，所以乙车的异性多，至少不少于甲车。其实这是一种思维单向性的误导。事实上，最后两车上的异性一样多。这个有趣的结果，相信读者认真起来，经过一番逻辑推导即可证明。

(10) 抛球悖论

甲用$\frac{1}{2}''$把球抛给乙，乙随即用$\frac{1}{4}''$把球抛给甲，甲随即用$\frac{1}{8}''$把球抛给乙，如此往返抛掷，以至无穷次抛球，最后球落谁手？

算一算球运动的总时间为

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1(\text{秒})$$

即球1″后即停止了。

既然1″后球停止了，停在哪里呢?!

(11) 芝诺悖论

芝诺(Zeno)说："运动不存在。"他的证明如下：如果一物从A点直线运动到B点，则它到B之前必须经过AB线段中点C_1至少一次；同时，它必须经过AC_1中点C_2至少一次，如此递推，它必须经无穷个点$C_1, C_2, \cdots, C_n$，……每到C字号点一次，都需耗用一定的时间，于是它永远到不了B点，所以一物永远不会从A运动到B，即物不能运动。

芝诺的谎话骗不了三岁儿童，因为到处都有运动着的物体。

从数学上看，无穷段时间之和未必是无限的，例如上面的抛球时间是1″，但可抛无穷次。

(12) 龟兔悖论

乌龟对兔子说："你不要想追上我，我现在在你前方1米，虽然你的速度是我的百倍，但等你追到我现在的地点，我又向前爬了1厘米到C_1点，等你追到C_1点，我已爬到距你$\frac{1}{100}$厘米的C_2点，如此下去，你总在C_i点，我却在你前方C_{i+1}点。"兔子不服气，可又说不过乌龟。实际上，如果真比赛起来，用不了1″，兔子已跑在乌龟前面了。

请读者做兔子的辩护人。

(13) 选举悖论

A,B,C 竞选，民意测验表明：有$\frac{2}{3}$的选民愿选 A 而不愿选B，有$\frac{2}{3}$的选民愿选 B 而不愿选C。于是 A 说："根据$\frac{2}{3}$的选民保我而反B，$\frac{2}{3}$的选民保 B 而反 C，说明我优于 B，B 优于C，于是我优于 C，从而我最优，应选我。"C 不服，反唇相讥道："那$\frac{2}{3}$保 A 反B 之外的$\frac{1}{3}$选民反 A 而保C，那$\frac{2}{3}$保 B 而反 C 的选民之外$\frac{1}{3}$的选民反 A 而保C，则形成$\frac{2}{3}$的选民保 C 而反A，按您的逻辑，我亦优于您，您又优于 B，我 C 最优，应选我。"B 接着说："按你们的说法，B 优于C，C 优于A，则 B 优于A，即我亦最优，应选我。"

这种民意测验能说明什么呢？

上述悖论最初出自肯尼思·阿洛(K. Arrow)之手，阿洛于 1972 年获诺贝尔经济学奖，1951 年他给出关于民主选举的所谓选举公理，以求得选举的公平合理，避免发生独裁者从中操纵选举的可恶问题。后来他又证明出一条定理，指出不存在满足 Arrow 公理的十全十美的民主选举。

欲深究"选举数学"的读者可阅读《数学模型基础》(王树禾著，中国科学技术大学出版社，1996)。

(14) 广义芝诺悖论

一只飞虫在两骑自行车者之间来回飞行，自行车相对而行，两车匀速，皆每小时 2 公里，开始相距 1 公里，当两车在中途相遇时，飞虫飞向哪一边？它共飞行了多少公里？

这个问题如果考虑飞虫不停折返，则计算它的飞行里程比较复

杂，事实上，设飞虫飞速为 v_0，则它共飞行了$\frac{1}{4}v_0$ 公里，因为两车运行时间与飞虫的飞行时间都是 1 刻钟。至于飞虫在两车相遇时飞向何方，则与(10)中的抛球悖论相似。

更有趣的是该悖论的逆问题：两自行车及一飞虫从相距为 1 公里的 A,B 之中间 C 出发，两车相背匀速行驶，速度为每小时 2 公里，虫在两车间不停地匀速往返，问两车到达 A 与 B 点时，虫在何处？

答案出乎我们的直觉之外，竟是：飞虫可以在两车之间的任何一点。事实上，若把飞虫放在 A,B 间任一点，两车分别从 A,B 两点相对而行，结果两车及飞虫同时于 A,B 中点 C 会合，所以其逆过程则是两车行至 A 与 B 时，虫可飞至 A、B 间任一点处。这一答案真是不可思议！正如科学家普里斯特所说："悖论中充满着令人惊奇的内容，"这位年轻的数理逻辑专家 1979 年号召："应当接受悖论，学会与悖论好好相处。"1930 年，哲学家维根斯坦口出狂言："我敢预言，总会有一天，出现包含着矛盾的数学研究，人们将会真正感到自豪，因为他们把自己从协调性的束缚中解放出来。"本书作者认为维根斯坦的话似有道理，不可全信，也不可全不信。

悖论不是坏东西，你看悖论是多么生动、恢谐和令人机智、聪明地进行思考；而某些重要悖论的出现，恰为科学进步，新概念诞生的接生婆；悖论不但有趣，而且悖论有用。

6.15 哥德尔抖出了数学的家丑

库尔特·哥德尔(Kurt Gödel)，1906 年生于奥地利布吕恩城的一个富裕家庭，父母皆受过高等教育，哥哥是医学博士。他 1924 年考入维也纳大学，学习理论物理专业，后参加"维也纳小组"，这一"小组"是一群天才的年轻数学家的学术团体。他 1930 年获哲学博士学

位。1942年结识爱因斯坦，从此两人成为知心朋友直至1955年爱因斯坦去世。他1951年获耶鲁大学荣誉博士学位和首届爱因斯坦奖金，大科学家冯·诺伊曼发表贺词称哥德尔的工作是“巨型陆标”；哥德尔1952年获哈佛大学荣誉博士学位，1955年当选美国科学院院士，1975年获福特总统颁发的国家科学勋章。1978年1月14日与世长辞，死因是“营养不良和食物不足”。代表作是1931年在《月刊》杂志上发表的《论‘数学原理’及有关系统中的不可判定命题》。该文被誉为“20世纪最有意义的数学真理”。

哥德尔的不可判定命题向数学基础进行了严肃的挑战。一个命题就是一种判断，不论是否已经知道它的真假，总是或真或假，二者必居其一，例如：

①台湾是中国的领土。

②秦始皇是20世纪的中国皇帝。

①②都是命题，①是真命题，而②是假命题。

假命题是不可证的。

如果不考虑真假，若 A 是一个命题，则“A 不可证”也是一个命题。

下面是著名的“哥德尔命题”：

$$A:“A\text{ 不可证}”。$$

哥德尔说，他考虑的这个命题与说谎者悖论存在相似之处。

A 的否定命题记成“$\urcorner A$”，$\urcorner A$ 读成非 A。

下面证明哥德尔命题 A 与其否定命题 $\urcorner A$ 皆不可证明。

(1) A 真

事实上，若 A 假，即“A 不可证”为假，于是 A 可证，从而 A 假且 A 可证，此与假命题不可证矛盾，所以 A 真。

(2) A 不可证

若 A 可证，则“A 不可证”为假，于是 A 假，与(1)中得到的 A 真

相违,所以 A 不可证。

(3) $\urcorner A$ 不可证

由(1)知 A 真,于是$\urcorner A$ 是假的,所以$\urcorner A$ 不可证。

由(2)与(3)知 A 与$\urcorner A$ 同时不可证。即对于命题 A,其真假不可判定!

19 世纪到 20 世纪 30 年代,数学家克服了数学的危机,巩固了数学的基础,建立了丰功伟绩,涌现出大量的新理论,解决了一大批十分困难的数学问题,数学界一派乐观情绪,甚至认为凡能用数学语言明确提出的问题,都必须而且能够严格地加以证明或证伪,谁也没想到会存在不能证其真也不能证其伪的命题。大数学家希尔伯特 1930 年发表《数学的基础》一文,提出数学史上闻名于世的"希尔伯特纲领",其要点有二:一是证明形式化(建立公理系统,使用形式(符号)语言)之后,一切数学系统内的定理都是可证的;二是证明形式化之后,数学系统是完备的,即一切数学真理都将是这个形式系统的定理。

哥德尔的不可判定命题宣判了希尔伯特纲领的破产。

古今中外,多少平凡的人和伟大的人物,都赞不绝口地歌颂着数学的完美、严谨和和谐,高斯说:"数学是科学的皇后",伦尼叶则夸奖"美是数学的一个基本特征,数学真理永远是美丽的,而美的东西总是真的。"哥德尔深刻,哥德尔古怪,他并不因为自己是数学家而沾沾自喜于数学光明的一面,他揭露了数学不完备性的阴暗面,抖出了数学的家丑,明确了数学的确定性正在丧失!

一部充满了光辉成就的数学史,同时也是一部数学灾难史,悖论和危机此伏彼起,矛盾和难题层出不穷,其中有的可以克服,有的则不可克服! 数学是美丽的,数学是丑陋的,它的丑与美都值得我们学习,都值得我们欣赏。

7 思想篇

不确定性确实使矛盾出现并且必须得以解决。至今已有25个世纪之久，数学家们一直在改正他们的错误，并且看到了这门科学欣欣向荣，使他们对未来充满希望。

——布尔巴基

7.1 从秃头悖论谈起

一位已经谢顶的老教授与他的学生争论他是否为秃头的问题。

教授："我是秃头吗?"

学生："您的头顶上已经没有多少头发，对不起，确实应该说是。"

教授："你秀发稠密，绝对不算秃头，问你，如果你头上脱落了一根头发之后，能说变成了秃头吗?"

学生："我减少一根头发之后，当然不会变成秃头。"

教授："好了，总结我们的讨论，得出下面的命题：

'如果一个人不是秃头，那么他减少一根头发仍不是秃头，'你说对吗?"

学生："对！"

教授："我年轻时代也和你一样一头秀发，当时没有人说我秃

头，后来随年事的增高，头发一根根减少到今天这个样子。但是每掉一根头发，根据我们刚才得到的命题，我都不应称为秃头，这样经有限次头发的减少，用这一命题有限次，结论是：

我今日仍不是秃头。"

学生笑而无语，教授把他故意的诡辩称之为"秃头悖论"，并向学生讲授起模糊数学的理论和应用。

至今模糊数学已经发展成一门不但充满哲理、趣味盎然，而且应用极广的数学分支。

事实上，宇宙间的事物并不总是非此即彼，世界上的人并不总是"不是我们的朋友，就是我们的敌人"，我们的立场也并非"凡是敌人拥护的我们就要反对，凡是敌人反对的我们就要拥护"。日常生活当中，有众多模糊的说法，诸如"大个子"，"小青年"，"水不深"，"天气不冷"，等等，更有甚者，例如病毒，它有些生命现象，例如分裂繁殖，它既没有细胞核又无细胞壁，你说它是生物还是非生物?! 又例如牡蛎，泥里筑窝，水中游戏，大量繁衍后代，有性生殖，但牡蛎的性别却随年龄与季节的变化，使得雌雄有别的"天理"变得十分模糊！ 1965 年以前，数学界对种种模糊现象故意视而不见，按经典的确定性数学的理论和方法，对这些"讨厌的"模糊对象，既无法推理，也不好计算，不采取视而不见的态度又能怎么办呢?! 例如从集合论的观点，一个元素或属于给定的集合 A 或不属于这一集合 A，二者只能发生其一。如果用所谓集合 A 的特征函数来表示，则有

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A\\ 0, & \text{当 } x\notin A\end{cases}$$

用这种方式来解决秃头问题，怎么回答"教授是否属于秃头集合"呢！

1965 年，加利福尼亚大学控制论专家 L. A. 查德(L. A. Zadeh)首次提出模糊集合的概念，开辟了对模糊事物的数学研究，诞生了一个新的数学分支——模糊数学。

以“老年集合”和“年轻集合”为例，分别记之为 $\underset{\sim}{O}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$，下面画～表示是模糊集合，只能谈某人属于 $\underset{\sim}{O}$ 或 $\underset{\sim}{Y}$ 的隶属程度是多少，而不是说 55 岁的人到底是属于 $\underset{\sim}{O}$ 还是 $\underset{\sim}{Y}$。与确定性集合的特征函数相对应地，对于模糊集合，则定义隶属函数；特征函数只有 0 与 1 两个值，0 表示否，1 表示是，而隶属函数则可以取遍[0, 1]区间的一切值，例如 $\underset{\sim}{O}$ 与 $\underset{\sim}{Y}$ 的隶属函数分别为

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 100\end{cases}$$

$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)$的图像如图 7-1。

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 100\end{cases}$$

$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)$的图像如图 7-2。

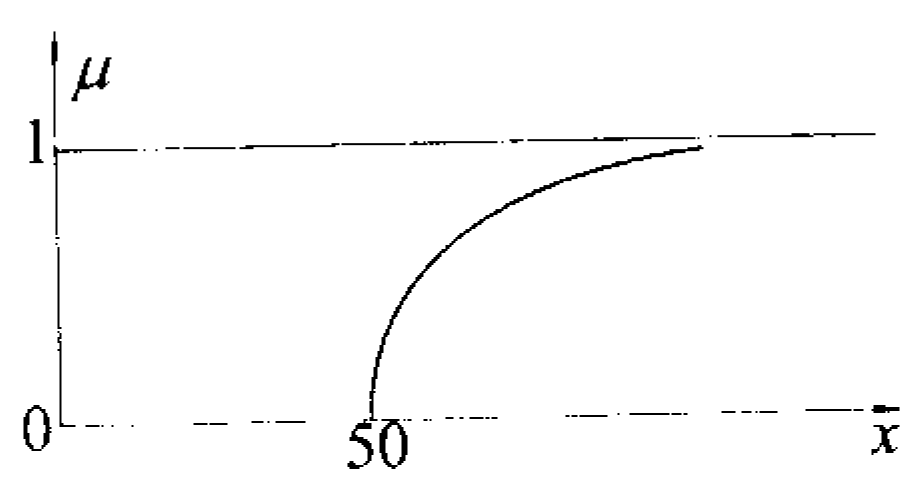


图 7-1

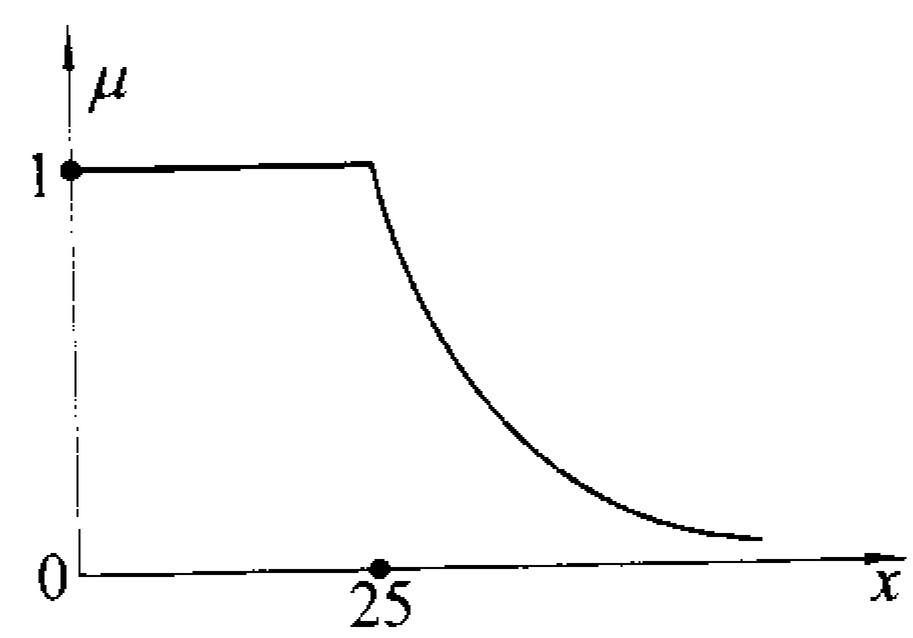


图 7-2

例如 60 岁的人，$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(60)=0.02$，他只有 2% 的可能隶属于年轻人集合，这是合情合理的一种定量。事实上，60 岁的人绝大多数已是衰老多病，不能称得起年轻了，但也有极少数 60 岁的人，或因遗传因素，或因自身的健康情况与心理因素，仍然活力实足，其身体的实际水平远高于同龄人。

运用模糊集合的思想，可以处理各种模糊现象，建立模糊数学模

型,进行定量或定性的数学分析。

在不确定性的模糊现象的背景下,孕育了生气勃勃的模糊数学。而完全没有实际背景,由数学家凭空制造的一些数学概念往往是没有生命力的。

在应用研究当中,模糊数学的思想与方法已经广泛渗透到物理、化学、生物、医学、心理、气象、管理、经济、控制等众多领域,并取得了丰硕成果。

当实际模型不能用已有的数学方法来对付时,应当考虑建立新的数学概念乃至新的数学分支,模糊数学的创立就是这方面的模范。

7.2 数学内容是发现的还是发明的

关于数学内容是发现还是发明的争论由来已久,这个问题不仅反映数学家们对他们工作成果的看法,而且也反映出数学是否具有真理性这样一个极严肃的问题。

"发现派"认为数学家通过正确的逻辑推理得出的结论和物质现实同样可靠,数学概念和定理不是他们自己创造的,而是大自然固有的规律性的反映,例如正整数,绝不是古希腊数学家丰富想像力的结果,而是从人类经验中总结出来的,整数及其运算性质犹如天文学家发现天上的行星及其运行规律一样地相似。

发现派的观点未免过分"唯物",太绝对化了,他们的观点之中有正确的一面,但是,事实上数学家们也确实发明过不少自然界并不存在的数学概念与方法,例如 $\sqrt{-1}$,复数,四维空间,以及各种运算技巧。

应该说,数学的主体部分是由数学家发现的,工具性部分是发明的,犹如木工发现木材可以造舟,而鲁班则发明了锯。木材及其性质是被发现的,木工的工具和制作木器的技术则是发明的。

本书中谈过的混沌和图是发现的。而用二进制小数研究混沌和图论中求生成树的算法或五色定理的证明方法则纯属发明。

“发明派”认为数学整个都是人类大脑的产物,是纯思维。数学中人类凭思维创造的内容究竟有多少?如何鉴别哪些内容是发明的?这倒是值得考查的问题。至于说数学内容皆为人类之发明,则不符合实际,例如“勾三股四弦五”的事实绝不是哪位聪明人想出来的,而是“看得到量得出”而被发现的,进而证明了一般形式的勾股定理。勾股定理是发现的,而其证明是发明的,人们发明设计了多种勾股定理的证明方法。罗巴切夫斯基公理是数学发明中最突出的事件之一,事实上,谁也没有发现过直线外一点可以引两条直线与原来那条直线平行,只是由于大家怎么也证明不了欧几里得的第五公设,才硬是反其道而言之,用与第五公设相反的一条公理来替代第五公设,于是发明了罗巴切夫斯基几何学。至于非欧几何有用,倒不能说明非欧几何不是发明,例如锯有用,但锯确为人类之发明一样。

在现代数学当中,发明十分重要,设想没有微积分的发明,很多面积和体积就无法算出,对已发明的数学工具之研究和运用,是数学工作的主要内容之一。而且针对一些实际问题和理论研究的需求,还应再发明新的更为有力的数学工具。

发现新的数学领域则具有头等重要的意义,例如20世纪后半叶,数学物理工作者发现的混沌、分形、突变论、模糊数学、NPC问题,等等,成了当今数学与计算机科学的中心内容。

一个好的数学家要发现发明两种才干兼而有之,要能发现数学世界的新大陆,又要成为如何开拓耕耘发现的新土地的能人。

发现靠经验,发明靠聪明,数学规律是自然界的真理,不但要对数学有全面的掌握,而且要对自然界和人类社会的现象感兴趣的数学家才可能发现有生命力的新数学。另外,有足够天分与聪明的数

学家不断发明新的数学方法,使数学科学更巧妙,更艺术,更美,更好用。

7.3 应用数学是坏数学吗

有不少不小的数学家宣称数学是艺术。例如英国数论专家G.哈代(G.H.Hardy, 1877~1947)就是主张数学家为"艺术而艺术"的代表人物之一。他认为数学的本质是艺术性,他说:"那些死后受人怀念的伟大数学家与任何大大小小的艺术家的贡献比起来,只有大小之分,没有本质差别。""美观是评价模型的标准",美是"第一个考验,世界上没有丑恶数学的永久地位"。美国的代数学家P.哈尔莫斯也持有与哈代相似的观点,他说:"不可否认,我认为数学的大部分之所以受尊敬和爱慕的原因,不外乎是它有趣。我喜欢凡事都是为它本身而去做的看法,数学是人类精神的光辉创造,即使没有任何实际应用,也值得生存下去,难道这样说真的会有什么大错吗?"

请注意,哈代和哈尔莫斯都是当代大数学家,他们对数学的贡献之大,为人之典范,都是我们学习的榜样,他们在世界科学界受到极高的尊敬,但他俩的这种数学思想却未必全面确切。事实上,数学就是数学,它不是别的什么,它的全名叫做数学科学,它有文化和艺术性的表现,但它只是科学,不是艺术。

哈代厌恶的所谓"丑恶数学",指的是有实际应用价值的数学内容,他说:"数学很少有实用价值,而有用的很小的一部分却比较乏味。数学定理的严肃性不在于它的实用效果,实用效果是无关紧要的。"他又说有用处的数学"是颇为死板的,真正的数学家的真正数学几乎是完全无用的,不管是'应用数学'还是纯数学,都是如此,真正职业数学家的一生是不可能靠其工作的'实用性'来评价的"。

这种贬低甚至抵制应用的观点显然是不能接受的。非线性物理

中的混沌现象存在的奇形怪状美丽动人的奇怪不变集，难道不是数学家的美好作品吗？看不出它有多么丑恶。

历史上，有更多的大数学家反对以“为艺术而艺术”从事数学工作，这些人的观点则是正确的。

例如著名数学家庞加莱认为数学有三重目的，首先是必须为自然研究提供工具，其次是它的哲学目的，最后才是艺术上的好感。

沃尔夫(Wolf)奖获得者，美国著名数学家拉克斯(P. Lax)说得对：“今天，我们可以毫无顾忌地说，纯粹数学的浪潮已经逆转，在不太久远的过去，如果一位数学家说‘应用数学是坏数学’，或者说‘最好的应用数学是纯粹数学’，他会得到别人的赞同和欢迎，但今天，如果有人这么说，他就会被人们视为愚昧无知。”

匈牙利著名数学家冯·诺意曼说：“一门数学科学脱离它的经验泉源太远之后或者经过太多的‘抽象配种’，它就有退化的危险。”

19世纪俄国最杰出的数学家契比雪夫(Chebyshev)则一针见血地批评那些轻视数学应用的数学家说：“使数学脱离实际需要，就好比把母牛关起来不让她接触公牛。”

自然界和人类社会当中的实际问题的定量或定性的研究与解决，是数学的最重要的起源与目标，应用数学并非坏数学。

7.4 数学定理为什么必须证明

当年意大利科学家伽利略在比萨斜塔上做自由落体实验，经若干次重复实验，发现从塔顶落下的石子落地的时间总是相等的，且有规律 $h=\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2$，其中 h 是塔高，t 是时间，单位是米和秒，于是就宣布了自由落体的物理定律，作为实验科学的物理学和化学等自然科学，都承认可以重复做出的结果为其科学结论。数学呢？数学

当然也可以重复实验，例如

$4=2+2$，$6=3+3$，$8=3+5$，$10=5+5$，$12=5+7$，$14=7+7$，$16=5+11$，$18=7+11$，……这种把偶数拆分成两个素数之和的实验可以做成功很多次，如果按物理学家们的规矩，早就可以宣布哥德巴赫猜想是真理了，然而数学不是物理，数学有自己这一行的规矩，那就是一切数学定理都必须经过严格的数学证明才算数。这种规矩是保护数学健康成长的法规，不遵守它，数学科学就要遭殃！例如，1640 年数学家费马经反复实验猜想 $F_n=2^{2^n}+1$ 是素数，实验结果如下

$$F_0=2^{2^0}+1=3,\quad F_1=2^{2^1}+1=5,$$

$$F_2=2^{2^2}+1=17,\quad F_3=2^{2^3}+1=257,$$

$$F_4=2^{2^4}+1=65537$$

反复多次实验，都使得猜想成立，这时敢宣布此猜想是定理吗？不敢！1732 年，欧拉算出

$$F_5=641\times6700417$$

所以 F_5 不是素数，后来数学家找到形如 $2^{2^n}+1$ 的 48 个数都是合数。可见反复多次实验在数学当中一般不能算是使一个结论成立的根据。

美国数学家波利亚(G. Polya)说："数学家与自然科学家在研究方法上是截然不同的；观察对自然科学家来说是可信的方法，但对数学家来说却并非如此。选择恰当的实例进行检验，这是生物学家肯定猜想规律的唯一方法，但是对于数学家来说，选择恰当的实例进行验证，从鼓励信心的角度来看是有用的，但这样还不能算是数学科学里证明了一个猜想。经验的归纳只能说明所得结果可能可靠，但并不能证明它一定可靠。"

对上面的费马数 F_n 是否是素数的问题，你也许会说实验次数太少了，只做了 5 次就下结论，所以出了错，事实上，有的数学命题，做一辈子实验都得出同样结论，仍然不能下结论，例如

$$K_n=(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-10^{1000})+1$$

实验结果为 $K_1=1, K_2=1, K_3=1, \cdots, K_{10^{1000}}=1$，实验了 10^{1000}次都是 1，实验次数不可谓不多，写出这些实验结果每秒钟写一个，一辈子也写不完，你能宣布 $K_n\equiv1$ 吗？你看

$$K_{10^{1000}+1}=10^{1000}!\quad+1\neq1$$

单靠多实验来保证数学结论的正确性是靠不住的。

事实上，作为严密科学的数学，它的定理不允许有一个反例。自然科学则不然，例如观察了大量的鸟类都会飞之后，可以得出“鸟类会飞”的结论，不怕鸵鸟不飞这一反例的存在，自然科学追求的往往是绝大多数情况下成立的结论。

上面我们讲了许多关于经验归纳在数学中不怎么管用的话，但由经验归纳推广完备起来的数学归纳法却是一种有效的证明方法。事实上，若有一个与自然数有关的命题串 P_n，即欲证 $n=1$ 时，P_1 成立，$n=2$ 时，P_2 成立，…，对一切自然数 n，P_n 皆成立，只需验证开始的少数几个命题 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{k_0}$成立，一般 P_1 成立就够了，这叫归纳法起步，然后假设对于 $n\geqslant k$，P_n 已成立，再通过正确的逻辑推导，在归纳法假设的前提下，证出 P_{n+1}仍成立，就可保证 P_n 对一切自然数皆成立。这种归纳过程与经验归纳的有限例证有本质区别，数学归纳法是说前面的项(命题 $P_1, P_2, \cdots, P_k$)已成立之后，若添加下一个命题，仍然成立，于是，添加下去总能成立，岂不是永远成立这一规律了吗？所以数学归纳法也称为科学归纳法或完全归纳法。

数学证明中还有一种强有力的证法，叫做反证法。故意说在定理的条件下原结论不成立，用正确的逻辑手段找出这一“故意反对”

与定理的条件或其他已有事实不相容的矛盾，从而得出在定理条件下，定理的结论不成立不行的欲证结论。这种反证的思想方法在日常生活或自然科学乃至社会科学当中，也多有采用，但那些领域中的反证法与数学当中仍有区别，例如“凡鸟皆飞”这一命题用反证法就不合适，鸵鸟不飞并不能引出矛盾。数学禁止它的定理出现反例，所以数学定理经得起反证的考验。

数学的证明最常见的是从已知通过正确的逻辑判断直接推导出结论的所谓演绎法证明。在对具体问题的证明当中，也可以针对其特点，把演绎、反证、数学归纳联合施用或施用这三种一般方法的变种。

对一个数学定理给出证明，还可以帮助我们理解定理，看透哪个条件的作用大，哪个条件是次要的，是否可以把条件放宽一些，结论是不等式时，是否可以把上界变小一些，把下界放大一些，等等，进而发现改进和推广该定理的思路；或发现原证明方法不够美，设计出更简洁漂亮的证明。

数学证明中的挫折和失败往往引出有价值的数学成果，例如四色猜想，历史上多少名人屡证屡错，但确引出了色交换技术和色多项式等精彩的图论成果。在数学史一个极重大的事件是对欧几里得第五公设的证明，到 19 世纪，几乎每个大数学家都曾染指于此，无奈大家都失败了，引起大家对第五公设是否是真理的考虑，1759 年，法国著名数学家达兰贝尔称欧氏平行公理是“几何原理中的家丑”，数学家 M. 克莱因则说：“简而言之，欧几里得的著作有着糟糕之极的缺陷。”鉴于上述证明的受阻，数学家们(例如高斯和罗巴切夫斯基)萌生了否定欧氏第五公设重建新几何的念头，非欧几何终于诞生。

非欧几何中用罗巴切夫斯基公理替代欧氏平行公理之后，建立的几何系统是相容的，即该系统不存在自相矛盾的结论，但由于长期找不到物质世界的相应模型，以至使其被冷落了一百多年，在这一困难时

期，数学界无人相信非欧几何存在物理意义，甚至连对非欧几何的相容性作出了严格论证的F。克莱因、凯莱等大数学家仍然认为唯有欧氏空间才是宇宙的基本空间。直到20世纪相对论建立并应用了非欧几何，这一危机才得以解决。可见严格的数学证明是必要的，但还要获得实践的接受。不然就有可能被人视为"合乎逻辑的胡说"。

7.5 数学家是些什么人

数学家是指以数学研究为职业，并且在国内外高档学术刊物上至少发表过一篇文章，其中首创至少一条非平凡的定理且给出证明的人，所谓平凡的定理是指从熟知的数学原理作出的简单推论，非平凡的定理就不言而喻了。

作者的同学同事当中不乏成就颇丰的数学家，大家身上有不少共同的气质。他们从各省市重点中学毕业，中学时代语文、数学、物理等科目全面发展，尤其是语文学得比较好，初中毕业时对数学已经发生最浓厚的兴趣，有的还对平面几何发现了几条现在看来是很平凡的，但教科书中没有的定理，并且他们自己很有成就感。他们已经不满足老师在课堂上教授的数学内容，觉得自己的解法比老师的妙，高考时觉得试题偏浅，以满分或几乎满分考入名牌大学的数学系。中学时代喜欢和同学在一起争论数学问题，把数学视为一种竞赛项目，并且逞强好胜，总想在这种比赛中击败别的同学。他们对数学充满好奇心，中学时代到书店里购书，对那些高等数学的书虽然一窍不通，心眼里还是想买回家看看里面究竟说些什么。如果某次数学考试得不到满分，他们会有一种耻辱感，会不高兴很多天。填报高考志愿时把数学专业写在第一志愿，除了想当数学家之外，没有想过当别的什么人。

人的才智是有差异的，不是什么人都可以成为数学家。从家庭

出身来看，大多数数学家出生在中等或贫困的家庭，这些孩子从小就遇到许多艰难困苦，在与其父兄一道千方百计排除困难的岁月当中，养成了不怕艰难和灵活机智的品质，我国著名数学家华罗庚有一句名言："聪明在于学习，天才在于积累。"那些高官和富翁的子女，虽然有优越的生活条件和社会特权，上学时又雇有不少家庭教师，却很少有成为数学家的。

数学家的成长需要一个尊重知识尊重人才的社会环境。中国的封建皇权专制的政治制度，本质上与科学精神和数学创造相对峙，文人们学而优则仕，统治者"罢黜百家，独尊儒术"，而那个智能含量极贫乏的儒术当中是不含半点数学的，现代思想家顾准说："中国的传统思想，没有产生出科学和民主，中国除了伦常礼教，没有学问，专心知识，探究宇宙秘密不是出路；中国只有道德训条，没有逻辑学，有《周髀算经》，然而上不了台面。"著名数理逻辑学家王浩说："今日的向钱看正在对整个文化起着强烈的腐蚀作用，与昨日的'随权转'异曲同工。哥德尔生活的简朴、对荣华富贵的淡漠、做学问的坚韧刻苦、寻找根本原理的矢志不移和锲而不舍，盼望年轻人拿他当一面镜子，学会净化自我，学会在荆棘丛中踏出自己该走的路。哥德尔成功的事实提醒我们，一个人天赋再高，想获得一点真重要真耐久的成绩，必须对外界的诱惑保持清醒的头脑，永不懈怠地埋头苦干，而靠众人的喝彩、神秘的灵感或不诚实的手段根本做不到。正因为唯利是图之风盛极一时，想寻找经久稳固的精神寄托的人们应更执著地追求长远的理想，珍重内在的价值，脚踏实地，为中国和世界文化的发展做一点无负祖先，有功后代的贡献。"

一个数学家越超脱越好。他们对世俗的那一套是超脱的，但他们本质上是热心人，他们对数学及其应用热情最高。他们热心地追求数学的进展，但对人们通常关心的俗事毫不关心，他们在图与数当中找到乐趣，而对消磨时光的争吵和私利失去兴趣。他们每日每时

集中全副精力去解决悬而未决的数学问题。非数学家觉得他们是一些怪人，为什么会这么津津有味地折腾那些枯燥无味的推理和计算，数学家也不理解数学中如此精彩的思想和技巧为什么引不起周围群众的兴趣。

不应把数学家看成是人类之中最聪明最有才能的一群人，不少数学家确实机智非凡，但并非所有数学家都聪明机智，事实上数学家的能力主要是逻辑思维能力，如果过分夸大数学家的天才，那是一种误导，会使有志从事数学工作的青少年不敢坚持成为数学家的志向。

数学家的工作方式与实验科学家的工作方式有很大区别，做数学，尤其是纯数学，除了草稿纸和藏书丰富的图书馆之外，不需要别的什么，搞数学的大多数是单枪匹马的数学家；事实上，不在安静的与世隔绝的环境中，很难认真思考数学问题，数学中合作的项目，数量并不少，但通常是参与合作的每人拿出自己独处时搞出的名堂，再把同伙的结果汇集起来，互相启发，进行研讨修正，形成集体的作品。在大学里，则是以讨论班的形式进行数学的合作研究，首先确定研究方向和课题，分头独自研读有关文献，定期轮流报告研读内容和对文献的批评，再分头独自考虑和撰写目标课题的研究成果，最后把研究成果拿出来在讨论会上宣读，彼此听取讨论班中合作者的意见，形成初稿。

世界数学家大会从1897年起每四年举行一次，中间因世界大战中断两次，大会参加者逐次增多，各国数学家相聚相叙，报告各自新近的进展，讨论数学当前面临的问题。

数学家的实际有为年龄大约为25岁到45岁，哈代说“数学是年轻人的游戏”，超过50岁之后又开创了一项数学理论者，十分罕见。伟大的数学家牛顿24岁发现微积分和万有引力定律，这两项发现是有史以来人类科学与思想史上最伟大的成就，但他40岁时自认为自己的创造时期已经结束，40岁之后牛顿只做了自己已有工作的补

充、完善和修改工作，基本上丧失了创造性。很多大数学家，英年早逝，并未影响他们做出里程碑式的大贡献，例如伽罗瓦 21 岁去世，阿贝尔 27 岁去世，拉马努金（印度大数学家）死于 33 岁，黎曼死于 40 岁。如果一位年长的数学家晚年放弃数学研究，对数学和他本人的损失都不会太大；相反地，一个年轻数学家放弃数学工作多年后，又东山再起成了一流数学家者却绝无先例。

退役后的老数学家不少去从事非数学工作，因为他们这时对新的工作是一个十足的外行，往往成效不佳，例如班乐卫（Painleve）是一个不称职的法国总理，拉普拉斯从政后声誉扫地，牛顿凑合着当过一段造币厂厂长，不知中国有无这种类型的事例。

至于数学家的形象，并非个个古板木讷，冷淡内向。事实上，数学家当中幽默机智、能棋善弈、热衷体育者大有人在，他们生活中的热情活跃与他们做数学时的绝对严格、谨慎形成极大反差，如果有人说数学家都是些不知今夕是何年的书呆子，请不要相信，那是谎言。

7.6 数学实验

数学并非实验科学，数学岂能实验？什么是数学实验？它的必要性和可行性如何？

1976 年，美国伊利诺大学的阿佩尔（Appel）和哈肯（Haken）在克齐（Koch）的帮助之下，用计算机证明了数学史上悬挂多年的四色猜想成立。这是 20 世纪科学史上的最重大事件之一，他们用了 100 亿逻辑判断，花了 1200 个机时。计算机的成功开了数学实验的先河，宣告了数学实验的可行性，同时也宣告了数学实验的必要性。设想把这 100 亿个逻辑判断写在纸上，扣除机器不如人聪明，它不会像人那样可以简捷“抄近”地表述和推理，即使把它的过程压缩万倍，也还要一百万逻辑判断，以每个逻辑判断需用两个字写出，则全文共 200

万字，要印出每册20万字的书十册，这种超长证明用人的手和脑来完成是不可想像的事，用机器来做这种超长证明是十分必要的，犹如长江三峡水利工程，用肩挑，人扛锹挖，不用机械施工，很难完成任务。

再如拉姆赛数 $r(4,5)=25$ 的求得，1993年美国的拉齐斯佐威斯基和澳大利亚的麦凯用了96360个机时，用计算机并行地算得此数，此前，不少有能力的数学家冲击 $r(4,5)$，都未能求出这个准确值，那是必然的，因为这种超长计算，非人手工可以胜任，必须动用计算机群。

所谓数学实验，就是对数学命题（一般是猜想）或计算题目在计算机上进行证明、反驳或运算，或者在计算机上制造数学结构（曲线、曲面或规律），得出新的数学概念或命题（猜想），再用机器加以证明或计算。由于机器的判断与运算速度快，不但会给出那些超长计算与证明的答案，而且会让人见识丰富的数学实例之表演，从中归纳出新的数学规律。

我国著名数学家吴文俊、张景中、杨路等，用计算机证明初等几何问题的重要课题当中成就斐然，是我国数学家搞数学实验工作的突出代表，破除了“举例子做实验完全不算数学证明”的传统观念。在某些条件下，实例对完成证明是足够的。

对于数学命题，用计算机进行数学实验还是坚持用手笔书写证明，目前仍有争论。

1994年，美国数学家豪根(J. Horgan)在《科学》杂志发表文章，标题是《证明的终结》，指出计算机正在改变着数学家的发现与证明的方式。他崇尚数学实验和机器证明，批评传统证明方式时，话说得很苛刻，很难听。1993年，普林斯顿大学的著名数学家维尔斯(A. J. Wiles)在英国剑桥大学的一次数学会议上宣读了他证出费马大定理的论文，这个定理是费马三百多年前提出的：

对于大于 2 的自然数 n，方程

$$x^n + y^n = z^n$$

没有正整数解。

三百多年，众多数学家顽强求证，皆以失败告终，维尔斯竟用手写出了它的证明，它的证明的打印稿长达 200 页。毕达哥拉斯当年发现勾股定理时，他的信徒们不仅热烈欢呼，而且杀牛摆宴相庆。1993 年，当维尔斯宣告证明了费马大定理时，由于一时来不及杀牛造宴，与会者以雷鸣似的掌声表达对维尔斯的赞赏。但豪根却不以为然，他讥讽说："费马大定理的手笔证明是一种正在消亡的文化的最后挣扎。"因为文稿过长，论证艰深难懂，一般数学家难以对其评论和鉴定，豪根说得十分难听："看起来很优美，听起来像是真的。"甚至提出维尔斯"是一位杰出的遗老吗?"的质疑，公开指责那些认为实验数学和计算机证明只是些令人讨厌的东西而并非革新的数学家，他们对维尔斯征服费马大定理感到欢欣鼓舞，认为维尔斯的成就是传统数学的伟大胜利，豪根认为那些传统与现代数学的所有潮流都是格格不入的。

维尔斯对费马大定理的证明是他单枪匹马苦心研究七年的成果，他本人是"为数学而数学"的坚定的信仰者，他声称："我不希望看见数学沦为应用的仆人。费马大定理本身不可能有什么用途。"

数学家当中当然不乏看不起数学实验者，1993 年哈佛大学的数学家贾非(A. Jaffe)指出计算机实验绝不能代替证明。著名数学家霍夫曼(Hoffman)则强调指出："证明是数学家所拥有的唯一实验工具，而现在它却处于被抛弃的危险之中。虽然计算机图形学美妙得令人赞叹，但 60 年代的毒品也曾美妙得令人难以置信，某些人却因此一命呜呼了。"

坚决赞成数学家实验者的声音似乎更响一些。很多发达国家的科学领导机构，例如美国国家科学基金会一直敦促数学家们更多地

参与数学实验领域的研究，普林斯顿高级研究所所长格里菲思(P.A.Griffiths)和英国牛顿数学研究所的阿蒂亚(M.Atiyah)积极鼓动数学家冲出象牙之塔与现实问题融为一体去做数学模型实验。阿蒂亚是1966年菲尔兹奖(公认为数学界的诺贝尔奖)得主。很多国家的科研投资正在显著地向数学实验研究项目倾斜。例如明尼苏达大学的几何中心就是一所数学实验中心，它是一座多面体的钢－玻璃大厦，每年从政府得到200万美元的科研经费，拥有世界上最杰出的数学家，出版了《实验数学》杂志。事实上，实验方法不是现在才有的新鲜事，当年数学巨匠高斯常常是进行实验性演算之后才构造形式证明的。

不用计算机做数学对下一代人来说是越来越行不通了。在任何一个科学领域，实验工作者都比理论家多得多，数学也会向这个方向发展。高度形式化的证明比数学实验方式给出的直观具体的证明更容易出毛病，维尔斯式的人物不会越来越多，这种数学家不用计算机，只热衷于搞著名猜想的超长证明。

作者所在的中国科学技术大学是国家指定的进行数学实验教学的试点单位，我们开设的数学实验课程受到全校高才生的热烈响应，报名选修者大大超出我们预期的名额，不得不更换成大教室，教学的指导思想是，不把数学视为先验的逻辑体系，而把它看成一门准实验科学，从问题出发，借助计算机这种实验仪器，由学生亲自动手设计实验，体会解决问题的过程，学习、探索和发现数学规律，并学会用机器证明数学问题的思想和一些技术。教学获得了成功，数学实验课被学校评为少数几门“优秀课程”之一。

7.7 各执己见，争吵不休

数学究竟为何物？它的本质，它的基础是什么？关于这些问题，

19 世纪末已经冒了烟的观点分歧，到了 20 世纪初，已经演变成白热化的争论。主要派别有三个：

(1) 逻辑主义学派

代表人物：罗素，英国著名逻辑学家和数学家，因抛出罗素悖论挑起第三次数学危机而闻名数学界，他与怀特海合著《数学原理》(三卷本)，论述了其数学观点。

主要观点："整个纯粹数学所唯一涉及的只是借助于很少的基本逻辑可以定义的概念，其所有命题皆可从这些少数基本逻辑原则中演绎出来。"

在逻辑主义学派看来，数学只不过是没有别的内容只有形式的逻辑体系，罗素甚至明讲："数学是这样一门学科，在其中我们永远不知道我们所讲的是什么，也不会知道我们所说的是不是真的。"他们的最终目标是把全部数学奠基在逻辑上。

逻辑主义学派的始祖是笛卡儿和莱布尼茨。

(2) 直觉主义学派(也称构造主义学派)

代表人物：布劳威(L. E. J. Brouwer, 1881～1906)，布劳威的前辈，德国数学家克隆尼克和法国大数学家庞加莱则是直觉主义的始祖。

主要观点：一切数学必须是构造性的，存在必须是能被构造的。所谓构造性是指经有限步骤可以定义的概念和可以实现的方法，例如两个自然数的最大公约数是存在的，因为它可以在有限步骤之内求得。他们认为"上帝创造了整数，其他的都是人的工作。""推理是那些不明真理的人用以发现真理的迟钝、愚笨的办法。"他们视直觉是一切真理的源泉。

布劳威否认康托尔所有元素都"一下子"出现的无限集。庞加莱认为："真正的无限集并不存在，我们所说的无限，只是无论已有多少元素存在，新的元素仍可能存在。"于是，他们否定自然数全体这一概念，否认无理数的存在，甚至连 n 次方程有 n 个根这类基本定理也

加以排斥，理由是没有给出有限的算法把这 n 个根构造出来。

如果问直觉主义者如下具体问题：

数字串 0123456789 在 π 的十进制小数的表示中是否能出现？

他们会说，这个问题不能回答，除非你把这个数串从 π 的小数部分上找出来才能说是。

(3) 形式主义学派

代表人物：希尔伯特和库里，但库里说希尔伯特主义与形式主义有别，希尔伯特本人并未自命为形式主义者，不过他的观点与形式主义者合拍，一般仍认为希尔伯特是形式主义的主要代表。

主要观点：公理是一串符号，符号就是数学的本质，数学的真理性在于其公理系统的相容(无矛盾)性。他们提出如下的希尔伯特纲领：

①证明古典数学的每个分支都可以公理化。

②证明每个公理系统中的命题均可在该系统中得到判定。

③证明每个公理系统是相容的。

④寻找可在有限步骤之内判定任一命题可证明的方法。

⑤证明每个公理系统的不同模型是同构的。

在形式主义者眼里，数学是符号和由符号组合或串联而成的命题组，对待数学的最可靠的方法不是把它视为实际知识，而是一种形式上的法则，证明本质上是对一些符号的机械操作，一个公式为真是指这个公式是某串公式中的最后一个，其中每个公式，或为形式系统中的一条公理，或是由其他公式推证出来的。

1928 年，希尔伯特在世界数学家大会上宣布，他将可以解决世界上所有的基础性的数学问题，所有有意义的论述将会被推翻或被证明，将不会存在悬而未决的命题。

在 19 世纪后期到 20 世纪 30 年代的 50 多年的时间里，三派各执己见，争吵不休，指责对方时，话说得很难听，有时甚至发生人身攻

击的现象。

例如有一次直觉主义者布劳威访问哥廷根大学，他的演说结束后，一听讲者发问："您认为我们不可能知道 π 的十进小数中是否会有十个 9 连续出现。我们也许不可能知道，但上帝知道嘛？"布劳威满不在乎地答道："我无法与上帝联系。"在场的希尔伯特很不客气地对客人布劳威说："按你的观点，现代数学的大部分成果都要被抛弃，但对于我来说，重要的不是抛弃，而是获得更多的成果。"全场听众热烈鼓掌，弄得布劳威下不来台。布劳威从此视希尔伯特为自己的敌人。一次，布劳威与好友（著名代数学家）范·德·瓦尔登到另一朋友家做客，席间当范·德·瓦尔登称希尔伯特为朋友时，布劳威竟愤然起身，拂袖而去！

直觉主义对逻辑主义和形式主义的批评也毫不留情，庞加莱讥讽说："逻辑主义者的理论并非不毛之地，它生长着矛盾。"1925 年，布劳威批评形式主义者时说，公理化与形式主义的办法不会得到有数学价值的东西。直觉主义者魏尔（H. Weyl，1885～1955）批评希尔伯特的数学是一种"美妙的符号游戏，但它与认识毫无关系，它不具有表示直观真理的实在意义"。庞加莱则批评说："数学必然会有回归自然的一天，那时必然要将这些纯语言抛弃，不会再被这些空洞的词语所蒙蔽。"

1927 年，希尔伯特在他的名著《数学的基础》中反唇相讥道："与现代数学的突飞猛进相比，直觉主义者们所取得的那点孤立的结论既不完善也不互相关联，这些可怜的残余算得了什么。"

希尔伯特还严肃批评了逻辑主义者，希尔伯特说，不可能仅仅从逻辑中推导出数学来，数学不是一种逻辑结果，而是一种自然的法则。

庞加莱对形式主义的公理化嘲讽道："为了防备狼，羊群已用篱笆圈起来了，但却不知在圈里有没有狼！"指的是罗素悖论出现后，为

了排除由罗素悖论引起的第三次数学危机，集合论被公理化，按这种公理系统，禁谈"一切集合组成的集合"，于是圈内不会出现罗素悖论这只狼，庞加莱不信这样公理化之后就一定保证不会再出现悖论与危机之狼，按庞加莱的说法，用公理搭起的栅栏的内部可能也会出现"数学之狼"。

1925年希尔伯特著文宣称："在我们曾经历经两次悖论后，头一次是微积分悖论，第二次是集合论悖论，我们不会再经历第三次，而且永远也不会。"

作者认为希尔伯特不能严格证明他的乐观是真实的、可信的，而庞加莱"不知圈中有没有狼"的担心倒是值得警惕。

1930年，希尔伯特发表《数学的基础》一文，文中断言："我力求用这种建立数学基础的新方法达到一个有意义的目标，这种新方法称为证明论。我想把数学基础中所有的问题按照现在提出的形式一劳永逸地解决，换言之，即把每一数学命题都变成一个可以具体表达和严格推导的公式。经过这样治理的数学所推导出来的结果就会无懈可击，同时又能为整个科学描绘一幅合适的景象。我相信我能用证明论达到这一目标。"希尔伯特的这种自信使形式主义者们备受鼓舞。但是，希尔伯特的志向过于宏大了，以至于使他的这段宣誓式的豪言成了科学史上吹得最大的牛皮。就在第二年，美籍奥地利数学家哥德尔发表了《论数学原理中的形式不可判定命题及有关系统》的惊世骇俗的论文，揭开了数学蒙难的潘多拉魔盒。此文的结论对数学的确定性、相容性和完备性是毁灭性的，哥德尔断言："任何数学系统，只要它含有整数算术，其相容性就不可能采用逻辑原理（公理）而建立"。这对于逻辑主义和形式主义无异于判了极刑。希尔伯特纲领基本破产。哥德尔的理论也宣布一个命题非真即假的排中律不总是可以成立的。他给出的所谓哥德尔命题就是既不能证明真也不能证伪的怪命题。1970年，马蒂亚塞维奇（Y. Mati jasevec）证明：没有算

法能够判定丢番图方程是否有整数解。有谁知道哥德巴赫猜想是不是不可判定的呢?

上述逻、直、形三派之争的原因是各派的头头们(都是对科学贡献巨大的著名数学家)把他们在具体数学问题的研究当中积累的经验过分夸大成整个数学的规律,这些人在抛出这些务虚式的理论时,已经不是他们搞数学的黄金年龄,加之他们在数学界的威望,追随信奉者自然不少,遂形成学派。他们的经验和对数学科学的领悟是人类的宝贵精神财富,每一派之言中都有合理成分,也更有偏激的片面性。如果三派联合再请哥德尔加盟,则会全面得多。至于数学的本质究竟是什么,则是数学科学应该继续研究的永恒主题之一,目前做结论为时尚早。

7.8 数学的非数学障碍

新的数学成果问世,被权威否定,推迟公认的时间,正确的成果反而遭嘲笑受蔑视的现象,在数学史上屡见不鲜,甚至成果的创始人受到人身攻击惨遭不幸之事也确实存在。

首先是来自传统观念的障碍。以非欧几何的发明为例。19 世纪 20 年代,德国高斯、俄国罗巴切夫斯基和匈牙利的亚·鲍耶总结众多大数学家试证欧几里得第五公设失败之经历,认为欧几里得第五公设是不可证明的,于是萌生了建立一种用与第五公设对立的公理为基础的新几何。开始时,高斯称其为“反欧几何”,后来改成比较温和的名称“非欧几何”。

当时关于欧几里得几何是唯一的物理空间的几何,是关于空间的放之四海而皆准的真理,这一观念在人们的心目中根深蒂固,与之相悖的任何思想,即便是出自最伟大的数学家如高斯者,也拒之门外。高斯 1792 年就产生了非欧几何的思想,1817 年独自获得了关于

非欧几何的一系列重大发现，这些成果只是写在他抽屉的日记本中或给亲友的信函里，高斯明哲保身，怕因此引起人们的叫喊甚至失去“数学之王”的称誉，至死不敢发表这些重要成果！

1826年2月23日，富于革命个性的罗巴切夫斯基在喀山大学宣读了他的非欧几何论文《几何学原理及平行线定理严格证明摘要》，它的问世标志着非欧几何的正式诞生。这篇论文犹如晴天霹雳，使正统派数学家十分惊奇，歪曲、反对和攻击接踵而至。学校委托权威数学家西蒙诺夫、古普费尔和博拉斯曼组成鉴定小组，要求他们对罗的论文做出书面评价。他们是否出于不可告人的动机，始终不写书面评价，连论文原稿也给遗失了！ 1829年，罗巴切夫斯基出任喀山大学校长，1832年，校学术委员会把校长的那篇关于非欧几何的论文呈送彼得堡科学院，科学院委托数学权威奥斯特罗格拉得斯基（1801～1862）院士评审，这位院士不仅对罗的工作不予肯定，反而进行诽谤，奥斯特罗格拉得斯基公开写道：“看起来，作者（指罗）旨在写出一篇使人不能理解的著作，他达到了自己的目的。由此我得出结论，罗巴切夫斯基的这部著作谬误连篇，叙述混乱，因此不值得科学院注意。”紧跟着，人们群起而攻之。1834年，布拉切克和捷列内等人在《祖国之子》杂志著文讽刺罗巴切夫斯基：“难以理解，罗巴切夫斯基先生为什么对数学中最简明的几何学建立起晦涩的、不可思议的和神秘莫测的学说。为什么他不把黑想像成白的，把圆想像成方的，非常非常可能，尽管理智是不能理解这些的。”又攻击说：“为什么不把标题《几何学原理》写成《对几何学的讽刺》或《几何学漫画》呢?!”罗巴切夫斯基写了反驳文章，投《祖国之子》杂志，该杂志拒绝发表，当时罗巴切夫斯基是何等孤立，由此可见一斑。

同行高斯做何反应？高斯对罗的成果心中有数，确认是正确和伟大的，他曾当着朋友的面私下表示赞许，说罗巴切夫斯基由于非欧几何学上的成就已成为全俄最为卓越的数学家，但高斯做了这一番

表态后又悔又怕，请求他的朋友千万不可泄露他对罗的看法。高斯开始努力学习俄语，准备直接研读罗氏原著，但在公开场合，高斯对罗一句好话也不说。在评选哥廷根皇家科学院通讯院士的会议上，高斯亲笔写了推荐通知书，同意罗当选，但对罗的非欧成就却只字不提。

高斯受传统势力的威胁，不能主持正义的另一丑事是如何对待亚·鲍耶的非欧几何成果。鲍的父亲是高斯的同学，也是一位知名数学家，早年费了极大精力，证明欧氏第五公设未获成功。亚·鲍耶受父之传，也埋头去证第五公设，父亲有切身体会，认为证明没有指望能成功，极力阻止儿子去证第五公设。1820年，亚·鲍耶开始论证"欧氏第五公设不可证"的命题，终于完成非欧几何的创立，并写成论文。父亲把儿子的论文送挚友高斯，请予评论。高斯回信曰："对你家公子的大作，我不敢称赞，称赞他就意味着称赞我自己。因为其全部内容、方法和结论，差不多与我30多年前已得结果完全相同。"从此亚·鲍耶心情沉重，身染重病，1860年1月7日，这位才气纵横的数学才子结束了忧伤痛苦的一生。死后葬入无名公墓，在此公墓的记事本上登记说："此人一生没有什么意义。"有划时代数学贡献者竟被说成一生无意义！

著名数学家康托尔曾如下评论这种因循守旧、世俗保守现象说：一旦一个既定的结论被广泛接受，那么它将不会轻易地被放弃，而且对它越是知之甚少者，对它的迷信越牢固。罗和鲍的著作发表后30年左右，除极少数几个数学家，几乎所有的人都对其置之不理，视为异端邪说。有些数学家并不否认它的逻辑上的一致性，而另一些数学家甚至认为它必定包含矛盾而毫无价值。

今日，非欧几何已经发展成有理论体系有重大应用的重要数学分支。让我们向为非欧几何的创生而顽强奋斗终生的罗巴切夫斯基和亚·鲍耶致敬！

学术权威的嫉妒与自傲,是又一种学术障碍。在数学史上,一些数学权威,只看到自己对数学的贡献,不相信还有人会在同一领域能做出比自己更光辉的成就。当别人真的做出这方面突出成果时,则采取学阀作风,极力贬低甚至否定人家的成果,对数学的发展起阻碍作用。例如法国年轻数学家伽罗华(Galois, 1811～1832),1829年,年仅18岁的伽罗华写出关于一般 n 次方程求解问题的论文,呈送法国科学院,由著名数学家柯西(Cauchy, 1789～1857)主审,柯西看不太懂,要求退稿重写。伽罗华改写后再送法国科学院,柯西称自己有病,改由科学院秘书长著名数学家傅里叶(Fourier, 1768～1830)主审,然而当年5月,傅病逝,在傅里叶的遗物中并未发现伽罗华的稿子,这篇极其重要的论文就这样在这些权威的手里糊里糊涂地遗失了! 1831年,伽罗华写成《关于用根式解方程的可解条件》的重要论文,仍送法国科学院审查,这次由大数学家泊松(Poisson, 1781～1840)主审,泊松在评语上轻率地写道:"不可理解",就判了这篇重要成果的"死刑"。1832年,不满21岁的伽罗华死于政治与爱情纠葛的决斗之中。1846年9月,著名数学家刘维尔(Liouville, 1809～1882)把伽罗华的遗作整理发表在由自己主编的《数学杂志》上,这时,数学神童伽罗华已经长眠地下14个年头了! 伽罗华的这些遗作被数学界称为"伽罗华理论",对代数和其他数学分支的发展起了巨大的作用。

最令人气愤的是老师对学生研究成果的排斥打击现象,例如康托尔与老师克罗内克(Kronecker, 1823～1891)的矛盾实为数学史上的丑闻。康托尔在柏林大学读书时,克罗内克已是该校赫赫有名的数学教授。克罗内克发现康托尔关于集合论的科研成果与自己的学术观点有矛盾,便对年轻的康托尔进行激烈的攻击,称康托尔是危险的"数学疯子",无情刻薄地攻击康托尔达十年之久! 康托尔想到柏林大学任教,虽然当时康托尔已是成就颇丰的数学家,是柏林大学难得

的人才，但由于克罗内克的阻拦与反对，始终未能出任柏林大学教授，而且康托尔的论文也在克罗内克的阻碍之下一再拖延发表日期，致使康托尔的精神受到极大伤害，经常送精神病院进行痛苦的治疗！直到克罗内克临死时，康托尔才出任了德国数学家联合会主席，并于1897年负责筹备苏黎世第一届世界数学家大会。但由于长期受老师克罗内克的迫害，1884年起不时发作深度忧郁症，最后病死于任教的哈雷大学精神病院。康托尔是在集合论等方面对现代数学发生着最大影响的人物之一。克罗内克为人之师，对康托尔做得也太过分了！

恶劣的政治思潮和社会环境是阻碍数学发展的重要因素。以作者读书的北京大学数学系为例，1957年反右派运动当中，数学系师生当中许多有贡献的数学家和有天才的同学被错划为所谓右派分子，到大西北等地劳改多年，直至文化大革命的劫难过后，才得到人权，可以做数学研究。这些矢志献身科学的精英，大部分人对我国的数学事业做出了可观的贡献，有的当选为中国科学院院士，可惜中间20年的最佳数学年龄被当权者无端地剥夺了，给我国的数学事业造成极大的损失。1958～1959年的所谓教学改革，数学系楼道里贴满了“火烧柯家店”“火烧牛家店”等大字报(柯指柯西，牛指牛顿)，批判数学科学中的所谓资产阶级思想，同时把学有专长的老教授从讲台上赶下去，给数学教学造成了极大的混乱与损失，致使大批同学的代数、几何、分析等基础课学得极不扎实，至二、三年级，由于基础差使不少同学因考试不及格而被迫退学或“提前毕业”，给这些同学的前途造成不可挽回的损失。

另一个因世道不公阻碍数学发展的实例是中国数学家陆家羲的科研成果在中国20年不予发表，不得不投外国杂志的事件，陆家羲1961年毕业于东北师范大学，逝世前任包头第九中学物理教师。青年时代聪敏而好学，一个偶然的机会，他读到孙泽瀛著的《数学趣引》

一书，对书中介绍的“科克曼女生问题”产生浓厚兴趣。1850 年数学家科克曼提出如下问题：

“某寄宿学校有 15 名女生，她们每天每三人一组散步，问应怎样安排组织，使得一周内每位女生与其他女生同一组散步恰一次？”

1961 年，陆家羲把自己关于科克曼问题的研究论文寄给中国科学院数学研究所，一年后退稿。

1963 年，陆家羲将退回的稿子修改更名后投《数学杂志》，一年后复信建议改投它刊。1965 年，陆再次把稿子修改一遍，并投《数学学报》，1966 年，他又收到退稿通知，通知上书五个大字：“此文无价值”。接着“十年动乱”，我国教育科技战线全面瘫痪，陆家羲的论文已无刊可投。

1976 年，江青集团灭亡，但极左思潮阴魂未散，1978 年和 1979 年陆家羲两次投稿皆石沉大海，遭到冷遇。

1979 年，陆家羲读到 1974 年出的《组合论》（美哥伦比亚大学出版）杂志，惊闻 1971 年科克曼女生问题由意大利数学家解决并发表了此项研究论文。事实上，国外的研究结果比陆家羲的结果整整晚了十年！在那种仇视科学、摧残人才的年代，这种可悲的事件并非偶然！

1980 年，陆家羲在朱烈教授的帮助下把他六篇关于组合数学的论文投向美国的《组合论》杂志，都是关于所谓“斯坦纳系”的科研成果，科克曼女生问题是“斯坦纳系”的特例。科克曼女生问题有解：

（一）$\{1,2,3\},\{4,8,12\},\{5,10,15\},\{6,11,13\},\{7,9,14\}$；

（二）$\{1,4,5\},\{2,8,10\},\{3,13,14\},\{6,9,15\},\{7,11,12\}$；

（三）$\{1,6,7\},\{2,9,11\},\{3,12,15\},\{4,10,14\},\{5,8,13\}$；

（四）$\{1,8,9\},\{2,12,14\},\{3,5,6\},\{4,11,15\},\{7,10,13\}$；

（五）$\{1,10,11\},\{2,13,15\},\{3,4,7\},\{5,9,12\},\{6,8,14\}$；

（六）$\{1,2,13\},\{2,4,6\},\{3,9,10\},\{5,11,14\},\{7,8,15\}$；

（日）{1, 14, 15}, {2, 5, 7}, {3, 8, 11}, {4, 9, 13}, {6, 10, 12}。

其中{·,·,·}是一个三人组，(一)是指星期一等等，{·,·,·}中的数字是女生的“学号”。

陆家羲投去国外的研究结果是成立的，解决了130余年世界数学界未解决的难题。审稿人加拿大多伦多大学的门德松教授高度评价陆家羲的成就说：“这是世界上20年来组合设计方面最重大的成果之一。”

1983年3月，《组合论》杂志发表陆家羲的三篇论文，1983年4月，《组合论》杂志发表陆家羲的另三篇论文。

陆家羲20年在国内奔走呼号，无人理睬，中国科学成就，首先登在外国刊物上，岂非咄咄怪事！

1983年，中国邀请门德松教授来华讲学，门德松教授吃惊地说：“请我去讲学？你们中国不是有陆家羲博士吗？”在大连全国首届组合数学讨论会上，门德松特地会见陆家羲，并诚恳邀请陆家羲到多伦多大学工作，陆家羲表示感谢，但谢绝说：“我愿留在祖国，继续为组合数学研究做些有益的工作。”门德松教授把多伦多大学的校徽赠陆家羲留念，并邀陆去加拿大讲学。

陆家羲出身贫寒，长期受极左思潮迫害，被人们说成“追求名利”“走白专道路”，曾送“五·七干校”接受改造，身心受到严重损害，被邀参加学术会议需要自己借钱做路费，还要受到中学领导的阻挠，要自己找到代课老师才能放行。一家四口人，始终挤在十平方米的小房子里生活、科研和学习，唯一的一张桌子让给女儿写作业，他自己趴在土炕上研究世界数学难题。

1983年10月，陆家羲在武汉会议上作大会报告，又要记录其他数学家的报告，返包头途中已有气无力，一到家里实在支撑不住，没说几句话就躺在土炕上睡着了，从此再也没有醒来！一位饱经坎坷的年轻数学家，与世长辞。死后《人民日报》《光明日报》等全国大报

都刊登了陆家羲逝世的消息和他的重大的科研成就。包头市和内蒙古自治区政府授予他特级教师称号,《人民日报》发表题为《拼搏二十多年,耗尽毕生心血,中学教师陆家羲攻克世界难题“斯坦纳系”》的专题报道,组合数学会组织“陆家羲学术工作评审委员会”,对他的工作进行全面公平的评价,内蒙古自治区召开表彰大会,授予他自治区科技进步特等奖,1987 年,国家科委(现科技部)把陆家羲的成果评为“国家自然科学一等奖”,与著名数学家陈景润齐名。

7.9 数学岂能孤立自己

数学本应有应用广泛的品质,但有些数学家一方面说自己研究的东西一定有用,一方面却干些离科学与生活实际越来越远的研究工作。他们的“有用”之说只是一种招牌。正如一个笑话里说的那样:某甲攒了一堆要洗的衣服,抱到街上找洗衣店,终于看到一店铺门前挂着“洗衣店”的招牌,便走进去,把他的衣物放在柜台上,店主吃惊地问:“您这是干什么?”甲说:“我来洗衣。”店主笑曰:“我店不洗衣服。”甲吃惊地问:“为什么您的门前挂有洗衣店招牌?”店主答道:“我们只造这种招牌出售。”即使在所谓应用数学当中,挂这种“洗衣店”式招牌的数学家也大有人在,至于纯数学家,例如芝加哥的数学权威迪克森的口头禅是:“感谢上帝,数论毫无用处。”哈代曾是英国数学界的领袖,一次在他的祝酒词曰:“祝纯数学永无用处。”连招牌都不打了,公然以数学无用而自居。如果所有的数学家都这么主张,数学岂不成了孤立于人世与自然界之外的神曲了?

笛卡儿是最早觉悟的数学家之一,他说:“我决定放弃抽象几何,即放弃仅有智力训练价值的问题,研究另一种以解释自然现象为目标的几何。”可惜大多数数学家从现实的数学模型的研究中抽身,有人甚至认为那是一种不洁净的数学,而专心关注数学自身产生的问

题，这等价于他们放弃了科学。事实上，牛顿的微积分恰为研究物理学当中的实际问题而提炼出来的数学模型，数学的历史已证明，与物质科学和世间的事理科学联姻，才是数学繁荣进步的正路和有出息的发展方向。

在数学教育方面，也有一些偏向很令人关心，教授们不仅自己选择那些易于求解的纯数学问题，不敢面向迫切需要数学家解答的实际问题，事实上自然界的精巧和复杂远胜于人的智慧，而且还把一些脱离实际的由数学自身提供的问题定为其博士生的论文题目，以便能及时完成学位论文答辩，把这种数学的孤立性遗传下去。有些数学家和他的弟子们只是将现有的代数、几何与分析当中的具体明确的公式定理等用更一般的、更抽象的新术语新符号重写一下，反而造成了计算与推理的繁琐与不便。它仅仅是一种新的表述，而非新的数学，这样干下去唯一的后果是使数学更加孤立。正确的方向是与其他领域挂钩，从中寻找有价值的问题和研究的动力，正是对自然界的研究当中，才会产生比数学家闭门造车重要百倍的新数学，试看混沌、模糊数学、优选法等大有发展前途的数学分支，哪个不是起源于数学家与物质科学的互相作用。

如果躲在象牙之塔中，却抱怨真正的应用数学为技术服务的工作噪声干扰了纯数学的高雅艺术，甚至骂搞应用数学者是迟钝的工匠，则实在是自绝于时代。

数学的专门化越分越细也是使得数学走向孤立和死胡同的一种原因。许多数学家在数学王国的一角占据一个席位，不能理解他们的同事在另一角做的数学是什么，甚至彼此连所用的语言与符号都不相识，一篇论文登出来，只有本讨论班的成员能看懂，这还有什么繁荣可言！

当代著名数学物理专家柯朗批评说："数学不过是一个从定义和假设中抽取的结论组成的体系，只要有一致（相容）性，除此之外数学

家可以随心所欲地加以创造，这就蕴含着对科学生命力的一种严重的威胁。如果这样，数学将不会再吸引任何有知识的人，它将是没有动机与目标的定义规则和推理的游戏。”美国数学泰斗伯克霍夫(G.D.Birkhoff)也指出：“我们寄希望于未来，越来越多的物理学家们能够更深刻地认识数学的原理，而数学家们不再把自己局限在数学抽象的美学之中。”物质科学与数学必须要搞联合。

纯数学家中有人公开鼓吹数学孤立主义，他们坚决反对数学被现实的俗物所污染，高高的象牙之塔挡住了其中深居简出的数学家，他们对自己的孤立志得意满。例如哈佛大学的名教授斯通(M.Stone)在他的著作《数学革命》中写道：“从1900年以来，我们对数学的概念或者有关的一些观点已经发生了重要变化，但是真正涉及思想变革的还是发现它是完全独立于物质世界的。数学看来与物质世界并没有必然的联系。毫不夸张地说，这个发现标志着数学史上一个最具意义的智力进步。通过进一步的研究，我们发现，只有把数学与其应用分离开来，才会产生这种新的发展方向，这个方向已成为其旺盛生命力和发展的真正源泉。

数学只有脱离过去那种必须束缚于现实的某一方面的状况，才能成为我们用于打碎枷锁的极端灵活的有力工具。”

柯朗对斯通的观点进行了批评，认为他的观点是一个危险的信号，表示不能接受数学的极终目标是“人类理性的光荣”这一陈词滥调。柯朗在肯定数学思维是通过抽象概念来运作的，数学思想需要抽象概念的逐步精练、明确和公理化的同时，严正警告，无视应用将导致整个数学的孤立甚至萎缩。

斯通的观点是错的。冯·诺伊曼说：“无可否认，数学上某些最了不起的灵感，那些想像之中纯得不能再纯的数学分支中的最好的灵感，全部来源于自然科学。”

现代数学的正确方向应该是着重发展那些与现代科学技术背景

有关联的、与计算机科学有关联的数学分支，不宜鼓励青年数学家去冲击诸如四色猜想、哥德巴赫猜想之类的经典难题。抽象与理论必须重视，但千万不宜过分强调，甚至以不联系实际为荣。不能使数学成为孤立于社会和自然科学之外的贵族文化。

7.10 数学是一种文化

现在媒体上和民间流传各种名目的所谓"××文化"，诸如"企业文化""茶文化""食文化"，等等，还未见媒体上有称呼"数学文化"者。事实上，数学不但是一种文化，而且是各种文化当中最为高雅、最为重要的文化之一。文化是指人类在社会历史发展过程中所创造的精神财富，文学、艺术、教育和科学都是文化。可见数学确为人类文化的重要组成部分。

从日常的语言文字当中，就可以听见看见数学文化的直观表现，例如很多成语之所以含义深刻就得益于数学，下面略举几例。

①不管三七二十一：$3\times7=21$ 是数学规律，不管三七二十一指某人干事不按规律办，有点冒险，很可能出错。

②一不做二不休：在数学中 2 是 1 的后继，某人干了一件坏事或傻事，他紧跟着又继续干另一件坏事，第二件事是第一件事的后继和递推。

③一百八十度大转弯：指一个人本来是顺着正半 x 轴行进，突然转向，沿 x 轴负半轴的方向行进，意思是他突然把自己的观点主张变成相反的观点主张，两者的方向夹角为 180°。

④十拿九稳：指办事成功的概率为 0.90，成功的可能极大。

⑤三分治七分养：指病人康复有两种途径：治疗和休养，两方面的加权数不一致，"治"的权为 0.3，"养"的权为 0.7，应以正确的休养调理为主。

⑥三年清知府，十万雪花银：揭露所谓清官的真面目，三年的贪污受贿有十万两白银，平均每年贪污受贿 $100000 \div 3 = 33333.3$(两)，每天平均贪污受贿 $100000 \div (365 \times 3) = 91.3242$(两)，即这位知府大人每天搜刮民脂民膏 91 两 3 钱白银，此语定量地描述了官僚的腐败程度。

⑦不三不四：模糊数学的表达，意思是指某人不老实。

⑧略知一二：只知道 10% 至 20%，表示自己知之甚少，谦虚之意。

⑨60 年风水轮流转：意指世道周期性变化。甲乙丙丁戊己庚辛壬癸为十天乾，子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥为 12 地支，10 与 12 的"天地"最小公倍数为 60，每 60 年一轮，例如，2000 年是"庚辰年"，2060 年必亦为庚辰年。中国的《易经》，甚至民间的封建迷信算命活动之中也有数字文化的参与。

另外，音乐上的"简谱"用数学 1(都)234567 来写；家居的门窗等都造成轴对称形，等等，也都渗透着数学文化的踪影。

数学与人类文明同生共存、相依为荣的现象俯拾即是，整体人类文化当中处处含有数学文化的内容。一点数学都不懂的人必然没有文化，每年高校招生，考文科的同学也必考数学，可见数学文化对社会科学和文学艺术也是重要的基础。一个人欲使自己具有深邃的文化修养，数学是他的必修课。

当今社会日趋数学化，随着人类生活质量的提高，生产力的发展和科学文化的进步，数学文化迅速介入一切领域，高技术实则为一种数学技术，即指把现实问题转述成一个相应的数学问题，且用计算机加以解决或用数学理论定性定量地加以研究，得出那个现实问题的定量结论或重要属性。一门科学现代化的水平近似地可以用该学科的研究与表述当中所消耗的数学含量来度量。一门学科，哪怕是社会科学，如果它的数学含量短缺，则它面临着两种前途，要么被淘汰，

要么加速数学化，例如经济学、社会学已经开始数学化，且初见成效。

数学不仅仅是为科学服务的“伙计”，数学、自然科学和社会科学是三个互相促进互相渗透的“伙伴”和朋友，数学既不是科学的皇后，也不是科学的奴仆。相对而言，现代数学文化处于人类文化的较高层次，数学在近代人类文化当中是有优势的，主要依靠其准确性、严密性、抽象性和应用的广泛和无孔不入而取得了优势，加之它证明中逻辑推理的简洁有力和问题的趣味性，从而具有美学意义下的艺术性和诱人魅力。

数学文化中所使用的数学语言是高级形式的语言，它具有绘画与音乐那种全球性，甚至有人猜测它可能具有超越地球文化的广度，所以在探索是否有外星人存在时，发往宇宙的呼唤信息当中，就有意发出了数学符号和公式，企图求得知音。由于数学是表述宇宙的语言，若真有外星人，或许他们能听懂这种数学语言。数学语言中有些有趣的符号，例如

$\rceil$：非，例如$\rceil(1=2)$，表示$1\neq 2$。

$\wedge$：与，例如$(x\leqslant 100)\wedge(x\geqslant 100)$，表示$x$不大于100也不小于100，只有$x=100$。

$\vee$：或，例如$(x=1)\vee(y=1)$，表示x与y中至少有一个是1。

$\Rightarrow$：如果……，则……，例如$\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\theta=1$，表示如果$\theta=\frac{\pi}{2}$，则$\sin\theta=1$。

$\Leftrightarrow$：当且仅当，例如$x^2=1\Leftrightarrow(x=1)\vee(x=-1)$，表示$x^2=1$当且仅当$x=1$或$x=-1$。

$\forall$：对任意给定的；$\exists$：存在；$\ni$：使得，例如，$\forall x\in \mathrm{R}$，$\exists y\in \mathrm{R}$，$\ni x+y=0$，表示对任意给定的实数x，存在实数y，使得$x+y=0$。

数学语言符号化，精确化程度高，没有日常用语中的歧义现象。

用数学语言写成的同一个数学模型可以刻画自然界和人类社会

中许多不同的变化，数学文化统一着自然与社会的规律。例如数学模型

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 4x+2y=300 \end{cases}$$

表示："鸡兔同笼，其头共 100 只，其足共 300 只，求鸡兔各几只？"也可以表示"300 元钱买来 100 支笔，其中钢笔每支 4 元，圆珠笔每支 2 元，问钢笔圆珠笔各几支？"等等。

数学文化无阶级性，不会出现某些内容因为改朝换代而废除的现象。在社会科学乃至某些自然科学当中，一代人抛弃前代人建立的理论的现象司空见惯，数学当中则是下一代人更上一层楼。

数学文化是一个人整体文化素质的重要标志。它使人说话办事条理清楚，逻辑严谨，符合理性标准，守时守约，具有准确可靠的品质。一个社会，如果多数国民的数学文化修养太低，人们心中无数，办事不守信用，言行不合规矩，经营不知得失，那么这个社会绝不会繁荣。为什么在经商中文化程度高的人容易赢利致富，一个重要背景是这些人有数学头脑，是数学中的运筹优化观点和风险观点在起作用。

在自然科学当中数学文化起着车马桥舟的作用，在科学史上受惠数学得到成功的事件数不胜数，例如丹麦伟大的天文学家第谷十余年食宿山头，日夜观测天象，积累了巨量的天文数据，可叹至死未找出星辰运行规律的准确公式。第谷去世后，弟子开普勒接过师长的宝贵资料，进行数学分析和推理，终于得出第谷梦寐以求的行星运动三大定律。行星运动三大定律是人类科学史上最重大的成就之一，是数学文化与实验科学联姻哺育的天文学长子。科学史上第二个精彩事例是英国的亚当斯和法国的勒维烈通过复杂的数学分析与推理，预报了当时尚无人所知的一颗行星的存在。且明确预报了这颗星必于何时出现于何处，结果人们果然在其时其地观测到了这颗

星的出现，这颗星就是今日所称的“海王星”，是太阳系的第八颗行星；数学文化，叹为观止！

数学文化在人类科学技术和精神文明中的作用，不论怎么估计，也不会过分。

由于数学文化需要经过艰苦勤奋的学习才能获得，不肯动脑动手的人难以修成，外表又不似电视小说等别样文化那般通俗易懂，声色俱全，加之搞数学的人清苦贫寒，无职无权，容易被崇拜权钱的庸人所不敬，所以目前具有数学文化修养者并不占国民之多数，古今中外，都是如此，不怪大数学家 P.R. 哈尔莫斯感叹道：“甚至受过教育的人们，都不知我的学科的存在，这使我感到伤心！”数学是看不见的文化。

卷末寄语

本书向读者展示了数、图、几何、组合、模糊、混沌、危机和思想诸方面的内容，其中有趣的问题、漂亮的图形、强有力的逻辑和深刻的数学思想，实在令人陶醉，同时还介绍了数学史上处于领袖地位的多位数学家的传记与贡献，使我们做人做学问有了榜样。囿于本书对读者的定位，我们只能用 + − × ÷ 来讲数学，所以讲出的远非数学科学的全貌，不过我们已经从此领略了数学之美妙、深刻、严谨、有用。

书中介绍的数学名题，给出解答者，我们当然要尽情欣赏；未被解答者，例如哥德巴赫猜想、四色定理的书面证明等，奉劝读者千万不要轻率地向这些大问题挑战，不能盲目冲击这些老大难的问题而走入盲目自信的误区。这些问题都经受过众多大数学家的长期研究仍不得其解，其难度可能比人们估计得还要大。读者应该把学习研究的内容限制在力所能及的范围之内。

不少数学游戏，在数学史上曾起过特殊的作用，不能持轻视的态度。例如 18 世纪的七桥游戏就是图论与拓扑学的种子，欧拉解决七桥问题的思想方法开创了图论与拓扑学的研究，欧拉被誉为图论之父。有这种作用的游戏还有哈密顿周游世界的游戏和生命游戏，等等。

学习数学最好的途径是自己动笔做数学，读者不妨以本书上的问题为出发点，举一反三，找一些同类问题亲自解解看，那样你的体验会更深入。留心你身边的事和物，从其间你一定会发现与本书讲过的内容有密切关系的问题待你去解答。书中讲出的一些实际应用问题，读者最好自己动手演习一下，例如自己编一组密码，其传输的汉语内容由自己任意确定；用非规尺来三等分角、倍立方或化圆为方；买一块豆腐或蛋糕真的去切分；找一些细绳来实际捆扎一下点心盒；做一个 20 面体的纸制模型且在其上实行剖分，使得剪成两部分，

把 20 面体的每个面剪成两部分而不过其顶点；约朋友进行图上智斗或做生命游戏，等等，一定会兴趣盎然，比一般的玩牌玩棋更高雅更愉悦。

至于数学思想与数学文化的内容，本书只是粗浅介绍了一些可以言之成理的观点，也许只能算一家之言，读者尽可以批判的精神思辨之。事实上，科学的最基本的精神就是批判，最基本的态度就是疑问。数学是严肃的、求实的，它是人类文化中最进步的因素，它超越民族与国界，超越党派与信仰，原则上不隶属于任何哲学，它只隶属于人类进步的科学文化。

当然，数学并非是真理的化身，科学的皇后，也不是精确论证的顶峰和关于宇宙设计的真理。本书讲的混沌、模糊、NPC 问题，以及几次数学危机和哥德尔不可判命题已经宣布数学的确定性不是绝对的，它的确定性在一定条件下是可能丧失的。

本书对具体数学问题的选取，除了要有趣之外，主要是向有用倾斜，作者不是"为数学而数学"的唯美数学观的拥护者，作者认为一个数学分支不能引起除了本分支的任何别人的兴趣时，它怕是要僵死了。事实上，每个数学分支中的第一批问题往往是从经验中提取的，是由外部现实世界中产生的，数学在工业社会中，在当今信息社会中，都在扮演着举足轻重的实用角色，我们的现实世界已经"不可一日无此君"了。笛卡儿有名言曰："一切问题都可以化成数学问题。"诺伊曼直言："数学中一切最好的灵感，甚至人们可以想像的最纯的数学中的灵感，都是来自自然科学的。"他还说："数学方法入侵自然科学的理论部分，并在那里起主导作用。"在社会科学当中，许多重要的分支，例如经济学，已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段。最伟大的数学家如阿基米德、牛顿、欧拉和高斯等，总是以同等的重要性把数学理论与实用统一起来。事实上，没有什么科学文化比数学更卓越更有用。数学是自然科学的保姆，一个国家的科学发展水

平，可以用它使用的数学的质与量来衡量，一个数学不发展的国家岂能强大？中国有良好的数学传统，可望成为21世纪的数学强国，进而成为各方面都领先的世界强国。

当今数学发展极快，数学已有近百种分支，每年有几万篇的数学论文发表，非数学家对这些新成果颇感难懂。数学已经是一个巨大的、复杂的知识文化体系，急需向非数学专业的人们宣传普及数学的内容、思想和方法，可惜在向广大群众进行科普时，和理、化、天、地、生各专业的科学家相比，数学家最为难，名列倒数第一，这可能与数学的符号不通俗、内容太抽象有关。本书是数学科普的一种尝试，在写作的知识面和表述方式上斗胆做了一些试验，企图只用 + − × ÷ 把众多有趣有用的数学问题讲明白，不知是否能够如愿。

愿读者人人喜欢数学，通过数学学习，个个机敏有为，从数学素质的培养当中获得非本能的智慧和科学与生活的灵气。

参 考 文 献

A. H. 贝勒著 .1998. 谈祥柏译 . 数论妙趣——数学女王的盛情款待 . 上海:上海教育出版社

E.N. 洛伦兹著 .1997. 刘式达等译 . 混沌的本质 . 北京:气象出版社

李尚志,王树禾等 .1996. 数学模型竞赛教程 . 南京:江苏教育出版社

李文林 .1998. 数学珍宝——历史文献精选 . 北京:科学出版社

刘华杰 .1996. 混沌之旅 . 济南:山东教育出版社

鲁又文 .1984. 数学古今谈 . 天津:天津科技出版社

马丁·加德纳 .2000. 陈为蓬译,萨姆·劳埃德的数学趣题 . 上海:上海科技教育出版社

让·迪尼多内著 .1999. 沈永欣译 . 当代数学——为了人类心智的荣耀 . 上海:上海教育出版社

施琴高兹著 .1982. 王宝霁译 . 数学 100 题 . 北京:科学普及出版社

台湾科普文选 .1982. 北京:科学普及出版社

谈祥柏 .1996. 数:上帝的宠物 . 上海:上海教育出版社

谈祥柏 .1996. 谈祥柏科普文集 . 上海:上海科学普及出版社

王树禾,侯定丕 .2000. 经济与管理科学的数学模型 . 合肥:中国科学技术大学出版社

王树禾 .1990. 图论及其算法 . 合肥:中国科学技术大学出版社

王树禾 .1997. 数学模型基础 . 合肥:中国科学技术大学出版社

王树禾 .1998. 微分方程模型与混沌 . 合肥:中国科学技术大学出版社

王树禾 .1999. 从哥尼斯堡七桥问题谈起 . 长沙:湖南教育出版社

王树禾 .2001. 离散数学引论 . 合肥:中国科学技术大学出版社

王树禾 .2002. 数学素质强化训练 . 合肥:安徽科学技术出版社

徐品方 .1992. 数学简明史 . 北京:学苑出版社

杨路,张景中,侯晓荣 .1996. 非线性代数方程组与定理机器证明 . 上海:上海科技教育出版社

朱学志 .1984. 数学史数学方法论 . 哈尔滨:黑龙江林业教育学院出版社